BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 129-137

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__129_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RICHELOT (F.-J.). — DIE LANDENSCHE TRANSFORMATION IN IHRER ANWENDUNG AUF DIE ENTWICKELUNG DER ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN. — Königsberg, Verlag von Hubner und Matz, 1868 (¹).

Depuis Jacobi, la théorie des fonctions elliptiques a toujours occupé une large place dans l'enseignement des Mathématiques à l'Université de Kœnigsberg. Le cours de M. Richelot, le successeur de Jacobi, a exercé une influence considérable sur le développement de cette branche de l'analyse, qui a fourni des thèses à la plupart de ses élèves. M. Richelot a pour habitude de varier sans cesse le point de départ de son cours, et d'aborder sa théorie favorite par les chemins les plus divers. Tantôt il s'appuie sur les propriétés des fonctions doublement périodiques (exposées par Jacobi, dès 1829, dans ses premières leçons), tantôt sur la transformation, sur la multiplication, sur les produits infinis, sur les fonctions Θ (que Jacobi prenait pour point de départ dans son cours de 1836), ou sur tel autre principe d'où il est possible de pénétrer au cœur de la théorie. Par malheur, M. Richelot n'a pu se décider à publier cet enseignement si fécond; il a été retenu surtout par le désir d'attendre d'abord l'impression des leçons de Jacobi, laquelle, quoique préparée depuis longtemps par M. Rosenhain, paraît avoir rencontré des obstacles imprévus. En attendant, quelques-unes des méthodes de M. Richelot ont passé dans les travaux publiés par ses anciens auditeurs; c'est ainsi que l'on retrouve dans l'ouvrage de M. Durège un procédé exposé par M. Richelot, vers 1842, pour déduire de la transformation indiquée par Landen le développement des fonctions elliptiques en produits infinis. La même transformation peut conduire au développement de ces fonctions en séries, et cette marche est d'autant plus intéressante qu'elle jette, pour ainsi dire, un pont des travaux de Legendre aux idées de Jacobi. Une lettre de M. Schröter, professeur à l'Université de Breslau, a déterminé M. Richelot à livrer à la publicité ce

(¹) RICHELOT, *La transformation de Landen appliquée au développement des fonctions elliptiques*. Kœnigsberg, Hubner et Matz. Brochure in-4° de 60 pages.

qu'il avait rédigé sur cette matière. C'est l'objet de la brochure que nous avons sous les yeux.

La transformation de Landen fournit l'équation suivante

$$(1+k)\sin\operatorname{am} u = 2\sin\operatorname{am} u' \sin\operatorname{am}(u'+K') \quad (\text{mod. } k'),$$

laquelle, en trigonométrie, devient

$$\sin\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\pi).$$

En même temps, nous avons

$$u' = \frac{1+k}{2}u, \quad \text{et} \quad \frac{1+k}{2} = \frac{K'}{2K} = \frac{K'_1}{K_1};$$

la même transformation, répétée n fois, conduit à l'argument

$$u^{(n)} = \frac{K_1^{(n)}}{K_1}u,$$

et l'expression de $\sin\operatorname{am} u$ devient

$$\sin\operatorname{am} u = \frac{K_1}{K'_1}\left(\frac{K'_1}{K''_1}\right)^2 \cdots \left(\frac{K_1^{(n-1)}}{K_1^{(n)}}\right)^{2^{n-1}} \prod_{h=0}^{h=2^n-1} \sin\operatorname{am}\left[u^{(n)} + \frac{hK^{(n)}}{2^{n-1}}\right] \quad (\text{mod. } k^{(n)}).$$

Pour $n=\infty$, on a

$$k^{(n)} = 1, \quad K_1^{(n)} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{K^{(n)}}{2^{n-1}} = \frac{\pi K}{K_1},$$

et le $\sin\operatorname{am}(\text{mod. } 1)$ devient la tangente hyperbolique. On arrive ainsi à l'un des produits infinis qui représentent $\sin\operatorname{am} u$. Les produits infinis pour $\cos\operatorname{am} u$ et $\Delta\operatorname{am} u$ s'en déduisent par des transformations faciles, ou bien on les forme directement, à l'aide de la relation suivante

$$1 - k^2\sin^2\operatorname{am} a \sin^2\operatorname{am} u = \frac{(1-k'^2\sin^2\operatorname{am} a' \sin^2\operatorname{am} u')[1-k'^2\sin^2\operatorname{am}(a'+K')\sin^2\operatorname{am} u']}{1-k'^2\sin^2\operatorname{am} u'},$$

où l'argument a' se déduit de a comme u' de u. On aurait dans le premier membre $\Delta^2\operatorname{am} u$, en faisant

$$a = K, \quad \text{d'où} \quad a' = \tfrac{1}{2}K';$$

ou bien $\cos^2 \operatorname{am} u$, en faisant

$$a = K + iK_1, \quad \text{d'où} \quad a' = \tfrac{1}{2}K' + iK'_1;$$

dans les deux cas, $\sin^2 \operatorname{am} a' = \sin^2 \operatorname{am}(a' + K')$, et l'expression commune de $\Delta \operatorname{am} u$ et de $\cos \operatorname{am} u$ devient

$$\frac{1 - k'^2 \sin^2 \operatorname{am} a' \sin^2 \operatorname{am} u'}{\Delta \operatorname{am} u'}.$$

La dérivée logarithmique de $\Delta \operatorname{am} u'$ donne ensuite le développement de $\sin \operatorname{am} u$ en *série* infinie, puisque

$$k \sin \operatorname{am} u = -\frac{d \log \Delta \operatorname{am} u'}{du}.$$

Les séries infinies pour $\cos \operatorname{am} u$ et pour $\Delta \operatorname{am} u$ se déduisent facilement des deux relations

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{1+k} \Delta \operatorname{am} u &= \Delta \operatorname{am} u' + \Delta \operatorname{am}(u' + K'), \\ \frac{2k}{1+k} \cos \operatorname{am} u &= \Delta \operatorname{am} u' - \Delta \operatorname{am}(u' + K'), \end{aligned}\right\} \pmod{k'}.$$

On a d'ailleurs aussi

$$\frac{d \sin \operatorname{am} u}{du} = -\sin^2 \operatorname{am} u' + \sin^2 \operatorname{am}(u' + K'),$$

et

$$1 + k \sin^2 \operatorname{am} u = \sin^2 \operatorname{am} u' + \sin^2 \operatorname{am}(u' + K');$$

les formules

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{1+k} Z(u) &= Z(u') + Z(u' + K'), \\ \frac{2k}{1+k} \sin \operatorname{am} u &= Z(u') - Z(u' + K'), \end{aligned}\right\} \pmod{k'},$$

qui se déduisent des deux précédentes par une intégration facile, fournissent également le développement de $\sin \operatorname{am} u$, ainsi que celui des intégrales de deuxième espèce. Pour les intégrales de la troisième espèce on aurait la relation

$$\Pi(u, a) = \Pi(u', a') + \Pi(u' + K', a' + K') \pmod{k'}.$$

9.

M. Richelot montre encore que le même procédé peut fournir le développement de la fonction Θ, de sorte que toute la théorie pourrait être fondée sur la transformation de Landen. Legendre en a tiré un très-bon parti, notamment pour ses méthodes d'approximation; mais il n'a jamais soupçonné toute la portée de la formule du géomètre anglais. S'il avait eu seulement l'idée d'introduire la fonction Z à la place de l'intégrale de deuxième espèce E, il est probable qu'il n'aurait pas laissé tant à faire à Jacobi.

Dans une lettre de M. Schröter, que M. Richelot reproduit, on trouve la remarque que la transformation de Gauss est susceptible d'une application analogue. Elle fournit, en effet, la relation

$$\frac{K}{\sin\operatorname{am} u} = \frac{K^0}{\sin\operatorname{am} u^0} + \frac{K^0}{\sin\operatorname{am}(u^0 + iK_1^0)} \quad (\operatorname{mod}. k^0),$$

qu'on pourrait écrire

$$\frac{K k}{K^0 k^0} \sin\operatorname{am} u = \sin\operatorname{am}(u^0 + \tfrac{1}{2} i K_1^0) + \sin\operatorname{am}(u^0 - \tfrac{1}{2} i K_1^0),$$

et ainsi de suite. Ici les modules convergent vers la limite zéro, tandis que la limite des modules ascendants de Landen est l'unité. M. Richelot fait observer, à ce propos, que la transformation de Gauss peut se déduire de celle de Landen à l'aide de la substitution

$$\operatorname{tang}\varphi = i \sin\psi, \quad \operatorname{tang}\varphi' = i \sin\psi',$$

et que d'autres substitutions fournissent encore quatre transformations du second ordre qui pourraient au même titre remplacer la transformation de Landen. M. Richelot donne des tableaux très-commodes pour ces substitutions, qui le conduisent à parler des six classes de Jacobi, et d'un algorithme de substitution que l'on appelle quelquefois *la clef*. Il termine par des considérations intéressantes sur le théorème de Landen et sur la construction géométrique de la transformation qui en dérive.

Nous croyons être utile à nos lecteurs en reproduisant ici les tableaux I et II de M. Richelot réunis en un seul. Chacune des six lignes horizontales peut en remplacer une autre. Pour abréger, nous écrivons

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

à la place de

$$\sin\mathrm{am}(u, k), \quad \cos\mathrm{am}(u, k), \quad \Delta\mathrm{am}(u, k).$$

La comparaison des deux premières lignes donne, par exemple,

$$\mathrm{sn}(iu, k_1) = i\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}, \quad \mathrm{cn}(iu, k_1) = \frac{1}{\mathrm{cn}\,u}, \quad \mathrm{dn}(iu, k_1) = \frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}.$$

En même temps, on voit que le quart de période K de l'argument est remplacé par K_1, la demi-période iK_1 par iK, et q par q_1. La formule

$$\mathrm{sn}(u + K) = \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$$

devient, par conséquent,

$$\mathrm{sn}(iu + K_1, k_1) = \frac{\mathrm{cn}(iu, k_1)}{\mathrm{dn}(iu, k_1)} = \frac{1}{\mathrm{dn}\,u},$$

ou bien, ce qui est la même chose,

$$\mathrm{sn}[i(u - iK_1), k_1] = i\frac{\mathrm{sn}(u - iK_1)}{\mathrm{cn}(u - iK_1)} = \frac{1}{\mathrm{dn}\,u}.$$

On peut donc employer pour ces transformations, à volonté, les « périodes de l'argument » ou les « périodes de u ».

	ARGUMENTS.	MODULES complémentaires.		PÉRIODES de l'argument.			FONCTIONS elliptiques			PÉRIODES de u.	
I.	u	k	k_1	K	iK_1	q	$\mathrm{sn}\,u$	$\mathrm{cn}\,u$	$\mathrm{dn}\,u$	K	iK_1
II.	iu	k_1	k	K_1	iK	q_1	$i\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$	$\frac{1}{\mathrm{cn}\,u}$	$\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$	$-iK_1$	K
III.	ku	$\frac{1}{k}$	$\frac{ik_1}{k}$	$kK - ikK_1$	ikK_1	q'	$k\,\mathrm{sn}\,u$	$\mathrm{dn}\,u$	$\mathrm{cn}\,u$	$K - iK_1$	iK_1
IV.	$-k_1 u$	$-\frac{ik}{k_1}$	$\frac{1}{k_1}$	$k_1 K$	$-k_1 K + ik_1 K_1$	$-q$	$-k_1\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$	$\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$	$\frac{1}{\mathrm{dn}\,u}$	$-K$	$K - iK_1$
V.	$-ik_1 u$	$\frac{1}{k_1}$	$-\frac{ik}{k_1}$	$ik_1 K + k_1 K_1$	$ik_1 K$	$-q'$	$-ik_1\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$	$\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$	$\frac{1}{\mathrm{cn}\,u}$	$-K + iK_1$	$-K$
VI.	iku	$\frac{ik_1}{k}$	$\frac{1}{k}$	kK_1	$ikK + kK_1$	$-q_1$	$ik\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$	$\frac{1}{\mathrm{dn}\,u}$	$\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$	$-iK_1$	$K - iK_1$

R. R.

PUBLICATIONS FINLANDAISES.

I.

NEOVIUS (V.). — LÄROBOK I MINSTA QVDRAT-METODEN. Åbo, 1870. In-8°, 109 p.

Tel est le titre d'un petit Traité en suédois sur la méthode des moindres carrés. Il est divisé en quatre chapitres : le premier est consacré à des recherches théoriques sur la probabilité des erreurs d'observation; le second enseigne à trouver les valeurs les plus probables des inconnues qui entrent dans un système d'équations linéaires, dont le nombre est plus grand que celui des inconnues; le troisième chapitre traite de la précision des observations et des erreurs probables des valeurs que l'on en déduit; dans le quatrième, enfin, l'auteur donne des règles pratiques, des exemples et des modèles de calcul qui servent à mieux éclairer les applications de la méthode.

Le travail est fait avec soin, et peut servir de guide pratique pour les amateurs des sciences d'observations. Mais il semble que l'auteur n'ait pas eu occasion de consulter les Mémoires originaux et classiques de Gauss; autrement, il aurait mis plus de rigueur dans les considérations théoriques. Par exemple, il n'aurait pas confondu, comme il le fait, la probabilité d'une erreur v avec la probabilité que l'erreur est comprise entre deux limites infiniment voisines v et $v + dv$. Mais, sans entrer dans les détails de l'exposition, nous dirons seulement un mot sur l'hypothèse qui lui a servi de point de départ.

Suivant l'exemple de M. Hagen, l'auteur admet que l'erreur qui affecte une observation quelconque est composée d'un nombre infini d'erreurs élémentaires infiniment petites, égales entre elles, mais pouvant être indistinctement positives ou négatives. C'est là une hypothèse que nous ne saurions approuver, d'abord parce qu'elle n'est justifiée par aucun raisonnement tant soit peu plausible, et ensuite parce qu'elle n'a pas même l'avantage formel de suffire à elle seule pour en déduire la loi de la probabilité des erreurs. C'est ce que nous allons montrer par l'analyse suivante :

Soit α la grandeur absolue de chacune des erreurs élémentaires, $2m$ leur nombre total, et considérons uue erreur positive v, composée de $m + n$ éléments positifs, et de $m - n$ éléments négatifs $(n < m)$, en sorte que $v = 2n\alpha$. Le nombre des combinaisons qui produisent l'erreur totale v sera

$$\frac{(2m)!}{(m-n)!(m+n)!},$$

et le nombre de celles qui donnent l'erreur zéro,

$$\frac{(2m)!}{m!\,m!}.$$

En désignant par $\varphi(v)$ la probabilité de l'erreur v, on aurait, par conséquent,

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(0)} = \frac{m!\,m!}{(m-n)!(m+n)!} = \frac{(m-n)(m-n+2)\ldots m}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)},$$

ou bien

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(0)} = \left(1 - \frac{n}{m+1}\right)\left(1 - \frac{n}{m+2}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{m+n}\right).$$

Il s'agit d'examiner ce que devient cette expression pour une valeur déterminée de v, lorsque α diminue, et qu'en même temps m et n augmentent indéfiniment. Observons d'abord que, chacun des facteurs étant $> 1 - \frac{n}{m}$ et $\leqq 1 - \frac{n}{m+n}$, le produit sera compris entre

$$\left(1 - \frac{n}{m}\right)^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{\left(1 + \frac{n}{m}\right)^n}.$$

Si le rapport $\frac{n}{m}$ tendait vers une limite finie > 0, ces deux expressions auraient pour limite zéro, et l'on aurait constamment $\varphi(v) = 0$, résultat inadmissible. Il faut donc admettre que $\frac{n}{m}$ tend vers zéro. Désignons par V la plus grande erreur possible, c'est-à-dire $V = 2m\alpha$; on aur

$$\frac{n}{m} = \frac{V}{v},$$

et puisque v est constant, il faudra que V tende vers l'infini à mesure que α diminue. Posons $\frac{n}{m} = \beta$, de sorte que

$$n = \frac{v^2}{2V\alpha\beta},$$

et soit k la limite du produit $V\alpha$, qui est indépendant de v; il est facile de voir que les expressions précédentes auront, l'une comme l'autre, pour limite $e^{-\frac{v^2}{2k}}$, et que l'on aura, par suite, en désignant par h^2 l'inverse de $2k$,

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(0)} = e^{-h^2v^2},$$

ce qui est bien la formule fondamentale de la méthode des moindres carrés. Mais pour y arriver, en partant de l'hypothèse de Hagen, on a été obligé d'admettre, comme nous l'avons vu, qu'il existe, entre l'erreur maximum V et l'erreur élémentaire α, une connexion telle que leur produit $V\alpha$ tende vers une limite finie différente de zéro. C'est là une supposition purement arbitraire, sans laquelle la voie suivie par l'auteur ne conduirait à rien.

II.

BONSDORFF (E.-V.). — DEN GEOMETRISKA THEORIE FÖR COMPLEXA FUNKTIONER.... Théorie géométrique des fonctions complexes, appliquée à l'intégrale elliptique du premier ordre. Thèse de doctorat. Helsingfors, 1879. In-4°, 65 p., 1 planche.

C'est un essai pour appliquer spécialement aux fonctions elliptiques la méthode suivie par Riemann dans son Mémoire sur la théorie des fonctions abéliennes (*Journal de Crelle*, t. 54), ainsi que par Prym dans ses recherches sur les fonctions ultra-elliptiques. Après avoir donné un aperçu, trop rapide pour être suffisamment clair, des artifices ingénieux par lesquels Riemann est parvenu à représenter distinctement les valeurs multiples d'une fonction algébrique quelconque ou de son intégrale, et les transformations que l'on peut faire subir à une telle surface pour la rendre simplement connexe (*einfach zusammenhängend*), l'auteur s'occupe particulièrement des séries exponentielles que Riemann a désignées par le symbole ϑ, et il cherche les relations qui existent entre celles-ci et les fonctions analogues Θ de Jacobi. Les unes comme les autres peuvent servir à calculer les fonctions elliptiques, dont les propriétés fondamentales et les développements en produits infinis sont exposés dans la dernière partie de l'ouvrage.

III.

MELLBERG (E.-J.). — OM YTSPÄNNINGEN HOS VÄTSKOR.... Sur la tension superficielle des liquides. Thèse de doctorat, 1871. In-8°, 50 p.

Suivant les idées de l'auteur, qui s'accordent de très-près avec celles de M. Dupré, la tension superficielle est due à l'effet combiné de deux forces opposées, l'attraction et la répulsion, qui agissent entre les molécules, et dont les sphères d'activité sont différentes. Cette tension est la même en chaque point d'une surface, quelle que soit la courbure; mais elle varie avec la température et la nature du fluide. L'auteur rend compte d'une série d'expériences qu'il a faites, en se servant d'une balance hydrostatique pour déterminer la tension superficielle d'une vingtaine de fluides différentes. Ensuite, il examine quelques phénomènes rapportés par M. Van der Mensbrugghe, et qui s'expliquent par un changement partiel de la tension.

L. LINDELÖF.