

JEAN KUNTZMANN

Représentations sur un système multiforme

Annales de l'université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 95-99

http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__95_0

© Annales de l'université de Grenoble, 1945, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'université de Grenoble » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATIONS SUR UN SYSTÈME MULTIFORME

par M. Jean KUNTZMANN.

Une opération multiforme dans un ensemble E est une loi qui fait correspondre à tout couple ordonné (a, b) d'éléments de E un ou plusieurs éléments de E . Nous désignerons par $\{ab\}$ l'ensemble formé par ces éléments et par $a.b$ l'un quelconque d'entre eux.

Il est possible d'attacher à tout système multiforme S un système uniforme U , en étendant l'opération à l'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E . Nous désignerons par $\{a\}$ l'ensemble formé du seul élément a . Soient A, B des parties de E . On pose

$AB =$ Ensemble réunion de tous les $\{ab\}$, $a \in A$, $b \in B$.

Considérons le sous-système de U engendré par les $\{a\}$. Nous désignerons ce sous-système par U_s . Il y a une correspondance biunivoque entre les éléments de U_s et les complexes distincts, valeurs des diverses expressions possibles dans S .

Lorsque S est uniforme, U_s est isomorphe à S .

Représentation stricte d'un système uniforme sur un système S .

Nous appellerons représentation stricte d'un système uniforme K sur un système S une représentation de K sur U_s suivie du passage de chaque élément de U_s au complexe d'éléments de S dont il est formé (l'application de K sur U_s transforme l'opération définie dans K en l'opération induite dans U_s par l'opération de S).

Cette notion se réduit à la notion ordinaire de représentation lorsque S est uniforme, puisque dans ce cas U_s est isomorphe à S .

Représentation d'un système multiforme sur un système S.

Plus généralement, considérons un sous-système U'_s de U , tel que tout élément de S figure dans au moins un des ensembles qui constituent le sous-système U'_s .

Il semble qu'il convienne d'appeler représentation d'un système multiforme K sur un système S la correspondance suivante : on construit U'_K sur K au moyen de certains complexes comme il vient d'être expliqué plus haut et on établit une représentation de U'_K sur S .

Les modes de génération des systèmes multiformes usuels sont des représentations en ce sens général.

Soit par exemple l'hypergroupe des catégories ; on l'obtient par les opérations suivantes :

Passage du groupe G au système U extension de G à l'ensemble des parties.

Restriction U_g de U au sous-système engendré par les catégories $\{gag\}$ (g sous-groupe de G) ; isomorphie entre U_g et V_Γ , Γ désignant l'hypergroupe des catégories, V l'extension de Γ à l'ensemble des parties et V_Γ le sous-système de V engendré par les parties formées d'un seul élément.

Il n'y a pas représentation de G considéré comme système uniforme sur Γ . On ne peut donc pas remplacer U'_K par U_K sans restreindre la généralité.

*
* *

Revenons maintenant à la représentation stricte d'un système uniforme K sur S . Nous allons indiquer un procédé pour passer directement de K à S sans faire intervenir la décomposition d'un ensemble en ses éléments. Choisissons dans K un élément et un seul correspondant à chaque complexe de U_s réduit à un seul élément. Soit $A \rightleftharpoons \{a\}$ cette correspondance, $A \in K$, $a \in S$.

Les A engendrent un sous-système K'' (qui peut d'ailleurs être confondu avec K'). Ce système possède la propriété suivante : deux expressions formées avec les A ne sont égales que si leurs images dans S sont deux complexes identiques. Ainsi $(AB)C = DE$ exige $\{(ab)c\} = \{de\}$. Il y a aussi représentation de K'' sur S .

Définissons des classes C_a attachées à chaque élément a de S . C_a

est l'ensemble de tous les éléments de K'' tels que leur correspondant dans U_s soit un ensemble contenant a .

Nous poserons : $A \mp B = D$ si $AB \in C_{11}$,

c'est-à-dire si $\{ab\} \supset \{d\}$,

plus généralement : $(A \mp B) \mp D = E$ si $(AB)D \in C_{11}$,

c'est-à-dire si $\{(ab)d\} \supset \{e\}$

et ainsi de suite.

La correspondance $A \rightleftharpoons a$ est donc une isomorphie entre l'ensemble des A muni de cette opération et le système S .

Inversement, soit un système K'' satisfaisant aux conditions imposées, c'est-à-dire : un certain nombre d'éléments A qui engendrent K sont en correspondance biunivoque avec les éléments de S et deux expressions formées des A ne sont égales que si leurs correspondantes dans S représentent deux complexes identiques ; on obtient une représentation du système K'' sur S en appliquant chaque expression formée des A sur sa correspondante dans S . On obtient, en effet, une correspondance univoque qui respecte manifestement l'opération.

On peut déduire de ceci diverses conséquences.

Le procédé qui nous a permis de passer de K à S peut s'appliquer en particulier au passage de U'_s à S (U'_s est identique à U'_s). Tout système multiforme peut donc être obtenu à partir d'un système uniforme convenable par le procédé des classes décrit plus haut. Ces classes ne sont d'ailleurs pas quelconques.

Le système uniforme à choisir est soumis à la seule condition que deux expressions formées avec les A n'y sont égales que si les expressions correspondantes de S le sont aussi. Le système des expressions toutes distinctes formées avec les éléments de E est alors un système apte à être représenté sur tout système défini entre les éléments de E ; de même le monoïde libre (expressions bâties sur E mais en observant la loi d'associativité) est apte à être représenté sur tout système associatif (et seulement sur ceux-là).

Permutations multiformes.

On désigne ainsi une correspondance qui à tout élément d'un ensemble E associe plusieurs éléments de E (ou éventuellement un seul).

On peut définir le produit de deux permutations multiformes : c'est la permutation obtenue en les effectuant successivement. Ce produit est associatif. — Soit S un système multiforme. Nous le supposons muni d'une unité scalaire à droite e : $ae = a$ pour tout a .

On peut associer à tout élément a de S la permutation P_a $x \rightarrow ax$. Deux permutations P_a et P_b sont distinctes si $a \neq b$ car par P_a

$$e \rightarrow ae = a$$

$$\text{et par } P_b \quad e \rightarrow b.$$

$$\text{Par } P_a P_b \quad e \rightarrow ab.$$

$$\text{Par conséquent} \quad P_a P_b = P_c P_d, \quad \text{ou} \quad P_a P_b = P_c$$

ne sont possibles que si l'on a respectivement :

$$ab = cd \quad \text{ou} \quad ab = c.$$

Si le système est associatif

$$P_a P_b = P_{ab} \quad \text{car} \quad a(bx) = (ab)x.$$

Les P_a engendrent un sous-système Π du système des permutations. Lorsque S est associatif, le système S est une représentation de Π . Il suffit d'appliquer chaque permutation de Π sur le complexe en lequel elle transforme e .

*
* *

Affaiblissement de la notion de représentation.

Considérons maintenant un système S non associatif. La donnée de ce système équivaut à la donnée des permutations P_a . Les P_a forment donc un système associatif attaché au système S quelconque.

Nous allons montrer qu'en modifiant légèrement notre définition de la représentation, il est possible d'obtenir le système S à partir de Π sans faire intervenir la manière dont chaque P_a agit sur les éléments de S .

A chaque élément a de S associons d'une part la permutation correspondante P_a , d'autre part une classe C_a formée de tous les $P_u P_v$ tels que $\{uv\} > a$.

. Définissons : $P_a \top P_b = P_d$ par la condition $P_a P_b \in C_d$, ce qui n'est pas autre chose que $\{ab\} \supset d$. Car $P_a P_b = P_a P_{b'}$ ou $P_a P_b = P_{a'}$ n'est possible que si $\{ab\} = \{a'b'\}$ ou $\{ab\} = \{a''\}$.

L'opération $\top$ transforme donc le système des P_a en un système isomorphe à S .

On généraliserait facilement ceci à un système uniforme K quelconque.

La correspondance ainsi définie entre K et S diffère d'une représentation sur les points suivants :

On exige seulement que $AB = CD$, $AB = C$ entraînent

$$\{ab\} = \{cd\}, \{ab\} = \{c\}$$

et non pas la même propriété pour toute expression formée des A .

En conséquence la classe de a sera seulement formée des $A_1 A_2$ tels que $\{a_1 a_2\} \supset \{a\}$ et non des expressions quelconques formées avec les A .

On ne peut plus trouver directement la valeur à attribuer à une expression quelconque de S .

On y gagne par contre de pouvoir choisir K beaucoup plus librement. En particulier K peut être associatif sans que S le soit.