GUY CASALE

Une preuve galoisienne de l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé

Astérisque, tome 323 (2009), p. 83-100

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__323__83_0>

Astérisque
323, 2009, p. 83–100

UNE PREUVE GALOISIENNE DE L'IRRÉDUCTIBILITÉ AU SENS DE NISHIOKA-UMEMURA DE LA PREMIÈRE ÉQUATION DE PAINLEVÉ

par

Guy Casale

À José Manuel Aroca pour son soixantième anniversaire

Résumé. — Cet article fait suite à un précédent. Nous utilisons le groupoïde de Galois calculé dans *loc. cit.* pour prouver que la première équation de Painlevé est irréductible au sens de Painlevé-Nishioka-Umemura. Pour cela nous prouvons que l'algèbre de Lie du groupoïde de Galois d'une équation réductible admet une suite croissante d'idéaux dont le premier est composé des champs tangents au feuilletage (donné par l'équation), le dernier est l'algèbre de Lie du groupoïde de Galois et les quotients de deux idéaux successifs sont de type linéaire. Ce n'est pas le cas pour P_1.

Abstract **(Galoisian proof of Nishioka-Umemura irreducibility of first Painlevé equation)**
This article follows a previous one. The Galois groupoid computed in *loc. cit.* is used to prove irreducibility in Painlevé-Nishioka-Umemura sense of the first Painlevé equation. We prove that the Lie algebra of the Galois groupoid of a reducible equation gets an increasing sequence of ideals such that: the first is the algebra of vector fields tangent to the foliation given by the equation, the last is the Lie algebra of the Galois groupoid, the quotient of two successive ideals is a Lie Algebra with linear type. This is not the case for P_1.

La question de l'irréductibilité d'une équation différentielle a été étudiée de manière approfondie par P. Painlevé depuis les *Leçons de Stokholm* [**19**]. Une première définition d'équation différentielle ordinaire réductible a été donnée par P. Painlevé et sera ensuite formalisée par K. Nishioka [**16**]. Une équation d'ordre n est dite réductible si on peut exprimer une solution rationnellement après avoir résolu successivement des équations différentielles linéaires, abéliennes (dont les solutions sont des fonctions abéliennes) ou d'ordre strictement plus petit que n.

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 12H05, 34M55.
Mots clefs. — Équations différentielles, irréductibilité, groupoïde de Galois.

Ce travail a été financé par une bourse Marie-Curie (contrat EIF-025116-Diff. Galois Theory) puis partiellement par l' ANR (projet n° JC05_41465).

Après avoir étudié l'irréductibilité des équations du premier ordre, Painlevé se pose la question de l'irréductibilité de la première des équations d'ordre deux sans singularité mobile qu'il a découvert :

$$(P_1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x.$$

Il prouve dans [**17**] qu'au moins une solution de cette équation est irréductible puis affirme dans [**18**] avoir déterminé le «groupe de rationalité de J. Drach» de cette équation et prouver ainsi son irréductibilité «absolue». Le groupe de rationalité utilisé par P. Painlevé provient d'une tentative de J. Drach de mettre en place une théorie «de la rationalité» (ou «de Galois») valide pour toute équation différentielle [**4**]. Malheureusement, les travaux de J. Drach sont entachés d'erreurs.

À la fin des années soixante-dix, l'école japonaise reprend et continue les travaux de Painlevé sur les équations sans singularité mobile. Une preuve de l'irréductibilité de P_1 est enfin obtenue par K. Nishioka [**16**] puis par H. Umemura [**22, 23**]. Récemment l'étude géométrique des variétés de conditions initiales des équations sans singularité mobile [**21**] a permis à M.-H. Saito et H. Terajima d'obtenir une autre preuve de l'irréductibilité de cette équation. Aucune de ces preuves n'utilise une «théorie de Galois générale».

Ce type de théorie a été mis en place indépendamment par H. Umemura [**25, 24**] et B. Malgrange [**15**] à la fin du vingtième siècle, achevant les travaux de J. Drach et E. Vessiot ([**26, 27**]). Dans cet article nous présentons une nouvelle preuve de l'irréductibilité de la première équation de Painlevé utilisant le groupoïde de Galois de cette équation [**15, 3**]. Ce dernier a été calculé dans [**3**] en complétant les calculs de J. Drach [**5**]. La détermination du groupoïde de Galois permet de montrer différents types de résultats concernant la réductibilité ou l'irréductibilité d'une équation. L'irréductibilité au sens de Drach-Vessiot ainsi que l'irréductibilité au sens des feuilletages de P_1 ont été prouvées dans [**3**]. Nous expliquons ici les relations entre le groupoïde de Galois d'une équation et son irréductibilité au sens de Painlevé-Nishioka-Umemura dans le cas particulier de la première équation de Painlevé.

Cet article est constitué de six parties. Dans la première, nous rappelons les définitions d'irréductibilité et de modèles pour des corps différentiels. Nous étudions ensuite rapidement la géométrie transverse des feuilletages donnés par les types d'extensions utilisés pour «réduire» une équation. Dans la troisième partie nous rappelons la définition du groupoïde de Galois d'un feuilletage suivant B. Malgrange [**15**] et présentons ensuite quelques lemmes élémentaires dans une quatrième partie . Après avoir fait les rappels nécessaires sur les algèbres de Lie de champs de vecteurs formels, nous prouvons l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé.

Je remercie B. Malgrange dont les remarques ont permis d'améliorer grandement ce texte.

1. Définitions et modèles géométriques

Pour les notions de géométrie algébrique utilisées dans cet article, nous renvoyons le lecteur à [**9**] et pour celles d'algèbre différentielle à [**20**]. Commençons par rappeler la définition de réductibilité d'une équation différentielle du second ordre suivant Nishioka-Umemura [**19, 16, 22**]. Les corps différentiels (K, δ) seront toujours des corps de type fini sur $\mathbb{C}$ et auront pour corps de constantes $K^\delta = \mathbb{C}$.

***Définition 1.1* (réductibilité [16, 22]).** — *Soit (K, δ) un corps différentiel ordinaire et $E : \delta^2 y = F(y, \delta y) \in K(y, \delta y)$ une* équation différentielle du second ordre *sur K. L'équation E est dite* réductible *si il existe une solution dans une extension différentielle L de K construite de la manière suivante :*

$$K = K_0 \subset K_1 \cdots \subset K_m = L$$

avec pour tout i,

- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension algébrique,
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension de Picard-Vessiot, *c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(f_j^p; 1 \leq p, j \leq n)$ avec $\delta f_j^p = \sum_k A_j^k f_k^p$, $A_j^k \in K_i$ et $K_i^\delta = K_{i+1}^\delta$.*
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension abélienne, *c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(\varphi_j(a_1, \ldots, a_n); 1 \leq j \leq n)$ les φ_j formant une base de transcendance du corps des fonctions d'une variété abélienne définie sur $\mathbb{C}$, les a_j appartenant à K_i et $K_i^\delta = K_{i+1}^\delta$,*
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension d'ordre un, *c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(z)$ avec $P(z, \delta z) = 0$, $P \in K_i(z, \delta z)$ et $K_i^\delta = K_{i+1}^\delta$.*

Une extension différentielle $K \subset L$ du type précédent sera dite réductrice. *Les extensions intermédiaires $(K_i \subset K_{i+1})$ décrites ci-dessus seront dites* élémentaires.

Dans la suite le corps différentiel de base sera $(\mathbb{C}(x), \frac{d}{dx})$. Nous allons décrire les modèles géométriques des extensions élementaires. Le corps $\mathbb{C}(x)$ sera le corps des fractions de la droite affine $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ et sa structure différentielle sera donnée par le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$.

Définition 1.2. — *Soient $\mathbb{C} \subset K$ une extension de corps de type fini et δ une dérivation de K. Un modèle pour l'extension différentielle (K, δ) de $\mathbb{C}$ est une variété algébrique affine Y sur $\mathbb{C}$ de corps de fractions K munie du champ de vecteurs δ_Y induit par δ.*

Soient $K \subset L$ une extension différentielle de type fini, (Y, δ_Y) et (Z, δ_Z) des modèles respectivement de K et de L. L'inclusion des corps donne une application rationnelle dominante $\pi : Z \dashrightarrow Y$ et la compatibilité des dérivations dit que le champ δ_Z est π-projetable d'image δ_Y.

Définition 1.3. — *Une application rationnelle $\varphi : Z \dashrightarrow Y$ entre variétés munies des champs de vecteurs respectifs δ_Z et δ_Y sera dite différentielle si $\overline{\varphi(Z)}$ est δ_Y-invariante et δ_Z est φ-projetable sur $\delta_Y|_{\overline{\varphi(Z)}}$*

Les applications différentielles entre modèles induites par les morphismes élémentaires seront appelés élémentaires. Voici une description succinte de ces applications.

Extensions algébriques. — En restriction à des ouverts convenables, elles correspondent aux applications finies étales $Z \to Y$. Le champ sur Y se relève de manière unique sur Z.

Extensions de Picard-Vessiot. — Ces applications se construisent à partir de (Y, δ_Y) en considérant le produit $Y \times GL_n(\mathbb{C})$ muni du champ de vecteurs

$$\delta_{Y\times GL_n(\mathbb{C})} = \delta_Y + \sum_{j,k,p} A_j^k g_k^p \frac{\partial}{\partial g_j^p}$$

où les g_j^p sont les coordonnées standard de $GL_n(\mathbb{C})$ et $(A_j^k) \in GL_n(\mathbb{C}(Y))$. Une extension de Picard-Vessiot est une sous-variété $\delta_{Y\times GL_n(\mathbb{C})}$-invariante minimale Z de $Y \times GL_n(\mathbb{C})$ telle que la projection induite de Z sur Y soit dominante. Par construction, cette projection est différentielle et il n'est pas difficile de montrer que l'extension de corps induite ne dépend pas du choix de Z.

Extensions abéliennes. — Soient Γ un réseau de $\mathbb{C}^n$ tel que $A = \mathbb{C}^n/\Gamma$ soit une variété abélienne, $\mathbb{C}(A)$ le corps des fonctions Γ-périodiques et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une base de transcendance de $\mathbb{C}(A)$ sur $\mathbb{C}$. Il existe des fonctions algébriques de n variables $F_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, telles que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Soient $a_1, \ldots, a_n$ n fonctions sur une variété (Y, δ_Y). Considérons $Y \times A$ muni du champ de vecteurs

$$\delta_{Y\times A} = \delta_Y + \sum_{i,j} \delta_Y(a_j) F_{i,j}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}.$$

Les trajectoires de ce champ de vecteurs sont les graphes des fonctions sur Y à valeurs dans A données par

$$\varphi_1(a_1 + c_1, \ldots, a_n + c_n), \ldots, \varphi_n(a_1 + c_1, \ldots, a_n + c_n),$$

les c étant des constantes de δ_Y. Un extension abélienne est une sous-variété $\delta_{Y\times A}$-invariante minimale Z de $Y \times A$ telle que la projection induite de Z sur Y soit dominante.

Extensions d'ordre un. — Une telle extension est donnée par une variété irréductible Z sur Y de dimension relative un et par un relevé δ_Z de δ_Y sans intégrales première rationnelles.

Définition 1.1bis *Soient (X, δ_X) une variété algébrique affine sur $\mathbb{C}$ muni d'un champ de vecteurs et $\pi : (X, \delta_X) \dashrightarrow (\mathbb{A}^1(\mathbb{C}), \frac{\partial}{\partial x})$ une application différentielle dominante. Le champ δ_X est dit* réductible *si il existe une famille d'applications différentielles dominantes $\pi_i : (Y_i, \delta_i) \dashrightarrow (Y_{i-1}, \delta_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq m$ de type* élémentaires *avec $(Y_0, \delta_0) = (\mathbb{A}^1(\mathbb{C}), \frac{\partial}{\partial x})$ et une application différentielle $\varphi : (Y_m, \delta_m) \dashrightarrow (X, \delta_X)$ dite* réductrice.

2. Structures transverses des extensions réductrices

Les structures transverses que nous étudierons sont données par des suites de formes rationnelles commençant par une base de formes nulles sur les trajectoires du champ de vecteurs et satisfaisant certaines identités différentielles. Ces suites sont aussi appelées suites de Godbillon-Vey ou équations de structures. Soient (Y, δ_Y) une variété munie d'un champ de vecteurs, N_Y le $\mathbb{C}(Y)$-espace vectoriel des formes sur Y s'annulant sur δ_Y et d_Y une forme rationnelle telle que $d_Y(\delta_Y) = 1$.

Extensions algébriques. — Si Z est un revêtement étale de Y, le relevé de δ_Y est unique et l'annulateur de ce relevé est $N_Z = \mathbb{C}(Z) \otimes_{\mathbb{C}(Y)} N_Y$. Pour cette raison, la géométrie transverse locale de ces extensions est triviale.

Extensions de Picard-Vessiot. — Soit Z une extension de Picard-Vessiot de Y. Les formes de N_Y s'annulent sur δ_Z. Une famille génératrice de l'espace des formes s'annulant sur δ_Z complétant N_Y est donnée par la matrice de formes suivante :

$$\Theta = G^{-1}dG - G^{-1}AGd_Y$$

où G est la matrice des coordonnées (g_j^p) de $GL_n(\mathbb{C})$ restreinte à Z. On vérifie que

$$d\Theta = -\Theta \wedge \Theta \text{ modulo } N_Y.$$

Cette identité traduit la structure de feuilletage de Lie linéaire de ce type d'équation au-dessus des trajectoires de δ_Y (*i.e.* modulo N_Y) ([**7**]).

Extensions abéliennes. — Soient Γ un réseau de $\mathbb{C}^n$ tel que $A = \mathbb{C}^n/\Gamma$ soit une variété abélienne, $\mathbb{C}(A)$ le corps des fonctions Γ-périodiques, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une base de transcendance de $\mathbb{C}(A)$ sur $\mathbb{C}$ et $F_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, des fonctions algébriques de n variables telles que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Considérons $a_1, \ldots, a_n$ n fonctions sur une variété (Y, δ_Y) et $Z \subset Y \times A$ une extension abélienne de Y de champ de vecteurs

$$\delta_Z = \delta_Y + \sum_{i,j} \delta_Y(a_j) F_{i,j}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}.$$

Nous noterons $(F_{i,j}^{-1})_{i,j}$ la matrice inverse de $(F_{i,j})_{i,j}$. Une famille génératrice de l'espace des formes s'annulant sur δ_Z complétant N_Y est donnée par

$$\eta_j = \sum_i F_{i,j}^{-1} d\varphi_i - \delta_Y(a_j) d_Y.$$

Ces formes sont fermées modulo N_Y.

Extensions d'ordre un. — Soit $Z \dashrightarrow Y$ une extension d'ordre un et θ une forme rationnelle s'annulant sur δ_Z indépendante des formes de N_Y. Il existe une suite de formes rationnelles sur Z satisfaisant les égalités :

$$\begin{aligned} d\theta &= \theta \wedge \theta_1 \mod N_Y, \\ d\theta_1 &= \theta \wedge \theta_2 \mod N_Y, \end{aligned}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d\theta_n = \theta \wedge \theta_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \theta_k \wedge \theta_{n-k+1} \mod N_Y.$$

Une telle suite est appelée suite de Godbillon-Vey générale de codimension un modulo N_Y.

Structure transverse d'une extension réductrice. — Soit

$$(Y_m, \delta_m) \overset{\pi_{m-1}^{m}}{\dashrightarrow} (Y_{m-1}, \delta_{m-1}) \overset{\pi_{m-2}^{m-1}}{\dashrightarrow} \dots \overset{\pi_1^2}{\dashrightarrow} (Y_1, \delta_1) \overset{\pi_0^1}{\dashrightarrow} (\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x})$$

une extension réductrice de la droite affine. Le feuilletage défini par le champ de vecteurs δ_m sur la variété Y_m admet une structure géométrique transverse particulière. Le $\mathbb{C}(Y_m)$-espace vectoriel des formes qui s'annulent sur δ_m est engendré par une famille filtrée de formes $\Omega = \cup_{i=1}^{m} \Omega(i)$ telle que $\Omega(i)$ engendre $\mathbb{C}(Y_m) \otimes_{\mathbb{C}(Y_i)} N_{Y_i}$ et $\Omega(i) - \Omega(i-1)$ soit

- une famille de formes satisfaisant des identités différentielles de type linéaire modulo $N_{Y_{i-1}}$,
- une famille de formes fermées modulo $N_{Y_{i-1}}$,
- ou bien une forme intégrable modulo $N_{Y_{i-1}}$.

Ces formes différentielles donnent une famille de feuilletages sur Y_m :

$$\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{m-1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_1,$$

la géométrie transverse de $\mathcal{F}_i$ relative à $\mathcal{F}_{i-1}$ étant linéaire, de translation ou de codimension un.

3. Groupoïde de Galois

Soit Y une variété algébrique affine lisse et irréductible sur $\mathbb{C}$ de dimension n. Nous noterons $J^*(Y)$ l'espace des difféomorphismes formels $\overline{y} : \widehat{Y,a} \to \widehat{Y,b}$, pour tout couple de points (a, b). Cet espace est un groupoïde pro-algébrique sur Y pour les lois de composition et d'inversion évidentes [**15, 13**]. Nous noterons Y la variété source et $\overline{Y}$ la variété but. Son anneau de fonctions régulières est

$$\mathcal{O}(J^*(Y)) = \mathcal{O}(Y) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{Y}) \left[\det[y_i^{\epsilon(j)}],\ \overline{y}_i^{\alpha}\ |1 \leq i \leq n, \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 < |\alpha|\right],$$

où $\epsilon(j)$ est le vecteur de coordonnées nulles sauf la j-ième égale à un. Le faisceau structural de $J^*(Y)$ est le faisceau sur $Y \times \overline{Y}$ donné par

$$\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\overline{Y}} \left[\det[y_i^{\epsilon(j)}],\ \overline{y}_i^{\alpha}\ |1 \leq i \leq n, \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 < |\alpha|\right].$$

Il fait de cet espace une pro-variété affine au-dessus de $Y \times \overline{Y}$ au sens de [**14**].

Dans des coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_n)$ sur Y et $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ les mêmes coordonnées sur $\overline{Y}$, cet anneau est muni de dérivations dites totales définies par :

$$D_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq j \leq n}} \overline{y}_j^{\alpha+\epsilon(i)} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_j^{\alpha}}$$

où $\overline{y}_j^0$ est égal à $\overline{y}_j$.

Ces champs définissent une connexion $D : \mathcal{O}_{J^*(Y)} \to \mathcal{O}_{J^*(Y)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_Y^1$ en recollant sur $Y \times \overline{Y}$ les formules locales $Df = \sum_i D_i f \otimes dy_i$

Cet espace est muni de projections naturelles sur les espaces de jets d'ordre q : $J_q^*(Y)$ d'anneau

$$\mathcal{O}(J_q^*(Y)) = \mathcal{O}(Y) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{Y}) \left[\det[y_i^{\epsilon(j)}],\ \overline{y}_i^{\alpha}\ |1 \leq i \leq n, \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 < |\alpha| \leq q\right].$$

Les flèches précedentes induisent une structure de groupoïde algébrique sur les $J_q^*(Y)$ et une connexion $D : \mathcal{O}(J_q^*(Y)) \to \mathcal{O}(J_{q+1}^*(Y)) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega^1(Y)$

Définition 3.1 **(Malgrange [15])**. — *Un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Y est un sous-espace $G \subset J^*(Y)$ défini par un idéal radiciel différentiel de $\mathcal{O}(J^*(Y))$ tel qu'en dehors d'une sous-variété S de Y, la restriction de G soit un sous-groupoïde de $J^*(Y - S)$ (au sens schématique).*

Un groupoïde de Lie G sur Y se projette sur des sous-variétés G_q des espaces $J_q^*(Y)$. Celles-ci sont des sous-groupoïdes algébriques de $J_q^*(U)$ au-dessus d'un ouvert Zariski dense convenable U de Y.

Exemples 3.2. — 1°) *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de Y donné par un système de formes ω_i, $1 \leq i \leq q$, intégrable (i.e. $\bigwedge_{i=1}^q \omega_i \wedge d\omega_j = 0$ pour tout j). Les difféomorphismes formels préservant le feuilletage*[1] *sont les solutions formelles d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie dont l'idéal est engendré par les coordonnées des équations $\bigwedge_{i=1}^q \omega_i \wedge \overline{y}^*\omega_j = 0$ pour $1 \leq j \leq q$. Il sera noté* $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$

2°) *Soit $\pi : Y \dashrightarrow X$ une application rationnelle. Elle définit un feuilletage sur Y dont le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie d'invariance sera noté* $\mathrm{Aut}(\pi)$.

3°) *On peut aussi considérer le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie d'invariance de π : $Inv(\pi)$ défini par les coordonnées de $\pi(\overline{y}) - \pi(y) = 0$ qui est naturellement inclus dans le précédent.*

(1) Aussi appelés difféomorphismes basiques.

4°) *Soient θ une p-forme et ω une q-forme sur Y, le groupoïde d'invariance de θ modulo ω : $Inv(\theta \mod \omega)$ est le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie dont l'idéal est différentiellement engendré par les coordonnées de $(\overline{y}^*\theta - \theta) \wedge \omega = 0$*

Remarque 3.3. — *Les transformations tangentes aux feuilles d'un feuilletage n'étant pas caractérisées a priori par des équations différentielles, le troisième exemple n'a pas de sens pour un feuilletage sans intégrales premières rationnelles.*

Un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie a une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie formée par les champs de vecteurs formels dont les flots appartiennent au $\mathcal{D}$-groupoïde. Soient $(y_1, \ldots, y_n)$ des coordonnées locales sur Y. Les champs de vecteurs $\sum_i a_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}$ dont les flots sont solutions d'une équation $E \in \mathcal{O}(J^*(Y))$ d'ordre q sont eux mêmes solutions d'une équation d'ordre q appelée équation linéarisée le long de l'identité :

$$\mathcal{L}(E) = \sum_{i,\alpha} \frac{\partial E}{\partial y_i^\alpha}(\mathrm{id})\ a_i^\alpha$$

où id est l'application de Y dans $J^*(Y)$ telle que $\mathrm{id}^* y_i = y_i$, $\mathrm{id}^*\overline{y}_i = y_i$, $\mathrm{id}^*\overline{y}_i^{\epsilon(j)} = \delta_i^j$ et $\mathrm{id}^*\overline{y}_i^\alpha = 0$ pour $|\alpha| > 1$, et a_i^α est la dérivée d'ordre $|\alpha|$ de a_i par rapport à y.

Définition 3.4. — *Soit $I \subset \mathcal{O}(J^*(Y))$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie G. L'idéal $\mathcal{L}(I)$ engendré par $\{\mathcal{L}(E), E \in I\}$ décrit au-dessus d'un ouvert Zariski dense U de Y un sous-fibré vectoriel de l'espace $J(TY)$ des champs de vecteurs formels sur Y. C'est la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie de G notée $\mathcal{L}G$. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des champs de vecteurs formels solutions de $\mathcal{L}G$ en $p \in U$ sera noté $\mathfrak{g}_p$ ou $\mathfrak{g}$ si aucune confusion ne porte sur p.*

En dehors de S, les solutions formelles de la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sont stables par le crochet de Lie [**15**]. Dans *loc. cit.* une définition de $\mathcal{D}$-algèbre de Lie dont les objets ci-dessus ne sont qu'un cas particulier est donnée. Cette notion englobe en particulier les feuilletages (algébriques singuliers) de Y. Avec cette définition, il arrive qu'une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie ne soit pas la $\mathcal{D}$-algèbre d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie. Dans le cas d'un feuilletage, cela conduit à la définition suivante :

***Définition 3.5* ([15]).** — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage (algébrique, singulier) de Y. Le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ est le plus petit $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie G tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}G$. Il sera noté* $\mathrm{Gal}(\mathcal{F})$.

Remarque 3.6. — *Soient I l'idéal de G et $Ann(\mathcal{F})$ l'idéal différentiel des équations différentielles en les a_i s'annulant sur les champs $\sum a_i\partial/\partial x_i$ tangents à $\mathcal{F}$. L'inclusion $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}G$ doit se lire $\mathcal{L}(I) \subset Ann(\mathcal{F})$.*

Un point essentiel dans la preuve de l'existence de cet objet est le théorème suivant dont nous nous servirons dans la suite.

***Théorème 3.7* ([15], thm 4.5.1.).** — *Soient G_1 et G_2 deux groupoïdes de Lie sur Y d'idéaux respectifs I et J. L'idéal $\sqrt{I+J}$ est l'idéal d'un groupoïde de Lie sur Y noté $G_1 \cap G_2$.*

Cet objet généralise le groupe de Galois différentiel d'une équation différentielle linéaire. Dans le cas d'un modèle (Y, δ_Y) d'un corps différentiel ordinaire, nous noterons $\mathcal{F}_Y$ le feuilletage de Y défini par le champ de vecteurs δ_Y. Le groupoïde $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y)$ sera aussi appelé groupoïde de Galois du corps différentiel $(\mathbb{C}(Y), \delta_Y)$. Dans le cas d'une extension de $(\mathbb{C}(x), \frac{\partial}{\partial x})$, $\pi : (Y, \delta_Y) \to (\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x})$, la partie significative de $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y)$ est le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y) \cap Inv(\pi)$. Lorsque cette extension est de type Picard-Vessiot, on obtient ainsi un fibré en groupe au-dessus d'un ouvert de $\mathbb{A}^1$ dont la fibre est un représentant du groupe de Galois abstrait donné par la théorie de Picard-Vessiot.

Exemples 3.8. — 1°) *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de Lie linéaire* [**7**] *donné par une matrice de n^2 formes rationnelles $\Theta = (\theta_i^j)_{ij}$ vérifiant*

$$d\Theta = \Theta \wedge \Theta.$$

Les champs X tangents au feuilletage $(\Theta(X) = 0)$ préservent la forme Θ :

$$L_X \Theta = \iota_X d\Theta + d\iota_X \Theta = 0.$$

Le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ est donc inclus dans $Inv(\Theta)$, le groupoïde d'invariance des formes θ_i^j, $1 \leq i, j \leq n$.

2°) *Soit $(Z, \delta_Z) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$ une extension de Picard-Vessiot. On note $\mathcal{F}_Z$ le feuilletage défini par δ_Z, $\mathcal{F}_Y$ le feuilletage que l'on obtient en ramenant le feuilletage sur Z défini par δ_Y. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_q$ une base de formes s'annulant sur $\mathcal{F}_Y$ et θ_i^j, $1 \leq i, j \leq n$, les formes définissant $\mathcal{F}_Z$ satisfaisant $d\theta_i^j = \sum_k \theta_i^k \wedge \theta_k^j \mod \omega_1, \ldots, \omega_q$. On a évidemment $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z) \subset \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_Y)$. De plus comme les champs X tangents à $\mathcal{F}_Z$ satisfont $L_X(\theta_i^j) = 0 \mod \omega_1, \ldots, \omega_q$, $1 \leq i, j \leq n$, on a $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z) \subset \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y) \cap Inv(\theta_i^j \mod \omega_1, \ldots, \omega_q \; ; \; 1 \leq i, j \leq n)$.*

Théorème 3.9 **([3])**. — *Nous appellerons groupoïde de Galois de la première équation de Painlevé le groupoïde de Galois du feuilletage défini par $\delta_P = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + x)\frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{A}^3$. Le groupoide de Galois de la première équation de Painlevé est le groupoide de Lie d'invariance $Inv(\gamma)$ de la 2-forme $\gamma = dy \wedge dz - zdx \wedge dz + (6y^2 + x)dx \wedge dy$.*

La partie significative du groupoïde de Galois de $(\mathbb{A}^3, \delta_P) \to (\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x})$ est $Inv(\gamma) \cap Inv(x)$. Dans des coordonnées analytiques locales x, h, k avec $dh \wedge dk = \gamma$, ses solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{h} = \overline{h}(h, k) \\ \overline{k} = \overline{k}(h, k) \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \frac{\partial(\overline{h}, \overline{k})}{\partial(h, k)} = 1.$$

4. Quelques lemmes sur les groupoïdes de Lie

Soit Y une variété algébrique affine lisse et irréductible sur $\mathbb{C}$ de dimension n. Notons $R_q(Y)$ le fibré des repères d'ordre q sur Y. Ce fibré est l'espace des jets d'ordre

q en 0 d'applications inversibles $(\mathbb{C}^n, 0) \to Y$. Il s'identifie à la fibre en $p \in Y$ de la projection source $J_q^*(Y) \to Y$ via la composition par un repère d'ordre q en p. C'est aussi un fibré principal sous l'action du groupe Γ_q^n des jets d'ordre q en 0 d'applications inversibles $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$. L'application $\lambda : R_q(Y) \times R_q(Y) \to J_q^*(Y)$ défini par $\lambda(r, s) = r \circ s^{-1}$ permet d'associer à un sous-groupoïde algébrique G_q de $J_q^*(Y)$ une relation d'équivalence algébrique $EG_q = \lambda^{-1} G_q$ sur $R_q(Y)$. Réciproquement, toute relation d'équivalence algébrique sur $R_q(Y)$ invariante sous l'action diagonale de Γ_q^n sur $R_q(Y) \times R_q(Y)$ se projette sur un sous-groupoïde algébrique de $J_q^*(Y)$.

Définition 4.1. — *Soit δ un champ de vecteurs sur Y s'écrivant en coordonnées locales $\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Ce champs se prolonge en un champ Γ_q^n-invariant sur $R_q(Y)$ noté δ^R et donné en coordonnées locales par $\sum_{i,\alpha} D^\alpha a_i \frac{\partial}{\partial y_i^\alpha}$. Ce prolongement est compatible avec le crochet de Lie.*

Soient G un groupoïde de Lie sur Y et S une sous-variété fermée de Y telle que G soit un sous-groupoïde de $J^*(Y - S)$. La définition de son algèbre de Lie se lit sur les repères de la manière suivante ([**15**] paragraphe 3.2.). Les champs de vecteurs formels solutions de $\mathcal{L}G$ sont les champs dont les prolongements sont tangents aux orbites de la relation d'équivalence EG_q au-dessus de $Y - S$ pout tout $q \in \mathbb{N}$. Autrement dit $\mathcal{L}G$ définit sur tout les espaces de repères un feuilletage algébrique Γ_q^n-invariant dont les feuilles sont les composantes irréductibles des orbites de EG_q. D'après [**6**], le corps des invariants rationnels de cette relation d'équivalence a un degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ égal à la codimension du feuilletage. Parmi les feuilletages algébriques Γ_q^n-invariant de $R_q(Y)$, ceux provenant de relation d'équivalence sont ceux vérifiant la condition précédente. Un théorème de X. Gomez-Mont [**8**] assure que cette condition est vérifiée lorsque toutes les feuilles sont algébriques.

Lemme 4.2. — *Soit $\varphi : Z \dashrightarrow Y$ une application dominante entre deux variétés algébriques affines lisses et irréductibles sur $\mathbb{C}$. Elle induit un morphisme de groupoïde*

$$\varphi_\star : \mathrm{Aut}(\varphi) \dashrightarrow J^*(Y).$$

Si H est $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Y, sa préimage par $\varphi_\star$ est un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Z noté $\varphi_\star^{-1} H$.

Démonstration. — Commençons par définir le morphisme d'anneau

$$\varphi^\# : \mathcal{O}_{J^*(Y)}(U \times \overline{U}) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Aut}(\varphi)}(V \times \overline{V})$$

définissant $\varphi_\star$ au-dessus d'un ouvert affine Zariski dense $V \times \overline{V}$ de $Z \times \overline{Z}$. Soient U et V des ouverts affines Zariski dense de Y et Z tels que

- $\varphi(U) = V$,
- U et V sont des revêtements non ramifiés de $\mathbb{A}^n$ et $\mathbb{A}^{n+m}$,
- ces revêtements conjuguent φ à la projection de $\mathbb{A}^{n+m}$ sur l'espace $\mathbb{A}^n$ des n premières coordonnées.

Notons $\overline{U}$ et $\overline{V}$ les mêmes ouverts sur les copies $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ de Y et Z. Nous appellerons y_i (resp. $\overline{y}_i$) les n coordonnées induites sur U et V (resp. $\overline{U}$ et $\overline{V}$) par $\mathbb{A}^n$ et t_j (resp. $\overline{t}_j$) des m coordonnées sur V (resp. $\overline{V}$) provenant de $\mathbb{A}^{n+m}$. L'anneaux des fonctions régulières de $J^*(Y)$ au-dessus de $U \times \overline{U}$ est

$$\mathcal{O}_{J^*(Y)}(U \times \overline{U}) = \mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{U}) \left[\, \overline{y}_i^\alpha \; |1 \leq i \leq n; \alpha \in \mathbb{N}^n; 0 < |\alpha| \right]$$

et l'anneau des fonctions régulières de $\mathrm{Aut}(\varphi)$ au-dessus de $V \times \overline{V}$ est

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Aut}(\varphi)}(V \times \overline{V}) = \mathcal{O}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{V})$$
$$\left[\, \overline{y}_i^\alpha, \overline{t}_j^{\,\beta} \; |1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-n; \alpha \in \mathbb{N}^n; \alpha \in \mathbb{N}^m; 0 < |\alpha|, |\beta| \right].$$

On définit l'application $\varphi^\#$ de $\mathcal{O}_{J^*(Y)}(U \times \overline{U})$ dans $\mathcal{O}_{\mathrm{Aut}(\varphi)}(V \times \overline{V})$ en étendant l'inclusion de $\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{U})$ dans $\mathcal{O}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{V})$ par l'identification des variables portant le même nom. Cette application est différentielle (*i.e.* commute aux connexions) et induit une application $\varphi_\star$ sur les difféomorphismes formels.

Vérifions que cette application est un morphisme de groupoïde. Dans notre situation, un morphisme de groupoïde est un couple d'applications

$$\phi_0 : V \to U$$
$$\phi : \mathrm{Aut}(\varphi)|_{V \times \overline{V}} \to J^*(Y)|_{U \times \overline{U}}$$

telles que $\mathit{source} \circ \phi = \phi_0 \circ \mathit{source}$, $\mathit{but} \circ \phi = \phi_0 \circ \mathit{but}$ et $\phi \circ c = c \circ (\phi \times \phi)$. Les notations *source* et *but* sont assez explicites, c designe la loi de composition $(J, \mathit{source}) \times_Z (J, \mathit{but}) \to J$ ainsi que les applications induites sur les sous variétes et leurs ouverts où cela a un sens et enfin $\phi \times \phi$ designe l'application de

$$\mathrm{Aut}(\varphi)|_{V \times \overline{V}} \times_{\overline{V}} \mathrm{Aut}(\varphi)|_{\overline{V} \times \overline{\overline{V}}} \to J^*(Y)|_{U \times \overline{U}} \times_{\overline{U}} J^*(Y)|_{\overline{U} \times \overline{\overline{U}}}$$

induite par ϕ et ϕ_0. Ces applications doivent être des morphismes de variétés algébriques. Nous noterons ϕ_0^* et ϕ^* les morphismes d'anneaux induits. Ils doivent vérifier les diagrammes duaux de ceux donnés ci-dessus. On vérifie aisement que le couple $\varphi^* : \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ et $\varphi^\#$ satisfont ces diagrammes.

On vérifie tout aussi facilement que l'image réciproque d'un sous-groupoïde H de $J^*(Y)|_{U \times \overline{U}}$ par $\varphi_\star$ est un groupoïde que nous appellerons $\varphi_\star^{-1} H$. □

Définition 4.3. — *Soient $\varphi : Z \dashrightarrow Y$ une application dominante entre deux variétés algébriques affines lisses et irréductibles sur $\mathbb{C}$ et $\varphi_\star : \mathrm{Aut}(\varphi) \dashrightarrow J^*(Y)$ l'application induite. Un groupoïde de Lie G sur Z inclus dans $\mathrm{Aut}(\varphi)$ est dit φ-projetable si $\overline{\varphi_\star(G)}$ est un groupoïde de Lie sur Y.*

Lemme 4.4. — *Soient $\varphi : Z \dashrightarrow Y$ une application dominante à fibres connexes et G un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Z contenu dans $\mathrm{Aut}(\varphi)$. Le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie G est φ-projetable.*

Le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie image sera noté $\varphi_\star G$. Pour tout $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie H sur Y, on a $\varphi_\star \varphi_\star^{-1} H = H$.

Démonstration. — Considérons un sous-$\mathcal{D}$-groupoïde de Lie G de $\mathrm{Aut}(\varphi)|_{V\times\overline{V}}$. Pour tout entier q on a un groupoïde algébrique G_q de $\mathrm{Aut}_q(\varphi)|_{V\times\overline{V}}$ et EG_q la relation d'équivalence correspondante sur $R_q(Z)$.

Notons $R_q(\varphi)$ l'espace des repères d'ordre q, $r : (\mathbb{C}^{\dim Z}, 0) \to Z$ conjuguant φ à la projection sur les $\dim Y$ premières coordonnées. La relation d'équivalence EG_q induit une relation d'équivalence sur $R_q(\varphi)$ que nous noterons encore EG_q.

Notons encore $T_q\varphi$ la distribution verticale du prolongement $\varphi^R : R_q(\varphi) \dashrightarrow R_q(Y)$. Les fibres de φ étant connexes, celles de φ^R le sont aussi. Ceci permet d'identifier $R_q(Y)$ au quotient de $R_q(\varphi)$ par les feuilles de la distribution $T_q\varphi$.

Soit $T(EG_q)$ la distribution tangente aux orbites de EG_q sur $R_q(\varphi)$. Elle est localement (en topologie transcendante) engendré par les prolongements de champs de vecteurs solutions de $\mathcal{L}G$. Ceux-ci préservant la fibration φ, la distribution $T(EG_q)+T_q\varphi$ est intégrable. Par construction, les feuilles de $T(EG_q) + T_q\varphi$ sont algébriques. Pour récuperer une relation d'équivalence sur $R_q(Y)$ qui soit la projection de EG_q, commençons par regarder le quotient générique de $R_q(\varphi)$ par EG_q suivant [**6**] :

$$\pi : R_q(\varphi) \dashrightarrow V.$$

La distribution $T(EG_q) + T_q\varphi$ se projette sur une distribution D sur V et l'image des feuilles de $T(EG_q) + T_q\varphi$ passant par une orbite de EG_q est la projection d'une feuille de $T_q\varphi$, c'est donc un ensemble connexe. D'après [**8**], la distribution D admet une intégrale première rationnelle $h : V \dashrightarrow W$ telle que pour w dans un ouvert Zariski dense de W, $h^{-1}(w)$ soit l'adhérence d'une feuille de D. Pour w dans un ouvert Zariski dense de W, la fibre $(h\circ\pi)^{-1}(w)$ est la réunion de feuilles de $T(EG_q) + T_q\varphi$ passant par une orbite de EG_q. Cette application étant constante sur les fibres de φ^R, elle se projette en une application $\underline{h} : R_q(Y) \to W$ décrivant la relation d'équivalence cherchée sur un ouvert Zariski dense de $R_q(Y)$.

Cette construction, pour des valeurs de q assez grandes, permet de définir le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie image $\varphi_\star G$. □

Lemme 4.5. — *Soient Z une variété algébrique affine lisse et irréductible sur $\mathbb{C}$, δ un champ de vecteurs sur Z et G un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Z inclus dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_\delta)$ tel que sa $\mathcal{D}$-algèbre de Lie $\mathcal{L}G$ contienne δ. Il existe un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie G^δ sur Z contenant G, dont la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie $\mathcal{L}G^\delta$ contient tous les champs colinéaires à δ et ne diffère de $\mathcal{L}G$ que par ceux-ci.*

Démonstration. — Nous allons construire la relation d'équivalence sur $R_q(Z)$ donnant G_q^δ à partir de la relation de G_q et du feuilletage donné par les prolongements des multiples de δ. Notons $T_q\delta$ la distribution engendrée par les champs $(f\delta)^R$ pour tout $f \in \mathcal{O}_Z$ sur $R_q(Z)$.

Commençons par montrer que la distribution $T_q\delta\cap\ker dt$ verticale pour la projection but $R_q(Z) \xrightarrow{t} Z$ a toutes ses feuilles algébriques. Fixons un point $p \in Z$ au voisinage duquel le champ δ est formellement redressable par $\widehat{\phi}$ sur le champ $\frac{\partial}{\partial z_1}$ de $\mathbb{A}^{\dim Z}$. Le changement de variables $\widehat{\phi}$ induit un isomorphisme algébrique ϕ^R entre la fibre de t

en p : $R_q(Z)_p$ et l'espace des repères d'ordre q en 0 sur $\mathbb{A}^{\dim Z}$: $R_q(\mathbb{A}^{\dim Z})_0$. Pour tout $f \in \mathcal{O}(\widehat{Z,p})$ on a

$$(\phi^R)^*\left((f\delta)^R|_p\right) = \left(f \circ \widehat{\phi}\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^R\Big|_0.$$

Les champs verticaux de $T_q\delta$ étant engendrés par ceux de la forme $(f\delta)^R - f\delta^R$, une feuille de $T_q\delta \cap \ker dt$ au-dessus de p a pour image par ϕ la sous-variété de $R_q(\mathbb{C}^{\dim Z})_0$ d'équation $z_i^\alpha = 0$ pour $2 \leq i \leq \dim Z$ et $1 \leq |\alpha| \leq q$. Elles sont donc bien algébriques.

Notons $T(EG_q)$ la distribution tangente aux orbites de EG_q. Comme le champ de vecteurs δ^R est tangent aux orbites de EG_q, la distribution $T(EG_q) + T_q\delta$ est engendrée par $T(EG_q)$ et $T_q\delta \cap \ker dt$. L'hypothèse $G \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_\delta)$ assure que cette distribution est involutive. Les feuilles des deux distributions $T(EG_q)$ et $T_q\delta\cap\ker dt$ étant algébriques, les feuilles de $T(EG_q)+T_q\delta$ le sont aussi. Le feuilletage ainsi construit est $\Gamma_q^{\dim Z}$-invariant et ses feuilles sont algébriques, il donne un sous-groupoïde de $J_q^*(Z)$. Ceci prouve le lemme. □

Lemme 4.6. — *Si $\varphi : (Z, \delta_Z) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$ est une application différentielle dominante entre variétés algébriques affines lisses et irréductibles sur $\mathbb{C}$ munies de champs de vecteurs alors* $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z) \cap \mathrm{Aut}(\varphi)$ *est φ-projetable et*

$$\varphi_\star\left(\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z) \cap \mathrm{Aut}(\varphi)\right) = \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y).$$

Démonstration. — Quitte à remplacer Z et Y par des ouverts, nous pouvons supposez que φ est un morphisme qui admet la factorisation de Stein [**9**] :

$$Z \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{Y} \xrightarrow{\pi} Y$$

où $\widetilde{\varphi}$ est un morphisme à fibres connexes et $\widetilde{Y}$ est étale sur Y.

Commençons par projeter $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z)$ suivant $\widetilde{\varphi}$. Le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\left[\widetilde{\varphi}_\star^{-1}\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}}) \cap \mathrm{Aut}(\mathcal{F}_Z)\right]^{\delta_Z}$ contient $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z)$. En prenant l'intersection avec $\mathrm{Aut}(\widetilde{\varphi})$, on obtient l'inclusion

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z) \cap \mathrm{Aut}(\widetilde{\varphi}) \subset \widetilde{\varphi}_\star^{-1}\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}}).$$

D'après le lemme 4.4, $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z)$ est $\widetilde{\varphi}$-projetable. En projetant suivant $\widetilde{\varphi}$ on obtient

$$\widetilde{\varphi}_\star\left(\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z) \cap \mathrm{Aut}(\widetilde{\varphi})\right) \subset \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}}).$$

Comme l'algèbre de Lie de $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z)$ contient tous les multiples $\widetilde{\varphi}$-projetables de δ_Z, celle de $\widetilde{\varphi}_\star\left(\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z) \cap \mathrm{Aut}(\widetilde{\varphi})\right)$ contient tous les multiples de $\delta_{\widetilde{Y}}$. La minimalité de $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$ pour cette propriété donne l'égalité

$$\widetilde{\varphi}_\star\left(\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z) \cap \mathrm{Aut}(\widetilde{\varphi})\right) = \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}}).$$

Occupons-nous maintenant de projeter $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$ sur $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y)$. Commençons par le cas où π est un revêtement galoisien. Le revêtement induit $\pi^R : R_q(\widetilde{Y}) \to R_q(Y)$ est aussi galoisien de même groupe. Notons $\widetilde{E}$ la relation d'équivalence sur $R_q(\widetilde{Y})$ données par $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$. D'après [**8**], il existe des fonctions rationnelles sur $R_q(\widetilde{Y})$ constantes sur les composantes connexes des orbites de $\widetilde{E}$ en dehors d'une hypersurface et séparant ces composantes connexes. Le champ $\delta^R_{\widetilde{Y}}$ étant tangent aux orbites de $\widetilde{E}$, il préserve ces fonctions. Par minimalité de $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$, presque toute orbite de $\widetilde{E}$ est connexe. Pour prouver que $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$ est π-projetable, il suffit de prouver que les images des orbites de $\widetilde{E}$ par π^R feuillettent $R_q(Y)$.

Le champ $\delta_{\widetilde{Y}}$ étant π-projetable, on a $g^*\delta_{\widetilde{Y}} = \delta_{\widetilde{Y}}$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\pi)$. On a donc l'égalité $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}}) = g^*\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$ pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\pi)$. Cette égalité implique que π^R envoie le feuilletage donné par les orbites de $\widetilde{E}$ sur un feuilletage de $R_q(Y)$. Ces feuilles sont algébriques et le feuilletage est Γ^n_q-invariant, ce sont donc les orbites d'une relation d'équivalence. Ceci implique que $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$ est π-projetable.

Le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\pi_\star^{-1}\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y)$ contient $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$, la projection suivant π prouve l'égalité

$$\pi_\star\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}}) = \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y).$$

Dans le cas où π n'est pas galoisien, on considère

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{\widetilde{Y}} \arrow[dl, "\widetilde{\pi}"'] \arrow[dd, "\widetilde{\widetilde{\pi}}"] \\
\widetilde{Y} \arrow[dr, "\pi"'] & \\
& Y
\end{tikzcd}$$

telle que $\widetilde{\widetilde{\pi}}$ et $\widetilde{\pi}$ soient galoisiens. Projetons $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{\widetilde{Y}}})$ suivant $\widetilde{\widetilde{\pi}}$ et $\widetilde{\pi}$. D'après ce que nous venons de montrer, les images sont respectivement $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y)$ et $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$. Le diagramme ci-dessus étant commutatif, on obtient l'égalité annoncée. □

Remarque 4.7. — 1°) *En tant qu'application rationelle entre pro-variétés algébriques, $\pi_\star$ de $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$ sur $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y)$ n'est pas un isomorphisme mais seulement une application finie.*

2°) *Ce type de résultat a été obtenu par H. Umemura dans le contexte du groupe de Galois infinitésimal d'une équation différentielle* ([**24**] *thm 5.14.*).

Corollaire 4.8. — *Soit $\pi : (\widetilde{Y}, \delta_{\widetilde{Y}}) \to (Y, \delta_Y)$ une application finie et différentielle entre variétés algébriques affines lisses et irréductibles sur $\mathbb{C}$ munies de champs de vecteurs. Soit p un point de $\widetilde{Y}$ tel que π soit étale, $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$ soit lisse en $\mathrm{id}(p)$ (le jet de l'identité en p) et $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Y)$ soit lisse en $\mathrm{id}(\pi(p))$. La projection des champs de vecteurs formels sur $\widehat{\widetilde{Y}, p}$ sur les champs de vecteurs formels sur $\widehat{Y, \pi(p)}$ donne un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbre de Lie entre $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})_p$ et $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Y)_{\pi(p)}$.*

Démonstration. — Si π est étale en p alors la projection des champs de vecteurs formels suivant π en p est un isomorphisme. De plus cet isomorphisme est exactement la différentielle de $\pi_\star$ en l'identité au point p : $\mathrm{id}(p) \in \mathrm{Gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})$. Il envoie donc $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_{\widetilde{Y}})_p$ sur $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Y)_{\pi(p)}$. □

5. Quelques rappels sur les algèbres de Lie de champs de vecteurs

Nous aurons besoin dans la preuve du théorème d'irréductibilité de quelques faits sur les algèbres de Lie de champs de vecteurs. L'algèbre des champs formels sur $\widehat{\mathbb{C}^n,0}$ sera noté χ^n et l'espace des champs s'annulant à l'ordre k sera χ^n_k. Pour une algèbre de Lie de champs de vecteurs formels A, on notera $A_k = A \cap \chi^n_k$ la filtration induite.

Définition 5.1. — *Soit A un algèbre de Lie de champs formels. La croissance de A est la suite d'entier $n_k(A) = \dim_{\mathbb{C}} A/A_k$. Le plus petit entier p tel que la suite $\frac{n_k(A)}{k^p}$ soit bornée est le type de l'algèbre A.*

Une algèbre de type 0 sera aussi appelée de type fini, celles de types 1 seront dites de type linéaire etc ...

Définition 5.2. — *Soient A une algèbre de Lie de champs formels et $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q régulier A-invariant de $\widehat{\mathbb{C}^n,0}$. L'algèbre quotient $A/(\mathcal{F} \cap A)$ est une algèbre de Lie de champs formels sur l'espace quotient $\widehat{\mathbb{C}^n,0}/\mathcal{F} = \widehat{\mathbb{C}^q,0}$.*

Exemple 5.3. — *Soit γ une 2-forme fermée régulière sur $\widehat{\mathbb{C}^3,0}$. On note $\mathfrak{inv}(\gamma)$ l'algèbre de Lie des champs préservant γ (i.e. X tel que $L_X\gamma = 0$) et $\mathcal{F}_\gamma$ le feuilletage donné par les champs X tels que $\iota_X\gamma = 0$. On a l'inclusion $\mathcal{F}_\gamma \subset \mathfrak{inv}(\gamma)$ et l'algèbre quotient $\mathfrak{inv}(\gamma)/\mathcal{F}_\gamma$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\widehat{\mathbb{C}^2,0}$ préservant une 2-forme $\underline{\gamma}$.*

Cette algèbre de Lie est simple, on en déduit que les idéaux de $\mathfrak{inv}(\gamma)$ sont inclus dans $\mathcal{F}_\gamma$

On obtient facilement les lemmes suivants.

Lemmes 5.4. — 1°) *Si $B \subset A$ sont deux algèbres de Lie de champs formels, le type de B est inférieur ou égal au type de A.*

2°) *Si $\pi : \widehat{\mathbb{C}^n,0} \to \widehat{\mathbb{C}^p,0}$ est une surjection induisant un morphisme surjectif d'algèbres de Lie entre $A \subset \chi^n$ et $B \subset \chi^p$ alors le type de B est inférieur ou égal au type de A.*

Exemple 5.5. — *Soit $\mathfrak{inv}(\Theta)$ l'algèbre des champs formels préservant une matrice de formes Θ vérifiant $d\Theta = \Theta \wedge \Theta$. Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage définie par Θ que nous supposerons régulier et de codimension q. En passant au quotient par $\mathcal{F}$, on obtient l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels sur $\widehat{\mathbb{C}^q,0}$ préservant au moins un co-parallélisme donné par certains coefficients de Θ. Ce type d'algèbre est de type fini* [**10**].

Exemple 5.6. — *Soient h et k des coordonnées sur $\widehat{\mathbb{C}^2,0}$. L'algèbre* $\mathfrak{inv}(dh\wedge dk)$ *des champs formelles préservant cette forme est l'ensemble des champs formels de divergence nulle, son type est quadratique.*

6. Irréductibilité de la première équation de Painlevé

Théorème 6.1. — *Soit $(Z,\delta_Z) \dashrightarrow (\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x})$ une extention différentielle de degré de transcendance 2. Si il existe une 2-forme fermée γ sur Z telle que* $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_Z) = Inv(\gamma)$ *alors aucune application différentielle d'une extension réductrice de la droite affine dans Z n'est dominante.*

Autrement dit, si une trajectoire de δ_Z est réductible (i.e. a ses coordonnées dans une extension réductrice de $\mathbb{C}$) alors elle est algébrique ou appartient à une hypersurface δ_Z-invariante de Z.

Démonstration. — Supposons qu'il existe

$$(Y_m,\delta_m) \overset{\pi^m_{m-1}}{\dashrightarrow} (Y_{m-1},\delta_{m-1}) \overset{\pi^{m-1}_{m-2}}{\dashrightarrow} \dots \overset{\pi^2_1}{\dashrightarrow} (Y_1,\delta_1) \overset{\pi^1_0}{\dashrightarrow} (\mathbb{A}_1, \frac{\partial}{\partial x})$$

une extension réductrice de la droite affine et $\varphi : (Y_m,\delta_m) \dashrightarrow (Z,\delta_Z)$ une application différentielle dominante. Nous noterons π^m_i l'application de Y_m dans Y_i obtenue en composant les applications précédentes et $\mathcal{F}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_m$ les feuilletages sur Y_m obtenus en ramenant ceux de Y_i *i.e.* $\mathcal{F}_i = (\pi^m_i)^*\mathcal{F}_{Y_m}$. Soient U un ouvert Zariski dense de Y_m sur lequel $\mathrm{Gal}(\mathcal{F}_m)$ est un groupoïde et p un point de Y_m où les feuilletages sont réguliers et les projections régulières. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur Y_m, nous noterons $\mathfrak{gal}(\mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs formels en p solutions de $\mathcal{L}\mathrm{Gal}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ l'algèbre des champs formels en p tangents au feuilletage et $\mathfrak{gal}(\mathcal{F})_\varphi$ l'algèbre $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{aut}(\varphi)$.

L'absence d'intégrale première pour $\mathcal{F}_Z$ et le lemme 4.6 assurent que la projection $\widehat{\varphi} : \widehat{Y_m,p} \to \widehat{Z,\varphi(p)}$ est surjective et induit un morphisme d'algèbre de Lie $\widehat{\varphi}_\star$: $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi \to \mathfrak{aut}(\mathcal{F}_Z)$ dont l'image est $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Z)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{m-1} = \mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi \cap \mathcal{F}_1$ est un idéal de $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi$ contenant δ_{Y_m} . Son image est donc un idéal de $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Z)$ contenant δ_Z. Le passage au quotient donne un morphisme surjectif

$$\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi/\mathfrak{h}_{m-1} \to \mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Z)/\widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-1}).$$

Le type de $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Z)/\widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-1})$ doit être inférieur à celui de $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi/\mathfrak{h}_{m-1}$, il est donc au plus linéaire. L'algèbre de Lie $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Z)/\mathcal{F}_Z$ étant de type quadratique et simple, on a $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Z) = \widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-1})$.

Considérons maintenant Z_{m-1} la feuille formelle de $\mathcal{F}_1$ passant par p. On a une application que nous appellerons encore $\widehat{\varphi} : Z_{m-1} \to \widehat{\mathbb{C}^3,\varphi(p)}$, surjective d'après les résultats précédents, donnée par le morphisme surjectif $\widehat{\varphi}_\star : \mathfrak{h}_{m-1} \to \mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Z)$ d'algèbre de Lie. Notons $\mathfrak{h}_{m-2}$ l'idéal $\mathfrak{h}_{m-1}\cap\mathcal{F}_2$ de $\mathfrak{h}_{m-1}$. Le raisonnement précédent implique que $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Z) = \widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-2})$.

Par induction on en déduit que $\mathcal{F}_Z = \widehat{\varphi}_\star(\mathcal{F}_m)$ devrait être égale à $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_Z)$ ce qui n'est pas vrai. L'application ne peut donc pas être dominante. □

La première équation de Painlevé est modélisé par le champ de vecteurs sur $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$:

$$\delta_P = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + x)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Théorème 6.2. — *La première équation de Painlevé est irréductible au sens de Nishioka-Umemura.*

Le théorème 6.1 réduit la preuve du théorème ci-dessus au lemme suivant.

***Lemme 6.3* (Painlevé [17]).** — *Une application différentielle à valeurs dans $(\mathbb{C}^3, \delta_P)$ est dominante.*

Vocabulaire mis à part, ce lemme est classique. Il affirme qu'aucune solution de la première équation de Painlevé n'est algébrique [**17, 22**] et qu'il n'existe pas d'hypersurface de $\mathbb{A}^3$ invariante sous δ_P [**17, 3**]. Ce dernier résultat admet une version plus générale appelée lemme de Kolchin-Kovacic [**11, 16, 22**].

Références

[1] É. Cartan – Sur la structure des groupes infinis de transformation, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **22** (1905), p. 219–308.

[2] ______, Les sous-groupes des groupes continus de transformations, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **25** (1908), p. 57–194.

[3] G. Casale – Le groupoïde de Galois de P_1 et son irréductibilité, *Comment. Math. Helv.* **83** (2008), p. 471–519.

[4] J. Drach – Essai sur la théorie générale de l'itération et sur la classification des transcendantes, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **15** (1898), p. 243–384.

[5] ______, Sur le groupe de rationalité des équations du second ordre de M. Painlevé, *Bull. Sci. Math.* **39** (1915), p. 149–166.

[6] P. Gabriel – Construction de préshémas quotients, in *Schémas en groupes (SGA 63-64), fasc. 2a*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 151, Springer, 1970, p. 250–283.

[7] C. Godbillon – *Feuilletages. Études géométriques*, Progress in Mathematics, vol. 98, Birkhäuser, 1991.

[8] X. Gómez-Mont – Integrals for holomorphic foliations with singularities having all leaves compact, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **39** (1989), p. 451–458.

[9] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Springer, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[10] S. Kobayashi – *Transformation groups in differential geometry*, Classics in Mathematics, Springer, 1995, Reprint of the 1972 edition.

[11] E. Kolchin – *Selected works of Ellis Kolchin with commentary*, American Mathematical Society, 1999, edited and with a preface by Hyman Bass, Buium and Cassidy.

[12] S. Lie – Theorie der Transformationsgruppen I, *Math. Ann.* **16** (1880), p. 441–528.

[13] K. Mackenzie – *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 124, Cambridge University Press, 1987.

[14] B. Malgrange – La variété caractéristique d'un système différentiel analytique, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), p. 491–518.

[15] ———, Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, in *Essays on geometry and related topics, Vol. 1, 2*, Monogr. Enseign. Math., vol. 38, Enseignement Math., 2001, p. 465–501.

[16] K. NISHIOKA – A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent, *Nagoya Math. J.* **109** (1988), p. 63–67.

[17] P. PAINLEVÉ – Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, *Bull. Soc. Math. France* **28** (1900), p. 201–261.

[18] ———, Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation $y_{xx} = 6y^2 + x$, *C. R. Acad. Sci. Paris* **135** (1902), p. 641–647.

[19] ———, Leçons de Stokholm, in *Œuvres complètes*, vol. 1, Éditions du CNRS, 1972.

[20] J. F. RITT – *Differential Algebra*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIII, American Mathematical Society, 1950.

[21] M.-H. SAITO & H. TERAJIMA – Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equations, *J. Math. Kyoto Univ.* **44** (2004), p. 529–568.

[22] H. UMEMURA – On the irreducibility of the first differential equation of Painlevé, in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II*, Kinokuniya, 1988, p. 771–789.

[23] ———, Second proof of the irreducibility of the first differential equation of Painlevé, *Nagoya Math. J.* **117** (1990), p. 125–171.

[24] ———, Differential Galois theory of infinite dimension, *Nagoya Math. J.* **144** (1996), p. 59–135.

[25] ———, Galois theory of algebraic and differential equations, *Nagoya Math. J.* **144** (1996), p. 1–58.

[26] E. VESSIOT – Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **21** (1904), p. 9–85.

[27] ———, Sur la réductibilité et l'intégration des systèmes complets, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **29** (1912), p. 209–278.

G. CASALE, IRMAR Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France
E-mail : guy.casale@univ-rennes1.fr