SAAD BAAJ

Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz

Astérisque, tome 232 (1995), p. 11-48

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1995__232__11_0>

REPRESENTATION REGULIERE DU GROUPE QUANTIQUE DES DEPLACEMENTS DE WORONOWICZ

Saad Baaj

Introduction

Soit H un espace de Hilbert. Un unitaire V qui agit dans $H \otimes H$ est dit multiplicatif s'il vérifie la relation pentagonale $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$. Un unitaire multiplicatif V est dit régulier [4] si l'adhérence normique $\overline{\mathcal{C}(V)}$ de la sous-algèbre $\mathcal{C}(V) = \{(id \otimes \omega)(\Sigma V) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ de $\mathcal{L}(H)$ où Σ est la volte, coincide avec la C*-algèbre des opérateurs compacts $\mathcal{K}$ dans H ; il est dit irréductible [4] s'il existe un unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant les conditions :

a) $U^2 = 1$ et $(\Sigma(1 \otimes U)V)^3 = 1$

b) l'unitaire $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ est multiplicatif.

Dans [4], en collaboration avec G.Skandalis, nous avons associé à tout unitaire multiplicatif régulier V, deux C*-algèbres de Hopf $(S_V, \widehat{S_V})$ en dualité, généralisant ainsi le cas des C*-algèbres de Hopf $(C_0(G), C^*_{red}(G))$ associées à un groupe localement compact G. Comme nous l'avons annoncé dans [4], l'hypothèse de régularité, qui correspond en fait à la dualité de Takesaki-Takai pour les produits croisés de C*-algèbres, n'est pas toujours vérifiée. Citons l'exemple suivant qui sera développé ailleurs [5]. Soit G un groupe localement compact, à tout couple (G_1, G_2) de sous-groupes fermés de G, d'intersection triviale et tel que l'ensemble G_1G_2 soit un ouvert dense dans G, on peut associer, comme [4] dans le cas $G = G_1G_2$, un unitaire multiplicatif V qui correspond au biproduit croisé de [17]. Dans ce cas, l'algèbre $\overline{\mathcal{C}(V)}$ est le produit croisé $C_0(G) \rtimes_{red} (G_1 \times G_2)$ où le sous-groupe G_1 (resp. G_2) agit par translation à droite (resp. à gauche) dans G. Remarquons que la C*-algèbre $C_0(G) \rtimes_{red} (G_1 \times G_2)$ contient la C*-algèbre des opérateurs compacts. Cependant, si $G \neq G_1G_2$, cette C*-algèbre admet plus d'une représentation et donc, dans ce cas, l'inclusion $\mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{C}(V)}$ est stricte. Notons cependant que l'unitaire multiplicatif V est irréductible.

Dans cet article, nous dégageons deux conditions plus faibles que les conditions de régularité et d'irréductibilité de [4], qui nous permettent de realiser les constructions de [4] et d'obtenir la plupart de ses résultats. La première condition que nous avons appelée "semi-régularité", revient à demander que l'adhérence normique de $\mathcal{C}(V)$ contienne la C*-algèbre des opérateurs compacts. Une conséquence de cette hypothèse est que $\overline{\mathcal{C}(V)}$ est auto-adjointe et donc par la preuve de (cf. [4] 3.5), l'algèbre réduite S_V et l'algèbre réduite duale $\widehat{S_V}$ sont également auto-adjointes. D'autrepart, nous disons que l'unitaire multiplicatif V est "équilibré" s'il existe un unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que $U^2 = 1$ et que l'unitaire $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ soit multiplicatif.

Si V est un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier, i.e V et $\widehat{V}$ semi-réguliers, nous montrons (paragraphe 3) que les C*-algèbres S_V et $\widehat{S_V}$ peuvent être munies de structures de C*-algèbres de Hopf bisimplifiables naturelles. Nous montrons également que les constructions et les résultats de ([4] appendice) restent valables dans ce cadre. En particulier, si W est l'unitaire multiplicatif associé à une représentation covariante (cf. [4] appendice) d'un unitaire multiplicatif V satisfaisant aux conditions précédentes, l'algèbre réduite S_W (resp. l'algèbre réduite duale $\widehat{S_W}$), munie du coproduit $\delta(x) = W(x \otimes 1)W^*$ (resp. $\widehat{\delta}(x) = W^*(1 \otimes x)W$) est une C*-algèbre de Hopf isomorphe à la C*-algèbre de Hopf S_V (resp. $\widehat{S_V}$).

Notons que dans le cas non régulier, on ne peut espérer obtenir la dualité de Takesaki-Takai pour les produits croisés de C*-algèbres. Cependant, comme l'hypothèse de semi-régularité implique la "régularité au sens faible", i.e l'adhérence faible de la sous-algèbre $\mathcal{C}(V)$ coincide avec $\mathcal{L}(H)$, la méthode de [11] s'adapte dans le cadre des unitaires multiplicatifs irréductibles semi-biréguliers pour établir la dualité de Takesaki pour les produits croisés d'algèbres de von Neumann.

Dans le paragraphe 4, nous étudions un exemple important d'unitaire multiplicatif irréductible, semi-birégulier mais non régulier : la représentation régulière du groupe quantique [25,26] des déplacements $E_\mu(2)$ de Woronowicz. Rappelons qu'étant donné un nombre réel $\mu > 1$, la C*-algèbre de Hopf (A, δ) des "fonctions continues sur $E_\mu(2)$ tendant vers 0 à l'infini" est [25] le produit croisé $A = C_0(\mathbf{C}_\mu) \rtimes_\alpha \mathbf{Z}$ où $\mathbf{C}_\mu = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \in \mu^{\mathbf{Z}}\} \cup \{0\}$, pour l'action définie par $\alpha(f)(\zeta) = f(\mu^{-1}\zeta)$. Il est facile de deviner [3] une mesure positive ν sur l'espace $\mathbf{C}_\mu$ telle que le poids dual ([15], [22]) correspondant Φ soit une mesure de Haar pour $E_\mu(2)$. La preuve de l'invariance à gauche et à droite de cette mesure de Haar est alors basée sur l'expression de ce poids Φ comme une somme de formes positives sur A et sur le calcul du produit de convolution de ces formes.

Comme nous le montrons dans un cadre assez général au paragraphe 2, à toute C*-algèbre de Hopf munie d'une mesure de Haar, nous associons une isométrie pentagonale qui correspond dans le cas des groupes à la représentation régulière. Dans le cas du groupe quantique $E_\mu(2)$, l'isométrie V obtenue est un unitaire multiplicatif semi-régulier mais non régulier. Comme on peut s'y attendre dans une "situation avec mesure de Haar", la représentation régulière V est irréductible. Nous montrons que la C*-algèbre de Hopf réduite (S_V, δ_V) coincide avec (A, δ) et que la C*-algèbre de Hopf réduite duale $\widehat{S_V}$ munie du coproduit opposé est isomorphe à la C*-algèbre de Hopf [26] des "fonctions continues sur le dual de Pontrjagyn $\widehat{E_\mu(2)}$ tendant vers 0 à l'infini" au sens de Woronowicz.

Par les résultats du paragraphe 3 et la moyennabilité de $E_\mu(2)$ et de $\widehat{E_\mu(2)}$, nous savons que les représentations (resp. coreprésentations) de V sont les représentations de la C*-algèbre $\widehat{S_V}$ (resp. S_V). S'appuyant sur la description (théorème 4.10) de l'unitaire multiplicatif V comme multiplicateur de la C*-algèbre $\widehat{S_V} \otimes S_V$, on peut déduire la description [26] des représentations du groupe quantique $E_\mu(2)$ donné par Woronowicz.

Une autre conséquence de la moyennabilité de $E_\mu(2)$ est que le produit croisé réduit $S_V \rtimes \widehat{S_V}$ coincide avec le produit croisé "max". Il s'ensuit que les représentations de la C*-algèbre $B = S_V \rtimes \widehat{S_V}$ coincident avec les représentatons covariantes [4] de l'unitaire multiplicatif V. Nous montrons que la C*-algèbre B est une extension des opérateurs compacts par les compacts. Il en résulte que V n'admet que deux représentations covariantes : la représentation régulière et une deuxième que nous décrivons.

Nous terminons le paragraphe 4 par le calcul des mesures de Haar duales et de leur théorie modulaire. Pour déduire les mesures de Haar duales à partir de la mesure de Haar Φ, on peut procéder comme dans le cas classique des algèbres de Kac ([12], [13], [16], [24]), i.e construire des algèbres hilbertiennes à gauche et montrer que les poids correspondants ([8], [22]) vérifient les propriétés d'invariance voulues. Pour garder à cet article une longueur raisonnable, nous avons préféré procéder directement en donnant les formes positives sur $\widehat{S_V}$ qui permettent d'exprimer les mesures de Haar duales comme somme de formes positives; le calcul de leur produit de convolution permet alors comme dans le cas de Φ, de montrer les propriétés d'invariance . Nous montrons ensuite que les théories modulaires de Φ et des mesures de Haar duales $\widehat{\Phi}$ et $\widehat{\Psi}$ vérifient la conjecture de ([21] paragraphe 6.).

S'appuyant sur une conséquence du formulaire de [21], nous montrons que le poids $\Phi \otimes \widehat{\Phi}$ est une mesure de Haar invariante à gauche et à droite sur le double quantique ([4], [28]) de $E_\mu(2)$. Procédant comme dans le cas classique, on peut déduire dans ce cas les mesures de Haar duales et montrer que leur théorie modulaire satisfait le formulaire de [21].

Enfin, dans une première appendice, nous rassemblons les propriétés que nous avons utilisées dans le paragraphe 4, des coefficients de Fourier $(A(m,n))_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2}$ de la suite de fonctions notée $(U(m,.))_{m\in\mathbf{Z}}$ introduite par Woronowicz dans [25]. Dans une seconde appendice, nous complétons la preuve du théorème 4.2 et nous montrons l'unicité de la mesure de Haar de $E_\mu(2)$.

Durant l'élaboration de cet article, j'ai bénéficié de nombreuses et fructueuses discussions avec G.Skandalis sur ce sujet ; je l'en remercie très sincèrement.

1. Préliminaires

Dans ce paragraphe, nous fixons les notations constamment utilisées dans la suite et nous rappelons quelques définitions.

Soit E un espace de Banach et $X \subset E$ un sous-ensemble de E. Nous notons $\overline{X}$ l'adhérence de X dans E et nous désignons par $\overline{lin}\, X$ l'espace vectoriel fermé engendré par X dans E.

Tous les produits tensoriels de C*-algèbres, sauf mention expresse du contraire, sont supposés munis de la norme spatiale (produits tensoriels "min").

Soit A une C*-algèbre, nous notons $\widetilde{A}$ la C*-algèbre obtenue à partir de A par adjonction d'un élément unité et $M(A)$ la C*-algèbre des multiplicateurs [18] de A. Si J est un idéal bilatère fermé de A, on pose $M(A, J) = \{m \in M(A) \ / \ mA + Am \subset J\}$.

Un homomorphisme de C*-algèbres $\pi : A \to M(B)$ est dit non dégénéré si, pour une unité approchée (e_i) de A, $\pi(e_i) \to 1$ pour la topologie stricte.

1.1. DÉFINITION. — *(cf. [4]) Une C*-algèbre de Hopf est un couple (A, δ) où A est une C*-algèbre et $\delta : A \to M(\tilde{A} \otimes A + A \otimes \tilde{A}; A \otimes A)$ est un homomorphisme non dégénéré, appelé le coproduit de A, vérifiant $(id \otimes \delta)\delta = (\delta \otimes id)\delta$. Une C*-algèbre de Hopf est dite bisimplifiable si on a $A \otimes A = \overline{lin}\ \delta(A)(1 \otimes A) = \overline{lin}\ \delta(A)(A \otimes 1)$.*

Soit H un espace de Hibert, si $T \in \mathcal{L}(H \otimes H)$, on définit $T_{12}, T_{13}, T_{23} \in \mathcal{L}(H \otimes H \otimes H)$ comme dans [4]. On note $\Sigma \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ la volte donnée par $\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$ et on pose $T_{21} = \Sigma T \Sigma$.

Pour $T \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on définit les opérateurs $(id \otimes \omega)(T)$ et $(\omega \otimes id)(T)$ par les formules :

$$(\xi \mid (id \otimes \omega)(T)\eta) = \omega(\theta_\xi^* T \theta_\eta) \quad , \quad (\xi \mid (\omega \otimes id)(T)\eta) = \omega(\theta'^*_\xi T \theta'_\eta)$$

où $\theta_\xi, \theta'_\eta \in \mathcal{L}(H, H \otimes H)$ sont définies par $\theta_\xi(\eta) = \theta'_\eta(\xi) = \xi \otimes \eta$.

1.2. DÉFINITION. — *(cf. [4]) Un unitaire $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ est dit multiplicatif s'il vérifie la relation pentagonale :*

$$V_{12} V_{13} V_{23} = V_{23} V_{12}$$

Si $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ est un unitaire multiplicatif et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on pose $L(\omega) = (\omega \otimes id)(V)$ et $\rho(\omega) = (id \otimes \omega)(V)$. L'algèbre réduite [4] (resp. l'algèbre réduite duale) S_V (resp. $\widehat{S_V}$) de V est par définition l'adhérence normique dans $\mathcal{L}(H)$ de la sous-algèbre $A(V) = \{L(\omega) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ (resp. $\widehat{A}(V) = \{\rho(\omega) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$). Quand aucune confusion n'est possible, on note simplement S et $\widehat{S}$ ces algèbres.

Une représentation [4] (resp. coreprésentation) de V dans l'espace de Hilbert K est un unitaire $X \in \mathcal{L}(K \otimes H)$ (resp. $X \in \mathcal{L}(H \otimes K)$) vérifiant la relation $X_{12} X_{13} V_{23} = V_{23} X_{12}$ (resp. $V_{12} X_{13} X_{23} = X_{23} V_{12}$). Dans ce cas, pour tout $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on pose $\rho_X(\omega) = (id \otimes \omega)(X)$ (resp. $L_X(\omega) = (\omega \otimes id)(X)$) ; l'espace vectoriel $\widehat{A_X} = \{\rho_X(\omega) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ (resp. $A_X = \{L_X(\omega) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$) est une sous-algèbre ([4] A.3) de $\mathcal{L}(K)$; on note alors $\widehat{S_X}$ (resp. S_X) son adhérence normique dans $\mathcal{L}(K)$.

Une représentation covariante ([4] appendice) de V dans un espace de Hilbert K est un couple (X, Y) où X est une représentation et Y est une coreprésentation de V dans le même espace de Hilbert K vérifiant la relation de covariance $Y_{12} V_{13} X_{23} = X_{23} Y_{12}$.

2. Mesure de Haar sur une C*-algèbre de Hopf

Dans ce paragraphe, nous associons à toute C*-algèbre de Hopf munie d'une mesure de Haar, une isométrie pentagonale qui correspond dans le cas des groupes à la représentation régulière. Notons que notre définition d'une mesure de Haar est moins restrictive que celle de [14]. Auparavant, nous rappelons quelques notations et résultats de la théorie [7] des poids sur une C*-algèbre.

Un poids [7] Φ sur une C*-algèbre A est une application de A_+ dans $[0,\infty]$ telle que $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ pour $x, y \in A_+$ et $\Phi(\lambda x) = \lambda\Phi(x)$ pour $\lambda \geq 0$ et $x \in A_+$. Un poids Φ est dit semi-fini (normiquement) si le sous -espace vectoriel :

$$\mathfrak{M}_\Phi = \{x_1 - x_2 + i(x_3 - x_4)\ ,\ x_j \in A_+\ ,\ \Phi(x_j) < \infty\} = \mathfrak{N}_\Phi^* \mathfrak{N}_\Phi$$

où $\mathfrak{N}_\Phi = \{x \in A / \Phi(x^*x) < \infty\}$, est dense dans A.

Si Φ est un poids sur une C*-algèbre A, sa représentation [9] GNS $(\Lambda_\Phi, H_\Phi, \pi_\Phi)$ est définie de la façon suivante. L'idéal à gauche $\mathfrak{N}_\Phi$ de A, muni du produit scalaire $(x \mid y) = \Phi(x^*y)$, est un espace préhilbertien. Soient H_Φ le séparé complété de cet espace préhilbertien et Λ_Φ l'application canonique de $\mathfrak{N}_\Phi$ dans H_Φ ; posant $\pi_\Phi(a)(\Lambda_\Phi(x)) = \Lambda_\Phi(ax)$ pour $a \in A$ et $x \in \mathfrak{N}_\Phi$, on obtient une représentation π_Φ de la C*-algèbre A dans l'espace de Hilbert H_Φ.

Si Φ est un poids normal semi-fini fidèle sur une algèbre de von Neumann M, on note [22] σ_t^Φ le groupe d'automorphismes modulaires de M associé.

Soit Φ est un poids s.c.i et semi-fini sur une C*-algèbre A, alors [9] la représentation π_Φ est non dégénérée et [7,9] Φ admet un prolongement canonique noté $\bar{\Phi}$, à l'algèbre de von Neumann $M = \pi_\Phi(A)''$, donné par :

$$\bar{\Phi}(x) = \sup\{f(x)\ ,\ f \in M_*^+\ ,\ f \circ \pi_\Phi \leq \Phi\}$$

$\bar{\Phi}$ est donc un poids normal semi-fini (pour la topologie ultrafaible) sur M vérifiant $\bar{\Phi} \circ \pi_\Phi = \Phi$. D'aprés [1], on a également pour tout $x \in M_+$:

$$\bar{\Phi}(x) = \inf\{l \ /\ \text{il existe } a_i \in A \ \text{ t.q } \pi_\Phi(a_i) \to x \text{ (ultrafort) et } \Phi(a_i) \to l\}$$

Soient Φ, Ψ des poids s.c.i et semi-finis sur une C*-algèbre A, alors le produit tensoriel $\Phi \otimes \Psi$ des poids Φ et Ψ est le poids s.c.i et semi-fini sùr $A \otimes A$ défini par $\Phi \otimes \Psi = (\bar{\Phi} \otimes \bar{\Psi}) \circ (\pi_\Phi \otimes \pi_\Psi)$, où $\bar{\Phi} \otimes \bar{\Psi}$ désigne le produit tensoriel des poids normaux [22] sur le produit tensoriel d'algèbres de von Neumann.

2.1. LEMME. — *(cf. [9], [14]) Soient M une algèbre de von Neumann, B une sous-C*-algèbre de M faiblement dense dans M et Φ un poids normal, semi-fini ultrafaiblement et fidèle sur M. Posons $\phi = \Phi | B^+$ et supposons que ϕ soit normiquement semi-fini. Notons H_Φ (resp. H_ϕ) l'espace de la représentation GNS du poids Φ (resp. ϕ). Si le groupe à un paramètre d'automorphismes modulaires (σ_t^Φ) laisse B invariante et* *définit par restriction, un groupe à un paramètre d'automorphismes normiquement continu de la C^*-algèbre B, alors l'isométrie $U : H_\phi \to H_\Phi$ définie par $U\,\Lambda_\phi x = \Lambda_\Phi x$ est un unitaire qui entrelace les représentations π_ϕ et $\pi_\Phi|B$ de B.*

Démonstration. Soit (u_j) une suite généralisée dans $\mathfrak{M}_\phi^+$ normiquement bornée telle que $u_j \to 1$ fortement. Posons $v_j = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int e^{-t^2}\, \sigma_t^\Phi(u_j)\, dt$. On a $v_j \in \mathfrak{M}_\phi^+$ et [22] pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a $\sigma_z^\Phi(v_j) \to 1$ pour la topologie *-forte. Pour tout $y \in \mathfrak{N}_\Phi$, on a :

$$\Lambda_\Phi\, y v_j = J_\Phi \pi_\Phi(\sigma^\Phi_{-\frac{i}{2}}(v_j)) J_\Phi\, \Lambda_\Phi\, y \to \Lambda_\Phi\, y$$

Soit alors (b_k) une suite généralisée dans B qui converge fortement vers y, comme $b_k v_j \in \mathfrak{N}_\phi$ pour tout k et tout j, le vecteur $\Lambda_\Phi\, y$ est dans l'image de l'isométrie U. ∎

Soit A une C*-algèbre et soit Ψ un poids s.c.i et semi-fini sur A, supposons que le prolongement canonique $\bar\Psi$ de Ψ à l'algèbre de von Neumann $M = \pi_\Psi(A)''$ soit fidèle et que le groupe d'automorphismes modulaires $(\sigma_t^{\bar\Psi})$ laisse la C*-algèbre $B = \pi_\Psi(A)$ invariante et définit par restriction, un groupe d'automorphismes de B normiquement continu, alors d'aprés le lemme précédent, l'isométrie $U : H_\Psi \to H_{\bar\Psi}$ définie par $U\Lambda_\Psi\, y = \Lambda_{\bar\Psi}\, \pi_\Psi(y)$ est un unitaire qui entrelace les représentations π_Ψ et $\pi_{\bar\Psi} \circ \pi_\Psi$. De même, il résulte de (2.1) que l'isométrie naturelle $U : H_\Psi \otimes H_\Psi \to H_{\Psi\otimes\Psi}$ définie par $U(\Lambda_\Psi\, x \otimes \Lambda_\Psi\, y) = \Lambda_{\Psi\otimes\Psi}\,(x \otimes y)$ est un unitaire. On identifie également l'espace de Hilbert $H_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}$ au produit tensoriel $H_\Psi \otimes H_\Psi \otimes H_\Psi$...

2.2. DÉFINITION. — *On appelle mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur une C^*-algèbre de Hopf (A, δ), un poids $\Phi : A_+ \to [0, \infty]$ s.c.i et semi-fini vérifiant :*
a) $\bar\Phi$ est fidèle sur l'algèbre de von Neumann $M = \pi_\Phi(A)''$.
b) $\sigma_t^{\bar\Phi}(\pi_\Phi(A)) = \pi_\Phi(A)$ et pour tout $a \in A$ la fonction $t \to \sigma_t^{\bar\Phi}(\pi_\Phi(a))$ est continue normiquement.
c) Pour tout $a \in A_+$ et toute forme positive f sur A, on a $\Phi(a * f) = \|f\|\Phi(a)$ (resp. $\Phi(f * a) = \|f\|\Phi(a)$).

Rappelons que si (A, δ) est une C*-algèbre de Hopf, $a \in A$, $f, f' \in A^*$, on pose :

$$a * f = (f \otimes id)(\delta(a))\ ,\ f * a = (id \otimes f)(\delta(a))\ ,\ f * f' = (f \otimes f') \circ \delta$$

2.3. PROPOSITION. — *Soit (A, δ) une C^*-algèbre de Hopf munie d'une mesure de Haar à droite Ψ.*
a) Pour tout $x, y \in \mathfrak{N}_\Psi$, on a $(\Psi \otimes \Psi)((1 \otimes y^*)\delta(x^*x)(1 \otimes y)) = \Psi(x^*x)\Psi(y^*y)$.
b) Pour tout $a \in \mathfrak{N}_{\Psi\otimes\Psi}$ et tout $y \in \mathfrak{N}_\Psi$, on a $(\Psi \otimes \Psi \otimes \Psi)((1 \otimes 1 \otimes y^*)(id \otimes \delta)(a^*a)(1 \otimes 1 \otimes y)) = (\Psi \otimes \Psi)(a^*a)\Psi(y^*y)$.

Démonstration. Posons $f = y\,\Psi\, y^*$, f est une forme positive sur A et on a $\|f\| = \Psi(y^*y)$. Par [19], il existe une famille de formes normales positives $(\omega_i)_{i\in I}$ sur M telle que $\bar\Psi = \sum_i \omega_i$. On en déduit ([22] 8.3) que $(\bar\Psi \otimes \bar\Psi) = \sum_i (\omega_i \otimes \bar\Psi)$, d'où :

$$\begin{aligned}(\Psi \otimes \Psi)((1 \otimes y^*)\delta(x^*x)(1 \otimes x)) &= \sum_i (\omega_i \otimes \bar{\Psi}) \circ (\pi_\Psi \otimes \pi_\Psi)((1 \otimes y^*)\delta(x^*x)(1 \otimes x)) \\ &= \sum_i \Psi(y^*(x^*x * \omega_i \circ \pi_\Psi)y) \\ &= \sum_i f(x^*x * \omega_i \circ \pi_\Psi)) \\ &= \sum_i (\omega_i \circ \pi_\Psi)(f * x^*x) \\ &= \Psi(f * x^*x) = \Psi(y^*y)\Psi(x^*x) < \infty\end{aligned}$$

d'où le a).

Démonstration analogue pour le b). ∎

Avec les notations ci-dessus, notons V l'isométrie dans l'espace de Hilbert $H_\Psi \otimes H_\Psi = H_{\Psi\otimes\Psi}$ définie par :

$$V(\Lambda_\Psi\, x \otimes \Lambda_\Psi\, y) = \Lambda_{\Psi\otimes\Psi}\,(\delta(x)(1 \otimes y))$$

où $x, y \in \mathfrak{N}_\Psi$. Nous avons :

2.4. THÉORÈME. — *L'isométrie V vérifie la relation pentagonale $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$.*

Pour la preuve de ce résultat, on a besoin de :

2.5. LEMME. — *Pour tout $a \in \mathfrak{N}_{\Psi\otimes\Psi}$ et tout $z \in \mathfrak{N}_\Psi$, on a $V_{23}\Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}\,(a \otimes z) = \Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}((id \otimes \delta)(a)(1 \otimes 1 \otimes z))$.*

Démonstration. Il est clair que si a appartient au produit tensoriel algébrique $\mathfrak{N}_\Psi \odot \mathfrak{N}_\Psi$, on a par définition de V :

$$V_{23}\,\Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}(a \otimes z) = \Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}((id \otimes \delta)(a)(1 \otimes 1 \otimes z))$$

Dans le cas général, soit (a_n) une suite dans le produit tensoriel algébrique $\mathfrak{N}_\Psi \odot \mathfrak{N}_\Psi$ telle que (2.1) $\Lambda_{\Psi\otimes\Psi}\, a_n \to \Lambda_{\Psi\otimes\Psi}\, a$. Par (2.3), on a :

$$\Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}((id \otimes \delta)(a_n)(1 \otimes 1 \otimes z)) \to \Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}((id \otimes \delta)(a)(1 \otimes 1 \otimes z))$$

∎

démonstration du théorème. Pour $x, y, z \in \mathfrak{N}_\Psi$, on a par le lemme précédent :

$$\begin{aligned}V_{23}V_{12}\,(\Lambda_\Psi\, x \otimes \Lambda_\Psi\, y \otimes \Lambda_\Psi\, z) &= V_{23}\Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}\,((\delta(x)(1 \otimes y)) \otimes z) \\ &= \Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}\,(\delta^2(x)(1 \otimes (\delta(y)(1 \otimes z)))\end{aligned}$$

D'autrepart, soit (b_n) une suite dans le produit tensoriel algébrique $\mathfrak{N}_\Psi \odot \mathfrak{N}_\Psi$ telle que $\Lambda_{\Psi\otimes\Psi}\, b_n \to \Lambda_{\Psi\otimes\Psi}\,(\delta(y)(1\otimes z))$, on a :

$$\begin{aligned}
V_{12}V_{13}V_{23}\,(\Lambda_\Psi\, x \otimes \Lambda_\Psi\, y \otimes \Lambda_\Psi\, z) &= V_{12}V_{13}\,\Lambda_\Psi\, x \otimes \Lambda_{\Psi\otimes\Psi}\,(\delta(y)(1\otimes z)) \\
&= \lim_{n\to\infty} V_{12}V_{13}\,\Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}\,(x\otimes b_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} V_{12}\,\Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}\delta(x)_{13}(1\otimes b_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}\delta^2(x)(1\otimes b_n) \quad (\text{par} \quad (2.5))
\end{aligned}$$

Pour tout $u \in \mathfrak{M}_\Psi^+$, on a avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}\delta^2(x)(u\otimes b_n) &= \lim_{n\to\infty} (\pi_\Psi\otimes\pi_\Psi\otimes\pi_\Psi)(\delta^2(x))\,\Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}(u\otimes b_n) \\
&= (\pi_\Psi\otimes\pi_\Psi\otimes\pi_\Psi)(\delta^2(x))\,\Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}(u\otimes(\delta(y)(1\otimes z))
\end{aligned}$$

Par densité normique dans A^+ des éléments u de $\mathfrak{M}_\Psi^+$ tels que $\pi_\Psi(u)$ soient analytiques pour le groupe d'automorphismes modulaires $(\sigma_t^{\bar\Psi})$, on déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}\delta^2(x)(1\otimes b_n) = \Lambda_{\Psi\otimes\Psi\otimes\Psi}\,(\delta^2(x)(1\otimes(\delta(y)(1\otimes z)))$$

■

2.6. Remarque. — Soit (A,δ) une C*-algèbre de Hopf.

1) Si Ψ est une mesure de Haar à droite sur (A,δ), la condition a) de (2.2) entraine que l'espace des vecteurs bornés à droite relativement à la représentation GNS du [9] système hilbertien à gauche $(A, \mathfrak{N}_\Psi, s_\Psi)$ où $s_\Psi(x,y) = \Psi(x^*y)$, est [9] dense dans H_Ψ ; procédant comme par exemple dans [12], on montre facilement que $V \in \mathcal{L}(H_\Psi)\otimes M$ où M est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\Psi(A)$.

2) Si Φ est une mesure de Haar à gauche sur (A,δ), alors on montre de même que la formule $V^*(\Lambda_\Phi\, x\otimes\Lambda_\Phi\, y) = \Lambda_{\Phi\otimes\Phi}\,(\delta(y)(x\otimes 1))$ définit une co-isométrie V de l'espace de Hilbert $H_\Phi\otimes H_\Phi$ qui vérifie la relation pentagonale ; on a evidemment que $V\in M\otimes\mathcal{L}(H)$ où M est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_\Phi(A)$.

3) Si Ψ est une mesure de Haar à droite sur (A,δ), alors pour tout $x\in\mathfrak{N}_\Psi$ et toute forme $f\in A^*$, on a $(f*x)\in\mathfrak{N}_\Psi$ et $\Psi((f*x)^*(f*x)) \le \|f\|^2\,\Psi(x^*x)$; voir par exemple ([23],[13]).

3. Unitaires multiplicatifs semi-réguliers

Le but de cette partie est de montrer qu'avec des hypothèses de régularité et d'irréductibilité plus faibles que celles de [4], les algèbres de Banach S_V et $\widehat{S_V}$ canoniquement associées à un unitaire multiplicatif V, restent munies d'une structure de C*-algèbre de Hopf bisimplifiable (cf.[4] 3.). Sous les mêmes hypothèses, nous étudions également les représentations covariantes de ces unitaires multiplicatifs.

Commençons par la définition suivante :

3.1. DÉFINITION. — *On dit que l'unitaire multiplicatif V dans H est semi-régulier si l'adhérence normique de l'algèbre $\mathcal{C}(V)$ contient la C^*-algèbre des opérateurs compacts $\mathcal{K}$. On dit que V est semi-birégulier si V est semi-régulier et que l'adhérence normique de l'espace vectoriel $\{(\omega \otimes id)(\Sigma V) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ contient $\mathcal{K}$.*

Si V est semi-régulier, il est clair que $\Sigma V^* \Sigma$ est semi-régulier. Si deux unitaires multiplicatifs sont équivalents et que l'un est semi-régulier, l'autre l'est.

Nous verrons au paragraphe 4 que la représentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$ de Woronowicz est unitaire multiplicatif semi-régulier mais non régulier. Cependant, dans le cas unifère (i.e $1 \in A(V)$) , nous allons montrer que la semi-régularité d'un unitaire multiplicatif V entraine sa régularité .

On a :

3.2. PROPOSITION. — *Soit V un unitaire multiplicatif dans H semi- régulier, S et $\widehat{S}$ les algèbres de Banach associées.*

a) L'adhérence normique de la sous-algèbre $\mathcal{C}(V)$ de $\mathcal{L}(H)$ est auto-adjointe.

b) S et $\widehat{S}$ sont des sous-C^*-algèbres de $\mathcal{L}(H)$.

Notons d'abord que si l'adhérence normique de $\mathcal{C}(V)$ est stable par l'involution, S et $\widehat{S}$ le sont également par la même preuve que ([4] 3.5) ; d'où le b) . Pour démontrer le a), on a besoin de :

3.3. LEMME. — *Soient H un espace de Hilbert, B une sous-algèbre normiquement fermée de $\mathcal{L}(H)$ et B_0 une sous-algèbre de B normiquement dense. Supposons que les ensembles $B_0^*B_0$ et $B_0B_0^*$ soient contenus dans B. Alors B est une sous-C^*-algèbre de $\mathcal{L}(H)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $B_0^* \subset B$. Or, pour tout $x \in B_0$, il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $P_n(0) = 0$ pour tout n et que x soit limite normique de $(xP_n(x^*x))$. Comme $\overline{P_n}(x^*x)x^* \in B$, on a $x^* \in B$.

démonstration de la proposition

Posons $B_0 = \mathcal{C}(V)$ et notons B son adhérence normique dans $\mathcal{L}(H)$. Nous allons montrer les ensembles $B_0^*B_0$ et $B_0B_0^*$ sont contenus dans B. Pour $\omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*$, on a :

$$\begin{aligned}(id \otimes \omega)(\Sigma V)^*(id \otimes \omega')(\Sigma V) =& (id \otimes \omega' \otimes \omega^*)(V_{13}^*\Sigma_{13}\Sigma_{12}V_{12})\\ =& (id \otimes \omega' \otimes \omega^*)(\Sigma_{12}V_{23}^*V_{13}\Sigma_{23})\end{aligned}$$

Il résulte du calcul précédent que si $x, y \in B_0$, alors x^*y appartient à l'adhérence normique de l'espace vectoriel engendré par $\{(id\otimes\alpha\otimes\beta)(\Sigma_{12}V_{23}^*(a\otimes b\otimes 1)V_{13}) \ / \ \alpha, \beta \in \mathcal{L}(H)_* \ ; \ a, b \in \mathcal{K}\}$. Or il résulte de la semi- régularité de V et de ([4] 3.1) que l'adhérence normique de l'espace vectoriel engendré par $\{(a \otimes 1)V(1 \otimes b) \ / \ a, b \in \mathcal{K}\}$ contient la C*-algèbre $\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$. On en déduit que $x^*y \in \overline{lin}\,\{(id \otimes \alpha \otimes \beta)(\Sigma_{12}V_{23}^*V_{12}V_{13}) \ / \ \alpha, \beta \in$

$\mathcal{L}(H)_*\}$. Comme $V^*_{23}V_{12}V_{13} = V_{12}V^*_{23}$, on a $x^*y \in B$. Remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$, on obtient également que $xy^* \in B$.

■

3.4. Remarque. — Si X est une coreprésentation (resp. représentation) de l'unitaire multiplicatif semi-régulier V dans un espace de Hilbert K, alors la sous-algèbre ([4] A.3) S_X (resp. $\widehat{S}_X$) est une sous-C*-algèbre de $\mathcal{L}(K)$; la preuve est la même que dans ([4] A.3).

Nous ne savons pas si la semi-régularité d'un unitaire multiplicatif V suffit pour munir la C*-algèbre S (resp. $\widehat{S}$) , via le morphisme $\delta(x) = V(x \otimes 1)V^*)$ (resp. $\delta(x) = V^*(1 \otimes x)V$) , d'une structure de C*-algèbre de Hopf. Cependant, si S ou $\widehat{S}$ est unifère, c'est le cas car alors l'unitaire multiplicatif est régulier. Pour la preuve, montrons le résultat suivant :

3.5. LEMME. — *Soient V un unitaire multiplicatif, X une coreprésentation (resp. représentation) de Vdans un espace de Hilbert K. On a :*

$$\overline{lin}\,(\mathcal{C}(V)^* \odot 1)X(\mathcal{K} \odot 1) = X(\overline{\mathcal{K} \odot A_X})$$

$$(resp. \overline{lin}\,(1 \odot \mathcal{K})X(1 \odot \mathcal{C}(V)^*) = (\overline{\widehat{A}_X \odot \mathcal{K})X})$$

Démonstration. Pour $\omega \in \mathcal{L}(H)_*, k \in \mathcal{K}$, on a :

$$\begin{aligned}(id \otimes \omega \otimes id)(V^*_{12}\Sigma_{12}X_{13}(k \otimes 1 \otimes 1)) &= (id \otimes \omega \otimes id)(V^*_{12}X_{23}\Sigma_{12}(k \otimes 1 \otimes 1)) \\ &= (id \otimes \omega \otimes id)(X_{13}X_{23}V^*_{12}\Sigma_{12}(k \otimes 1 \otimes 1))\end{aligned}$$

On conclut grâce à l'égalité $V^*\Sigma(\overline{\mathcal{K} \odot \mathcal{K}}) = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^*\Sigma$ et X par $\Sigma X^*\Sigma$.

■

3.6. PROPOSITION. — *Soit V un unitaire multiplicatif dans H de type compact (resp. discret). Si V est semi-régulier, alors V est régulier.*

Démonstration. Notons d'abord qu' on a par ([4] 3.1), $\overline{lin}\,(\mathcal{K}\odot 1)V(\mathcal{K}\odot 1) = \overline{\mathcal{K} \odot A(V)}$. Si V est semi-régulier, (3.5) entraine que $\mathcal{K} \otimes S \subset V(\mathcal{K} \otimes S)$. Si V est de plus de type compact, alors pour tout $k \in \mathcal{K}$ on a $V^*(k \otimes 1) = \lim_{n\to\infty} \sum_j^{p_n} (k_j \otimes s_j)$ avec $k_j \in \mathcal{K}$ et $s_j \in S$.

Pour tout $\xi, \eta \in H$, posons alors $t = (id \otimes \omega_{k\eta,\xi})(\Sigma V)$ et $t_n = \sum_j^{p_n} \theta_{s_j^*\xi, k_j\eta}$ pour tout entier n. Pour tout $\alpha, \beta \in H$, nous avons :

$$\begin{aligned}(\alpha \mid (t-t_n)\beta) &=(\alpha \otimes k\eta \mid (\Sigma V)(\beta \otimes \xi)) - \sum_j^{p_n} (\alpha \mid s_j^* \xi)(k_j \eta \mid \beta) \\ &=((V^*(k \otimes 1) - \sum_j^{p_n} (k_j \otimes s_j))(\eta \otimes \alpha) \mid \beta \otimes \xi)\end{aligned}$$

donc $\|t - t_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$ et V est régulier.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$. ■

Par les résultats de [4], V est en fait (à la multiplicité prés), irréductible.

3.7. DÉFINITION. — *On dit qu'un unitaire multiplicatif V dans H est équilibré s'il existe un unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que :*

a) $U^2 = 1$.

b) L' unitaire $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1)V(U \otimes 1)\Sigma$ *est multiplicatif.*

Par abus de langage (et de notation), nous dirons que le couple (V, U) est un unitaire multiplicatif équilibré s'il vérifie les conditions de la définition précédente.

3.8. Remarque. — On déduit immédiatement de la définition de $\widehat{V}$ que si (V, U) est un unitaire multiplicatif équilibré, V est semi-birégulier ssi V et $\widehat{V}$ sont semi-réguliers. Notons aussi que l'unitaire $\widetilde{V} = \Sigma(1 \otimes U)V(1 \otimes U)\Sigma = (U \otimes U)\widehat{V}(U \otimes U)$ est également multiplicatif.

Dans la proposition suivante, nous donnons des propriétés algébriques des co-représentations et représentations d'un unitaire multiplicatif équilibré (V, U). Pour cela, si X est une coreprésentation (resp. représentation) de V , nous posons $\widehat{X} = (1 \otimes U)X_{21}(1 \otimes U)$ (resp. $\widetilde{X} = (U \otimes 1)X_{21}(U \otimes 1)$). Nous avons :

3.9. PROPOSITION. — *Soient (V, U) un unitaire multiplicatif équilibré dans H et X une co-représentation (resp. représentation) de V dans un espace de Hilbert K.*

a) $\widetilde{V}_{12}X_{13}\widetilde{V}_{12}^* = X_{13}X_{23}$ *(resp.* $\widehat{V}_{23}^*X_{13}\widehat{V}_{23} = X_{12}X_{13}$*)*

b) $\widehat{X}_{23}^*V_{13}\widehat{X}_{23} = X_{12}V_{13}$ *(resp.* $\widetilde{X}_{12}V_{13}\widetilde{X}_{12}^* = V_{13}X_{23}$*)*

c) $\overline{lin}\,(\mathcal{K} \odot 1)X(\mathcal{C}(\widetilde{V})^* \odot 1) = \overline{lin}\,(\mathcal{K} \odot A_X)X$

(resp. $\overline{lin}\,(1 \odot \mathcal{C}(\widehat{V})^*)X(1 \odot \mathcal{K}) = \overline{lin}\,X(\widehat{A}_X \odot \mathcal{K})$)

Démonstration. a) Cf. [4] A.7 b).

b) En conjuguant l'égalité $\widetilde{V}_{12}X_{13}\widetilde{V}_{12}^* = X_{13}X_{23}$ par l'unitaire $(1 \otimes U \otimes 1)\Sigma_{12}$, on obtient $V_{12}\widehat{X}_{32}V_{12}^* = \widehat{X}_{32}X_{13}$, d'où $V_{13}\widehat{X}_{23}V_{13}^* = \widehat{X}_{23}X_{12}$. On démontre de même l'assertion (resp.).

c) Pour $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on a :

$$\begin{aligned}(id \otimes \omega \otimes id)((k \otimes 1 \otimes 1)X_{13}\widetilde{V}_{12}^*\Sigma_{12}) &= (id \otimes \omega \otimes id)((k \otimes 1 \otimes 1)\widetilde{V}_{12}^* X_{13} X_{23} \Sigma_{12}) \\ &= (id \otimes \omega \otimes id)((k \otimes 1 \otimes 1)\widetilde{V}_{12}^* \Sigma_{12} X_{23} X_{13})\end{aligned}$$

On conclut grâce à l'égalité $\overline{(\mathcal{K} \odot \mathcal{K})\widetilde{V}^*\Sigma} = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$ et X par $\Sigma X^* \Sigma$. ■

3.10. PROPOSITION. — *Soient (V, U) un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier, X une coreprésentation (resp. représentation) de V. Nous avons :*

a) $X \in M(\mathcal{K} \otimes S_X)$ *(resp.* $X \in M(\widehat{S}_X \otimes \mathcal{K})$*).*

b) $X \in M(\widehat{S} \otimes S_X)$ *(resp.* $X \in M(\widehat{S}_X \otimes S)$*).*

Démonstration. a) Remarquons d'abord qu' on a par ([4] 3.1), $\mathcal{K} \otimes S_X = \overline{lin}\ (\mathcal{K} \otimes 1)X(\mathcal{K} \otimes 1)$. Comme V est semi- régulier, grâce à (3.5), on a donc $\mathcal{K} \otimes S_X \subset X(\mathcal{K} \otimes S_X)$. L'unitaire multiplicatif $\widehat{V}$ étant également semi- régulier , on a aussi par (3.9 c)) , $\mathcal{K} \otimes S_X \subset (\mathcal{K} \otimes S_X)X$. Donc X est un multiplicateur de $\mathcal{K} \otimes S_X$.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$ et X par $\Sigma X^* \Sigma$.

b) Il résulte clairement du a) qu'on a $V \in M(\mathcal{K} \otimes S)$. Remplaçant V par $\widetilde{V}$, on en déduit que $\widetilde{V} \in M(\mathcal{K} \otimes \widehat{S})$. Par (3.9 a)), on a $X_{23} = X_{13}^* \widetilde{V}_{12} X_{13} \widetilde{V}_{12}^*$. Comme $\widetilde{V}_{12}$ et X_{13} sont des multiplicateurs de $\mathcal{K} \otimes \widehat{S} \otimes S_X$, il en va de même pour X_{23}.

L'assertion resp. résulte de celle-ci en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$ et X par $\Sigma X^* \Sigma$. ■

3.11. COROLLAIRE. — *Soit V un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier, S et $\widehat{S}$ les C^*-algèbres associées.*

a) $V \in M(\widehat{S} \otimes S)$.

b) Les adhérences des espaces vectoriels engendrés par $\{V(x \otimes 1)V^*(1 \otimes y)\ /\ x, y \in S\}$ *et* $\{V(x \otimes 1)V^*(y \otimes 1)\ /\ x, y \in S\}$ *sont toutes deux égales à* $S \otimes S$.

c) Les adhérences des espaces vectoriels engendrés par $\{V^*(1 \otimes x)V(1 \otimes y)\ /\ x, y \in \widehat{S}\}$ *et* $\{V^*(1 \otimes x)V(y \otimes 1)\ /\ x, y \in \widehat{S}\}$ *sont toutes deux égales à* $\widehat{S} \otimes \widehat{S}$.

Démonstration. a) résulte clairement de (3.10 a)).

b) Pour $a \in \mathcal{K}$, $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ et $y \in S$, on a :

$$V(L(a\omega) \otimes 1)V^*(1 \otimes y) = (\omega \otimes id \otimes id)(V_{12}V_{13}(a \otimes 1 \otimes y))$$

Par (3.10 a)) l'espace vectoriel engendré par $\{V(a \otimes y)\ /\ a \in \mathcal{K}, y \in S\}$ est dense dans $\mathcal{K} \otimes S$.

Pour $a \in \mathcal{K}$, $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ et $y \in S$, on a :

$$(y \otimes 1)V(L(\omega a) \otimes 1)V^* = (\omega \otimes id \otimes id)((a \otimes y \otimes 1)V_{12}V_{13})$$

Par (3.10 a)) l'espace vectoriel engendré par $\{(a \otimes y)V \ / \ a \in \mathcal{K}, y \in S\}$ est dense dans $\mathcal{K} \otimes S$.

L'assertion c) résulte de b) en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$. ∎

Maintenant on a exactement comme dans ([4] 3.8) :

3.12. Théorème. — *Soit V un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier. Munie du coproduit δ donné par $\delta(x) = V(x \otimes 1)V^*$, l'algèbre réduite S de V est une C^*-algèbre de Hopf (1.1) bisimplifiable. Munie du coproduit $\widehat{\delta}$ donné par $\widehat{\delta}(x) = V^*(1 \otimes x)V$, l'algèbre réduite duale $\widehat{S}$ de V est une C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable.*

Si V est un unitaire multiplicatif semi-régulier, alors on peut construire comme dans [4] les C*-algèbres pleines S_p et $\widehat{S}_p$. Si de plus, V est équilibré et semi-birégulier, on a :

3.13. Théorème. — *(cf. [4] A.6) Soit V un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier, alors les C^*-algèbres pleines S_p et $\widehat{S}_p$ sont munies naturellement de structures de C^*-algèbres de Hopf bisimplifiables. De plus, les coreprésentations unitaires de la C^*-algèbre de Hopf S (resp. $\widehat{S}$) correspondent exactement aux représentations de la C^*-algèbre $\widehat{S}_p$ (resp. S_p).*

Grace à (3.10), la preuve est la même que celle de ([4] A.6).

Enfin, pour affirmer avec ces hypothèses que V est en fait un multiplicateur de $\widehat{S}_p \otimes_{max} S_p$ et que les relations $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$ et $\widehat{V}_{23}V_{12}V_{13} = V_{13}\widehat{V}_{23}$ ont lieu respectivement dans $\mathcal{L}(\widehat{S}_p \otimes_{max} H \otimes_{max} \otimes S_p)$ et $\mathcal{L}(\widehat{S}_p \otimes_{max} S_p \otimes H)$, il suffit de montrer le résultat suivant :

3.14. Lemme. — *Soit V un unitaire multiplicatif dans l'espace de Hilbert H.*

a) Si (K, X) est une représentation et (K, Y) une coreprésentation de V dans le même espace de Hilbert K vérifiant $[Y_{12}, X_{23}] = 0$ dans $\mathcal{L}(H \otimes K \otimes H)$, alors nous avons $[X^*_{12}Y_{21}X_{12}Y^*_{21}, \Sigma_{23}V_{23}] = 0$ dans $\mathcal{L}(K \otimes H \otimes H)$.

b) Si (K, X) est une représentation et (K, Y) une coreprésentation de V dans le même espace de Hilbert K, alors nous avons $[X^*_{12}Y_{23}X_{12}Y^*_{23}, \Sigma_{24}V_{24}] = 0$ dans $\mathcal{L}(K \otimes H \otimes K \otimes H)$.

Démonstration. a) Nous avons :

$$\begin{aligned}X_{12}^*Y_{21}X_{12}Y_{21}^*\Sigma_{23}V_{23} &= \Sigma_{23}X_{13}^*Y_{31}X_{13}Y_{31}^*V_{23}\\ &= \Sigma_{23}X_{13}^*Y_{31}X_{13}V_{23}Y_{31}^*Y_{21}^*\\ &= \Sigma_{23}X_{13}^*Y_{31}X_{12}^*V_{23}X_{12}Y_{31}^*Y_{21}^*\\ &= \Sigma_{23}X_{13}^*X_{12}^*Y_{31}V_{23}Y_{31}^*X_{12}Y_{21}^*\\ &= \Sigma_{23}X_{13}^*X_{12}^*V_{23}Y_{21}X_{12}Y_{21}^* = \Sigma_{23}V_{23}X_{12}^*Y_{21}X_{12}Y_{21}^*\end{aligned}$$

b) Posons $K' = K \otimes K$ et $X' = X_{13}$ (resp. $Y' = Y_{13}$) dans $\mathcal{L}(K' \otimes H)$ (resp. $\mathcal{L}(H \otimes K')$. Il est clair qu'on a $[Y'_{12}, X'_{23}] = 0$ dans $\mathcal{L}(H \otimes K' \otimes H)$; le b) résulte alors du a) appliqué à X' et Y'.

■

En s'appuyant sur le lemme précédent, il est facile de voir que les assertions b), c) et d) du lemme A.7 et la proposition A.8 de [4] sont vraies pour un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier.

Passons mantenant aux représentations covariantes de tels unitaires multiplicatifs.

Notons d'abord qu'à toute représentation covariante (X, Y) dans un espace de Hilbert K d'un unitaire multiplicatif semi-régulier, on peut associer (3.14 b)) un unitaire $W \in \mathcal{L}(K \otimes K)$ donné par $W_{13} = X_{12}^*Y_{23}X_{12}Y_{23}^*$ dans $\mathcal{L}(K \otimes H \otimes K)$. Comme dans ([4] A.10), on montre que W est multiplicatif et que (Y, X) est une représentation covariante de W dans l'espace de Hilbert H.

3.15. LEMME. — *Soient V un unitaire multiplicatif dans H et (X, Y) une représentation covariante de V dans l'espace de Hilbert K. Nous avons :*

$$\overline{\mathcal{C}(V) \odot \mathcal{K}(K)} = \overline{lin}\ (1 \odot \mathcal{K}(K))X_{21}(\mathcal{K} \odot 1)Y(1 \odot \mathcal{K}(K))$$

Si de plus V est semi-régulier, l'unitaire multiplicatif W dans K associé à (X, Y) est semi-régulier.

Démonstration. Pour $k \in \mathcal{K}(K)$ et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, nous avons $(id \otimes id \otimes \omega)((1 \otimes k \otimes 1)\Sigma_{13}V_{13}) = (id \otimes id \otimes \omega)((1 \otimes k \otimes 1)\Sigma_{13}Y_{12}^*X_{23}Y_{12}X_{23}^*) = (id \otimes id \otimes \omega)((1 \otimes k \otimes 1)Y_{32}^*X_{21}\Sigma_{13}Y_{12}X_{23}^*)$. On conclut grace à l'égalité $\overline{lin}\ \{(id \otimes \omega)(\Sigma)\ /\ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\} = \mathcal{K}$.

Supposons maintenant que V soit semi-régulier. Comme (Y, X) est une représentation covariante de W on a par le résultat précédent $\overline{lin}\ (\mathcal{C}(W) \odot \mathcal{K}) = \overline{lin}\ (1 \odot \mathcal{K})Y_{21}(\mathcal{K}(K) \odot 1)X(1 \odot \mathcal{K})$. Nous avons $\mathcal{K}(K \otimes H) \subset \overline{lin}\ (\mathcal{C}(W) \odot \mathcal{K})$. En effet, il suffit de montrer qu'un opérateur compact $z \in \mathcal{K}(K \otimes H)$ de la forme $z = (1 \otimes h_1)X^*(k \otimes h_2)X(1 \otimes h_3)$ où $k \in \mathcal{K}(K)$, $h_i \in \mathcal{K}$, appartient à $\overline{lin}\ (\mathcal{C}(W) \odot \mathcal{K})$. Or, par la semi-régularité de V, on peut supposer qu' on a $X^*(k \otimes h_2) = (1 \otimes c)Y_{21}(k' \otimes 1)$ avec $c \in \mathcal{C}(V)$ et $k' \in \mathcal{K}(K)$, d'où la semi-régularité de W.

■

3.16. LEMME. — *Soit* (X, Y) *une représentation covariante dans l'espace de Hilbert* K *de l'unitaire multiplicatif semi-régulier* V, *notons* W *l'unitaire multiplicatif dans* K *associé. Nous avons :*

a) $S_W = S_Y$ *et* $\widehat{S_W} = \widehat{S_X}$.

b) $S_V = \overline{lin}\ \{(\omega' \otimes id)(X)\ /\ \omega' \in \mathcal{L}(K)_*\}$ et $\widehat{S_V} = \overline{lin}\ \{(id \otimes \omega')(Y)\ /\ \omega' \in \mathcal{L}(K)_*\}$.

Démonstration. a) Y étant une représentation de W dans H, l'adhérence normique dans $\mathcal{L}(K)$ de l'espace vectoriel engendré par $\{(\omega \otimes \omega' \otimes id)(Y_{13}W_{23})\ /\ \omega \in \mathcal{L}(H)_*, \omega' \in \mathcal{L}(K)_*\}$ est S_W. Or, la relation de covariance $X_{12}W_{13}Y_{23} = Y_{23}X_{12}$ entraine que l'adhérence normique dans $\mathcal{L}(K)$ de l'espace vectoriel engendré par $\{(\omega' \otimes \omega \otimes id)(W_{13}Y_{23})\ /\ \omega \in \mathcal{L}(H)_*, \omega' \in \mathcal{L}(K)_*\}$ est S_Y. Comme S_W et S_Y sont des sous-C*-algèbres de $\mathcal{L}(K)$, il y a égalité.

La deuxième égalité résulte de la précédente en remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$ et (X, Y) par $(\Sigma Y^* \Sigma, \Sigma X^* \Sigma)$.

b) (Y, X) étant une représentation covariante de W dont l'unitaire multiplicatif associé est V, le b) résulte alors du a).

■

3.17. LEMME. — *Soient* (V, U) *un unitaire multiplicatif équilibré,* (X, Y) *une représentation covariante de* V. *Nous avons :*

a) $Y_{12} = (\widehat{Y}X)^*_{23} V_{13} (\widehat{Y}X)_{23}$.

b) $X_{23} = (Y\widetilde{X})_{12} V_{13} (Y\widetilde{X})^*_{12}$.

Si, de plus, V *est semi-régulier, nous avons :*

c) $Y_{23} W_{13} \widetilde{X}_{21} = \widetilde{X}_{21} Y_{23}$.

d) $\widehat{Y}_{32} W_{13} X_{12} = X_{12} \widehat{Y}_{32}$.

e) $W_{13} = (Y\widetilde{X})_{21} Y_{23} (Y\widetilde{X})^*_{21}$.

Démonstration. a) résulte de (3.9 b)) et de la propriété de covariance ; on démontre de même le b).

L'assertion resp. (3.9 b)) peut s'ecrire également $V_{31}X_{21}\widetilde{X}_{32} = \widetilde{X}_{32}V_{31}$ dans $\mathcal{L}(H \otimes K \otimes H)$. Dans $\mathcal{L}(H \otimes K \otimes K \otimes H)$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
Y_{43}W_{23}\widetilde{X}_{42}Y_{13} &= Y_{43}X^*_{21}Y_{13}X_{21}Y^*_{13}\widetilde{X}_{42}Y_{13} \\
&= X^*_{21}Y_{43}Y_{13}X_{21}\widetilde{X}_{42} \\
&= X^*_{21}V^*_{41}Y_{13}V_{41}X_{21}\widetilde{X}42 \\
&= \widetilde{X}_{42}V^*_{41}\widetilde{X}^*_{42}Y_{13}\widetilde{X}_{42}V_{41} \\
&= \widetilde{X}_{42}V^*_{41}Y_{13}V_{41} = \widetilde{X}_{42}Y_{43}Y_{13}
\end{aligned}
$$

d'où le c). En conjuguant c) par l'unitaire $(1 \otimes U \otimes 1)$, on obtient d). L'assertion e) résulte de c) et du fait que Y est une représentation de W.

■

Comme conséquence des résultats précédents, nous avons :

3.18. THÉORÈME. — *Soient V un unitaire multiplicatif dans H équilibré et semi-birégulier et (X,Y) une représentation covariante de V dans l'espace de Hilbert K. Notons W l'unitaire multiplicatif dans K associé. Nous avons :*

a) Munie du morphisme δ_W (resp. $\widehat{\delta_W}$) donné par $\delta_W(x) = W(x \otimes 1)W^*$ (resp. $\widehat{\delta_W}(x) = W^*(1 \otimes x)W$), la C^*-algèbre S_W (resp. $\widehat{S_W}$) est une C^*-algèbre de Hopf bisimplifiable.

b) Il existe un unique isomorphisme de C^*-algèbres de Hopf π (resp. $\widehat{\pi}$) de S_V (resp. $\widehat{S_V}$) sur S_W (resp. $\widehat{S_W}$) vérifiant $(id \otimes \pi)(V) = Y$ (resp. $(\widehat{\pi} \otimes id)(V) = X$).

c) $(\widehat{\pi} \otimes \pi)(V) = W$.

Démonstration. La coreprésentation Y de V étant stablement équivalente (3.17 a)) à la coreprésentation régulière, il existe un unique isomorphisme π de C*-algèbres de S_V sur (3.16 a)) la C*-algèbre $S_Y = S_W$ vérifiant $\pi(L_V(\omega)) = L_Y(\omega)$, donc $(id \otimes \pi)(V) = Y$.

Remplaçant V par $\Sigma V^* \Sigma$ et (X,Y) par $(\Sigma Y^* \Sigma, \Sigma X^* \Sigma)$, on déduit de ce qui précède un unique isomorphisme $\widehat{\pi}$ de C*-algèbres de $\widehat{S_V}$ sur la C*-algèbre $\widehat{S_X} = \widehat{S_W}$ vérifiant $\widehat{\pi}(\rho_V(\omega)) = \rho_X(\omega)$, donc $(\widehat{\pi} \otimes id)(V) = X$. Appliquant $(\widehat{\pi} \otimes id \otimes \pi)$ à la relation pentagonale $V_{12}V_{13}V_{23} = V_{23}V_{12}$, on obtient l'égalité $W = (\widehat{\pi} \otimes \pi)(V)$.

Soit $x = (\omega' \otimes id)(X)$ où $\omega' \in \mathcal{L}(K)_*$, nous avons :

$$\begin{aligned} W(\pi(x) \otimes 1)W^* &= (\omega' \otimes id \otimes id)(W_{23}W_{12}W_{23}^*) \\ &= (\omega' \otimes id \otimes id)(W_{12}W_{13}) \\ &= (\omega' \otimes id \otimes id)(\widehat{\pi} \otimes \pi \otimes \pi)(V_{12}V_{13}) \\ &= (\pi \otimes \pi)(V(L_V(\omega' \circ \widehat{\pi}) \otimes 1)V^*) \\ &= (\pi \otimes \pi)(\delta_V(x)) \end{aligned}$$

Par (3.12) et le calcul précédent, il résulte que S_W, munie de $\delta_W(x) = W(x \otimes 1)W^*$, est une C*-algèbre de Hopf bisimplifiable, et que π est un isomorphisme de C*-algèbres de Hopf de (S_V, δ_V) sur (S_W, δ_W).

Le reste de l'assertion (resp.) se déduit comme précédemment. ∎

Grâce aux résultats du paragraphe 4, on voit qu'avec les hypothèses précédentes, l'unitaire multiplicatif W n'est pas toujours (stablement) équivalent à V. Cependant, nous avons :

3.19. PROPOSITION. — *Soient (V,U) un unitaire multiplicatif dans H semi-régulier et équilibré, (X,Y) une représentation covariante de V dans l'espace de Hilbert K ; notons W l'unitaire multiplicatif dans K associé. Alors l'unitaire multiplicatif $W_{13}W_{23}$ dans $K \otimes K$ est stablement équivalent à l'unitaire multiplicatif $\widehat{Y}_{12}V_{24}\widehat{Y}_{12}^*$ dans $K \otimes H$.*

Démonstration. Montrons d'abord que l'unitaire multiplicatif (cf.3.21) $W_{13}Y_{23}$ dans $K \otimes H$ est équivalent à l'unitaire multiplicatif $\widehat{Y}_{12}V_{24}\widehat{Y}_{12}^*$ dans $K \otimes H$. Nous avons dans $\mathcal{L}(K \otimes H \otimes K \otimes H)$:

$$\begin{aligned}(\widehat{Y}X)_{12}(\widehat{Y}X)_{34}W_{13}Y_{23}(\widehat{Y}X)^*_{12}(\widehat{Y}X)^*_{34} &= (\widehat{Y}X)_{34}\widehat{Y}_{12}Y_{23}\widehat{Y}^*_{12}(\widehat{Y}X)^*_{34} \\ &= \widehat{Y}_{12}\widehat{Y}_{34}Y_{23}V_{24}\widehat{Y}^*_{34}\widehat{Y}^*_{12} = \widehat{Y}_{12}V_{24}\widehat{Y}^*_{12}\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que l'unitaire multiplicatif $W_{13}W_{23}$ dans $K \otimes K$ est stablement équivalent à l'unitaire multiplicatif $W_{13}Y_{23}$ dans $K \otimes H$. Pour cela, soit $T \in \mathcal{L}(K \otimes H, H \otimes K)$ l'unitaire défini par $T = s(Y\widetilde{X})^*_{21}$ où $s \in \mathcal{L}(K \otimes H, H \otimes K)$ est la volte. Nous avons, d'aprés (3.17) , dans $\mathcal{L}\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ où $\mathcal{H} = K \otimes H \otimes K$:

$$T_{56}T_{23}W_{14}W_{24}T^*_{23}T^*_{56} = W_{14}T_{23}W_{24}T^*_{23} = W_{14}Y_{24}$$

■

3.20. Corollaire. — *Soit (V, U) un unitaire multiplicatif dans H semi-régulier et équilibré vérifiant $[\widehat{V}_{12}, V_{23}] = 0$. Alors V est stablement équivalent à $W_{13}W_{23}$, où W est l'unitaire multiplicatif associé à toute représentation covariante (X, Y) de V dans un espace de Hilbert K.*

Démonstration. On a avec les notations de (3.9), $[\widehat{Y}_{12}, V_{23}] = 0$, d'où le résultat. ■

3.21. Remarque. — Si V est un unitaire multiplicatif dans H et X une coreprésentation (resp. représentation) de V dans l'espace de Hilbert K, il est facile de voir que l'unitaire $X_{23}V_{24}$ (resp. $V_{13}X_{23}$) dans $K \otimes H$ (resp. $H \otimes K$) est multiplicatif.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat (3.23) dans le cas irréductible (cf.[4] 6.2), qui nous sera utile au paragraphe 4.

Donnons nous un unitaire multiplicatif irréductible (V, U) et supposons que V soit semi-birégulier, i.e V et $\widehat{V}$ semi-réguliers. Nous avons :

3.22. Lemme. — *L'unitaire V est un multiplicateur de la C^*-algèbre $\overline{\mathcal{C}(\widehat{V})} \otimes \mathcal{K}$.*

Démonstration. Pout tout $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ et tout $k \in \mathcal{K}$, nous avons :

$$\begin{aligned}(id \otimes \omega \otimes id)(V_{13}\Sigma_{12}\widehat{V_{12}}(1 \otimes 1 \otimes k)) &= (id \otimes \omega \otimes id)(\Sigma_{12}V_{23}\widehat{V_{12}}(1 \otimes 1 \otimes k)) \\ &= (id \otimes \omega \otimes id)(\Sigma_{12}\widehat{V_{12}}V_{23}(1 \otimes 1 \otimes k))\end{aligned}$$

on conclut grace à l'égalité $V(\mathcal{K} \otimes \mathcal{K}) = \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$.

■

Il résulte clairement du lemme précédent qu'on a $\overline{lin}\ \widehat{A}(V)\mathcal{C}(\widehat{V}) = \overline{\mathcal{C}(\widehat{V})}$.

3.23. Proposition. — *Soit (V, U) un unitaire multiplicatif irréductible et semi-birégulier. Alors l'espace vectoriel fermé engendré par $\{L(\omega')\,\rho(\omega)\ /\ \omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\}$ est une C^*-algèbre qui coincide avec la fermeture normique de l'algèbre $\mathcal{C}(\widehat{\widehat{V}})$.*

Démonstration. Par l'irréductibilité ([4] 6.2 a)) de V il est facile de voir qu'on a :

$$\overline{lin}\ \{(id \otimes \omega)(\widehat{V}V) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\} = U\overline{\mathcal{C}(V)}U = \overline{\mathcal{C}(\widehat{\widehat{V}})}$$

Remplaçant V par $\widehat{V}$ dans (3.22) et utilisant (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{C}(\widehat{\widehat{V}})} &= \overline{lin}\ \{(id \otimes \omega)((x \otimes 1)\widehat{V}V) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*, x \in \widehat{A}(\widehat{V})\} \\ &= \overline{lin}\ \{L(\omega')\,\rho(\omega) \ / \ \omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\}\end{aligned}$$

∎

3.24. Remarque. —

a) Soit V un unitaire multiplicatif équilibré et semi-birégulier. Si la C*-algèbre de Hopf S agit dans une C*-algèbre A par une coaction δ_A, alors comme dans le cas régulier ([4] appendice), on peut définir le produit croisé "max" $A \rtimes_{max} \widehat{S}$: c'est la C*-algèbre dont les représentations sont données par les couples (π, u) où $\pi : A \to \mathcal{L}(K)$ est une représentation de A dans l'espace de Hilbert K, et $u \in \mathcal{L}(K \otimes S)$ est une coreprésentation unitaire ([4] 0.3) de S vérifiant la condition de covariance $(\pi \otimes id)(\delta_A(a)) = u(\pi(a) \otimes 1)u^*$ pour tout $a \in A$.

Comme dans le cas des groupes, on a un plongement canonique $\pi : A \to M(A \rtimes_{max} \widehat{S})$ (resp. $\widehat{\theta} : \widehat{S_p} \to M(A \rtimes_{max} \widehat{S})$). Procédant comme dans ([4] A.6), on peut montrer qu'il existe un unitaire $W \in M(A \rtimes_{max} \widehat{S} \otimes S)$ tel que $A \rtimes_{max} \widehat{S} = \overline{lin}\ \{\pi(a)(id \otimes \omega)(W) \ / \ a \in A, \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$.

Si de plus l'unitaire multiplicatif V est moyennable ([4] appendice), par les résultats de (3.17), il est facile de montrer qu'on a $A \rtimes_{max} \widehat{S} = A \rtimes \widehat{S}$.

b) Avec les hypothèses de (3.23), le produit croisé réduit $S \rtimes \widehat{S}$ est isomorphe à la C*-algèbre $\overline{lin}\ \{\rho(\omega)\,L(\omega') \ / \ \omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_*\}$ et donc contient la C*-algèbre des opérateurs compacts. En effet, pour tout $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on a ([4] 6.1 (2)) $\widehat{V}\delta(L(\omega))\widehat{V}^* = 1 \otimes L(\omega)$ et ([4] 6.5 c)) $[\widehat{V}, 1 \otimes \rho(\omega)] = 0$. Notons que dans le cas où l'unitaire multiplicatif est de plus moyennable, on a $S \rtimes \widehat{S} = S \rtimes_{max} \widehat{S}$; dans ce cas les représentations de la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ sont les représentations covariantes de l'unitaire multiplicatif V.

4. Groupe quantique $E_\mu(2)$ de Woronowicz

Dans ce paragraphe, nous montrons que la représentation régulière de $E_\mu(2)$ est un unitaire multiplicatif semi-birégulier (mais non régulier) et irréductible. Pour cela, nous commençons par construire la mesure de Haar du groupe quantique $E_\mu(2)$. Nous donnons ensuite les représentations covariantes de cet unitaire multiplicatif et nous montrons que la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S} = S \rtimes_{max} \widehat{S}$ est une extension des compacts par les compacts. Enfin, nous explicitons la théorie modulaire des mesures de Haar de $E_\mu(2)$ et de son dual de Pontrjagyn.

Une partie des résultats de cette section ont été annoncés dans [3] ; nous donnons également les preuves de ces résultats.

a) Mesure de Haar du groupe quantique $E_\mu(2)$

Commonçons par rappeler la définition de la C*-algèbre de Hopf [25] des "fonctions continues sur $E_\mu(2)$ tendant vers 0 à l'infini" que nous noterons dans la suite (A, δ).

Fixons un nombre réel $\mu > 1$ et posons $\mathbf{C}_\mu = \{z \in \mathbf{C} / \mid z \mid \in \mu^Z\} \cup \{0\}$. La C*-algèbre A est la C*-algèbre universelle engendrée par un unitaire $\mathbf{v} \in M(A)$ et un opérateur normal $\mathbf{n}$ de spectre $\mathbf{C}_\mu$, affilié ([2], [25]) à A, vérifiant $\mathbf{v}^*\mathbf{n}\mathbf{v} = \mu\mathbf{n}$. Autrement dit, A est le produit croisé $A = C_0(\mathbf{C}_\mu) \rtimes \mathbf{Z}$ par l'action α de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}_\mu$ définie par $\alpha(f)(\zeta) = f(\mu^{-1}\zeta)$.

Dans tout ce qui suit, nous notons L la représentation (fidèle) de A dans $l^2(\mathbf{Z}^3)$ définie par $L(\mathbf{v}) = 1 \otimes v_0 \otimes v_0$ et $L(\mathbf{n}) = v_0 \otimes n_0 \otimes 1$ où v_0 (resp. n_0) est l'opérateur dans $l^2(\mathbf{Z})$ défini par $v_0 e_n = e_{n+1}$ (resp. $n_0 e_n = \mu^n e_n$) ; (e_n) étant la base canonique de $l^2(\mathbf{Z})$.

Le coproduit δ est l'unique homomorphisme non dégénéré de A dans $M(A \otimes A)$ vérifiant $\delta(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ et $\delta(\mathbf{n})$ est la fermeture de l'opérateur $\mathbf{v} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}^*$, voir [25].

Fixons maintenant quelques notations qui seront constamment utilisées dans ce paragraphe. Posons $H = l^2(\mathbf{Z}^3)$. Pour tout $a, b, c \in \mathbf{Z}$, nous notons $\omega_{a,b,c}$ la forme $x \to (e_{c,a+b,a} \mid L(x) e_{0,b,0})$ sur A où $(e_{a,b,c})$ désigne la base canonique de $l^2(\mathbf{Z}^3)$. Pour tout i, j , notons $f_{i,j} \in C_0(\mathbf{C}_\mu)$ la fonction à support dans $\{z \in \mathbf{C}_\mu / \mid z \mid = \mu^i\}$ définie par $f_{i,j}(z) = (\frac{z}{\mid z \mid})^j$ si $\mid z \mid = \mu^i$. Il est clair que $\omega_{a,b,c}(\mathbf{v}^i f_{j,k}(\mathbf{n})) = \delta^{ijk}_{abc}$ et que la forme $x \to (e_{a,b,c} \mid L(x) e_{a',b',c'})$ sur A coincide avec la forme $\delta^{c-c'}_{b-b'} \omega_{c-c',b',a-a'}$. Enfin, pour tout $\xi \in H$, notons ω_ξ la forme $\omega_{\xi,\xi} \circ L$.

Posons $\Phi = \sum_{-\infty}^{\infty} \mu^{2j} \omega_{0j0}$. Il est clair que Φ est un poids s.c.i et normiquement semi-fini sur A. Soit $M = L(A)''$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $L(A)$; par abus de notation, nous notons également Φ le poids normal et ultrafaiblement semi-fini sur M défini par $x \to \sum_n \mu^{2n} (e_{0n0} \mid x e_{0n0})$.

Soit ν la mesure positive sur $\mathbf{C}_\mu$ définie pour toute fonction $f \in \mathrm{C}_0(C_\mu)$ à valeurs positives par :

$$\nu(f) = \sum_n \mu^{2n} \int_{S^1} f(\mu^n \zeta)\, d\zeta$$

où $d\zeta$ désigne la mesure de Haar normalisée de S^1.

4.1. PROPOSITION. — *Avec ces notations nous avons :*

a) Le poids Φ sur M est le poids dual ([15], [22]) de la mesure ν.

b) La formule $e_{ijk} = \mu^{k-j} \Lambda_\Phi \mathbf{v}^k f_{j-k,i}(\mathbf{n})$ identifie l'espace de Hilbert H_Φ de la représentation GNS de Φ à H et la représentation π_Φ correspondante à L.

c) L'opérateur modulaire Δ_Φ et l'opérateur J_Φ canoniquement associés à Φ , sont respectivement donnés par $\Delta_\Phi e_{ijk} = \mu^{2k} e_{ijk}$ et $J_\Phi e_{ijk} = e_{-i,j-k,-k}$.

d) $\sigma_t^\Phi(L(A) = L(A)$ et pour tout $a \in A$, $t \to \sigma_t^\Phi(L(a))$ est normiquement continue.

Démonstration. a) Soit $E : M \to L^\infty(C_\mu, \nu)$ l'espérance conditionnelle associée à l'action α. On a $\omega_{e_{0n0};e_{0n0}} \circ E = \omega_{e_{0n0};e_{0n0}}$ pour tout entier n, donc $\Phi \circ E = \Phi$. Par ailleurs, pour tout $f \in \mathbf{C}_0(C_\mu)$, on a $(e_{0k0} \mid f(\mathbf{n}) e_{0k0}) = \int_{S^1} f(\mu^k \zeta)\, d\zeta$, donc si f est à valeurs positives, on a $\Phi(f(\mathbf{n})) = \nu(f)$ d'où le a).

b) Soit T l'opérateur unitaire de H sur H_Φ définie par $T(e_{ijk}) = \mu^{k-j} \Lambda_\Phi \mathbf{v}^k f_{j-k,i}(\mathbf{n})$, il est facile de voir qu'on a $\pi_\Phi(\mathbf{v}) = TL(\mathbf{v})T^*$ et que pour $f \in \mathbf{C}_0(C_\mu)$, on a $\pi_\Phi(f(\mathbf{n})) = TL(f(\mathbf{n}))T^*$.

c) résulte de a), b) et de [15] ; d) se déduit facilement de a),b) et c). ■

4.2. THÉORÈME. — *Le poids Φ est une mesure de Haar à gauche et à droite pour la C^*-algèbre de Hopf (A, δ).*

Démonstration. Vérifions d'abord que le poids Φ satisfait les conditions a) et b) de (2.2). Pour cela, par (4.1 a) et d)), il suffit de montrer que le prolongement canonique $\bar{\Phi}$ de Φ à l'algèbre de von Neumann M coincide avec le poids $\tilde{\nu}$ sur M dual de la mesure ν. On a $\Phi = \bar{\Phi} \circ L = \tilde{\nu} \circ L$ sur A^+, comme $\bar{\Phi}$ est [1] le régularisé s.c.i de Φ, il résulte que $\bar{\Phi} \circ \sigma_t^{\tilde{\nu}} = \bar{\Phi}$. Par [19], il est clair que $\tilde{\nu} = \bar{\Phi}$.

Pour montrer la condition c) de (2.2), nous allons d'abord calculer le produit de convolution des formes ω_{abc}.

Soit g_μ la fonction continue [25] sur $\mathbf{C}_\mu$ définie par :

$$g_\mu(\zeta) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1 + \mu^{-1-2j}\zeta}{1 + \mu^{-1-2j}\bar{\zeta}}$$

et soit $A(m,n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} g_\mu(\mu^m e^{it}) e^{-int}\, dt$, le nième coefficient de Fourier de la restriction de g_μ au cercle $\{z \in C_\mu / \mid z \mid = \mu^m\}$.

4.3. PROPOSITION. — *Nous avons :*

$$\omega_{abc} * \omega_{a'b'c'} = \delta_{c+c'}^{a-a'} \sum_n A(b-b', n-b')\, A(b-b'+a-a', n-b'+c) \omega_{c+a',n,c+c'}$$

Démonstration. Posons $a = \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}$, $b = \mathbf{n} \otimes \mathbf{v}^*$. Il est facile de voir que les opérateurs a et b vérifient les conditions de ([28] thm.2.3) ; donc $\delta(\mathbf{n}) = \overline{a + b} = g_\mu(c)\, a\, g_\mu(c)^*$ où c est l'opérateur normal fermeture de l'opérateur $\mu^{-1} a^{-1} b$. Pour tout i, j, k nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\delta(f_{jk}(\mathbf{n})) &= g_\mu(c)f_{jk}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{n})g_\mu(c)^* \\ &= g_\mu(c)(\mathbf{v}^k\otimes f_{jk}(\mathbf{n}))g_\mu(c)^* \\ &= \sum_{l,m,n} A(l-n,j-n)A(l-n+k,j-n+m) \\ &\qquad (\mathbf{v}^{k-m}f_{lm}(\mathbf{n})\otimes\mathbf{v}^{-m}f_{n,k-m}(\mathbf{n}))\end{aligned}$$

En évaluant la forme $\omega_{abc}*\omega_{a'b'c'} = (\omega_{abc}\otimes\omega_{a'b'c'})\circ\delta$ en $x=\mathbf{v}^i f_{jk}(\mathbf{n})$, on obtient l'égalité cherchée.

■

4.4. LEMME. — *Soit $\xi\in H$ de composantes (ξ_{abc}) relativement à la base canonique de H. Pour tout $n\in\mathbf{Z}$, on a :*

a) $\omega_\xi*\omega_{0n0}=\sum_{m,p,q}\omega_{\xi^{p,q}_{m,n}}$ avec $\xi^{p,q}_{m,n}=\sum_{a,b,c}\delta_p^{a-b}\delta_q^{a-c}\xi_{abc}A(b-n,a+m-n)\,e_{a,m+a,c}.$

b) $\omega_{0n0}*\omega_\xi=\sum_{m,p,q}\omega_{\xi^{m,n}_{p,q}}$ avec $\xi^{m,n}_{p,q}=\sum_{a,b,c}\delta_p^{a+c}\delta_q^{b-c}\xi_{abc}A(n-b,m-a-b)\,e_{a,m-a,c}.$

Démonstration. Calculons d'abord $f*\omega_{0n0}$ où f est la forme définie par $f(x)=(e_{a,b,c}\mid L(x)e_{a',b',c'})$. Nous avons :

$$\begin{aligned} f*\omega_{0n0} &=\delta^{c-c'}_{b-b'}\,\omega_{c-c',b',a-a'}*\omega_{0n0}\\ &=\delta^{c-c'}_{b-b'}\delta^{c-c'}_{a-a'}\sum_m A(b'-n,m-n)A(b'-n+a-a',m-n+a-a')\,\omega_{c-c',m,a-a'}\\ &=\delta^{c-c'}_{b-b'}\delta^{c-c'}_{a-a'}\sum_m A(b'-n,a'+m-n)A(b-n,a+m-n)\,\omega_{c-c',m+a',a-a'}\\ &=\delta^{c-c'}_{b-b'}\delta^{c-c'}_{a-a'}\sum_m A(b'-n,a'+m-n)A(b-n,a+m-n)\,\omega_{e_{a,m+a,c};e_{a',m+a',c'}}\circ L \qquad (1)\end{aligned}$$

Pour tout entier $N\geq 0$ et tout $p,q\in\mathbf{Z}$, soient χ_N la fonction caractéristique de l'ensemble $\{\ (a,b,c)\in\mathbf{Z}^3/\ |a|+|b|+|c|\leq N\ \}$ et l^N_{pq} la fonction définie par $l^N_{pq}(a,b,c)=\chi_N(a,b,c)\delta_p^{a-b}\,\delta_q^{a-c}\,\xi_{abc}$, posons :

$$\xi^{p,q,N}_{m,n}=\sum_{a,b,c} l^N_{pq}(a,b,c)\,A(b-n,a+m-n)\,e_{a,m+a,c}.$$

Par (A.3) on a $\sum_{m,p,q}\|\xi^{p,q}_{m,n}-\xi^{p,q,N}_{m,n}\|^2=\sum_{|a|+|b|+|c|>N}|\xi_{abc}|^2\to 0$ quand $N\to\infty$ d'où $\sum_{m,p,q}\omega_{\xi^{p,q}_{m,n}}=\lim_{N\to\infty}\sum_{m,p,q}\omega_{\xi^{p,q,N}_{m,n}}$. D'autrepart, par (1), nous avons :

$$\sum_{m,p,q}\omega_{\xi^{p,q,N}_{m,n}}=\sum_{a,b,c}\sum_{a',b',c'}\chi_N(a,b,c)\chi_N(a',b',c')\overline{\xi_{abc}}\,\xi_{a'b'c'}\,\omega_{e_{a,b,c};e_{a',b',c'}}\circ L*\omega_{0n0}$$

qui converge normiquement quand $N\to\infty$ vers $\omega_\xi*\omega_{0n0}$, d'où le a).

Démonstration analogue pour le b).

■

4.5. LEMME. — *Soit $\xi \in H$ un vecteur de composantes (ξ_{abc}) relativement à la base canonique de H. Supposons que pour tout p,q , on ait $\sum_a \mu^a \ |\xi_{a,a+p,a+q}| < \infty$ (resp. $\sum_c \mu^c \ |\xi_{c+p,c+q,c}| < \infty$) , alors pour tout $x \in A^+$, on a :*

$$\Phi(x*\omega_\xi) = \|\xi\|^2 \Phi(x) \quad (resp.\ \Phi(\omega_\xi * x) = \|\xi\|^2 \Phi(x))$$

Démonstration. Nous avons avec les notations du lemme précédent :

$$\begin{aligned}\Phi(x*\omega_\xi) &= \sum_n \mu^{2n} (\omega_\xi * \omega_{0n0})(x) = \sum_{m,n,p,q} \mu^{2n}\, \omega_{\xi^{p,q}_{m,n}}(x) \\ &= \sum_{m,n,p,q} \mu^{2n} \sum_{a,b,c} \delta^{a-b,a-c}_{p,q}\, \xi_{abc}\, A(b-n, a+m-n)\, \omega_{\xi^{p,q}_{m,n};e_{a,m+a,c}}(L(x))\end{aligned}$$

Par (A.2) , nous en déduisons :

$$\Phi(x*\omega_\xi) = \sum_{m,n,p,q} \mu^{2n} \sum_{a,b,c} \delta^{a-b,a-c}_{p,q}\, \xi_{abc} (-\mu)^{a+m-n} A(-p-m, n-m-a)$$

$$\omega_{\xi^{p,q}_{m,n};e_{a,m+a,c}}(L(x)) \qquad (1)$$

Par (A.2) , nous avons également :

$$\begin{aligned}\|\xi^{p,q}_{m,n}\|^2 &= \sum_{a,b,c} \delta^{a-b,a-c}_{p,q}\, |\xi_{abc}|^2\, A(b-n, a+m-n)^2 \\ &= \sum_{a,b,c} \delta^{a-b,a-c}_{p,q}\, |\xi_{abc}|^2\, \mu^{2(a+m-n)} A(-p-m, n-m-a)^2 \\ &\leq \mu^{2(m-n)} \sum_a \mu^{2a}\, |\xi_{a,a-p,a-q}|^2 < \infty\end{aligned}$$

Comme $\sum_n |A(x,n)| < \infty$, il vient que :

$$\begin{aligned}&\sum_n \mu^{2n} \sum_{a,b,c} \delta^{a-b,a-c}_{p,q}\, \xi_{abc} (-\mu)^{a+m-n} A(-p-m, n-m-a)\, \omega_{\xi^{p,q}_{m,n};e_{a,m+a,c}}(L(x)) \\ &= \sum_{a,b,c} \delta^{a-b,a-c}_{p,q}\, \xi_{abc} (-\mu)^{a+m} \sum_n (-\mu)^n A(-p-m, n-m-a)\, \omega_{\xi^{p,q}_{m,n};e_{a,m+a,c}}(L(x)) \qquad (2)\end{aligned}$$

En remplaçant $\xi^{p,q}_{m,n}$ par son expression dans la base canonique de H, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\sum_n (-\mu)^n A(-p-m, n-m-a)\, \omega_{\xi^{p,q}_{m,n};e_{a,m+a,c}}(L(x)) \\ &= \sum_{a',b',c'} \delta^{a'}_a \delta^{a'-b',a'-c'}_{p,q}\, \overline{\xi_{a'b'c'}}\, (-\mu)^{a'+m}\, \omega_{e_{a',m+a',c'};e_{a,m+a,c}}(L(x))\end{aligned}$$

Tenant compte de (1),(2) et de l'égalité précédente , nous avons :

$$\Phi(x*\omega_\xi) = \sum_{m,p,q}\sum_{a,b,c}\delta_{p,q}^{a-b,a-c}\,|\xi_{abc}|^2\,\mu^{2(a+m)}\,\omega_{e_{a,m+a,c}}(x)$$
$$=\sum_m\sum_{a,b,c}|\xi_{abc}|^2\,\mu^{2(a+m)}\,\omega_{e_{0,m+a,0}}(x) = \|\xi\|^2\,\Phi(x).$$

Démonstration analogue pour l'assertion (resp.).

∎

4.6. LEMME. — *Pour toute forme positive normale $\omega\in\mathcal{L}(H)_*$ et tout $x\in A^+$, nous avons :*

$$\Phi(x*\omega\circ L) = \Phi(\omega\circ L*x) = \omega(1)\,\Phi(x)$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\xi\in H$, nous avons $\Phi(x*\omega_\xi) = \Phi(\omega_\xi*x) = \|\xi\|^2\,\Phi(x)$. Nous allons montrer que $\Phi(x*\omega_\xi) = \|\xi\|^2\,\Phi(x)$; la preuve de l'égalité $\Phi(\omega_\xi*x) = \|\xi\|^2\,\Phi(x)$ étant tout à fait analogue.

Supposons que $\Phi(x) < \infty$. Pour tout $N\geq 0$, posons $y_N = \sum_{|n|\leq N}\mu^{2n}\,(\omega_{0n0}*x)$. Alors la suite croissante d'opérateurs positifs $(L(y_N))$ converge faiblement vers $\Phi(x).1$. En effet, pour tout $\eta\in H$ à support fini, nous avons grace à (4.5) :

$$\omega_\eta(y_N) = \sum_{|n|\leq N}\mu^{2n}\,\omega_{0n0}\,(x*\omega_\eta) \leq \Phi(x*\omega_\eta) = \|\eta\|^2\,\Phi(x)$$

Nous en déduisons que $\sup_N\,\|L(y_N)\| < \infty$, donc la suite $(L(y_N))$ converge faiblement vers un opérateur positif y. Mais, pour tout $\eta\in H$ à support fini, on a par (4.5) :

$$\omega_{\eta;\eta}(y) = \sup_N\,\omega_\eta(L(y_N)) = \Phi(x*\omega_\eta) = \|\eta\|^2\,\Phi(x).$$

donc $y = \Phi(x).1$. Pour tout $\xi\in H$, nous avons alors :

$$\Phi(x*\omega_\xi) = \sum_n\mu^{2n}\,\omega_{0n0}\,(x*\omega_\xi)$$
$$=\sup_N\sum_{|n|\leq N}\mu^{2n}\,\omega_{0n0}\,(x*\omega_\xi)$$
$$=\sup_N\omega_\xi(y_N) = \|\xi\|^2\,\Phi(x)$$

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que si $\eta\in H$ est non nul et vérifie $\Phi(x*\omega_\eta) < \infty$, alors $\Phi(x) < \infty$.

Par (4.5), nous avons $\Phi(x*\omega_{000}) = \Phi(x)$. Si η est un vecteur de H non nul de composantes (η_{abc}), nous avons :

$$\Phi(x*\omega_\eta) = \Phi(x*\omega_\eta*\omega_{000}) = \sum_{m,p,q}\Phi(x*\omega_{\eta_{m,0}^{p,q}})$$

Fixons m, p, q et posons $\eta_{m,0}^{p,q} = \xi$; d'aprés (4.4) et (A.2), les composantes (ξ_{abc}) de ξ sont données par :

$$\begin{aligned}\xi_{abc} &= \delta_{b,c}^{a+m,a-q}\eta_{a,a-p,a-q}A(a-p,a+m)\\ &= \delta_{b,c}^{a+m,a-q}\ \eta_{a,a-p,a-q}\,(-\mu)^{a+m}\ A(-p-m,-a-m)\end{aligned}$$

Il est clair qu'on peut trouver m, p, q de façon que le vecteur $\eta_{m,0}^{p,q} = \xi$ soit non nul et vérifie les hypotheses de (4.5). On a alors :

$$\|\eta_{m,0}^{p,q}\|^2\,\Phi(x) = \Phi(x*\omega_{\eta_{m,0}^{p,q}}) \leq \Phi(x*\omega_\eta) < \infty$$

■

Pour terminer la preuve du théorème, nous montrons dans l'appendice B que pour toute forme positive f sur A , nous avons $\Phi(x*f) = \Phi(f*x) = \|f\|\,\Phi(x)$ pour tout $x \in A_+$.

Notons V l'isométrie multiplicative (2.4) de l'espace de Hilbert $H_\Phi \otimes H_\Phi$ définie pour tout $x, y \in \mathfrak{N}_\Phi$ par $V(\Lambda_\Phi x \otimes \Lambda_\Phi y) = \Lambda_{\Phi\otimes\Phi}\delta(x)(1\otimes y)$. Il est évident que pour tout $x \in A$ nous avons $(L\otimes L)(\delta(x))V = V(L(x)\otimes 1)$ Pour montrer que V est surjective, notons d'abord qu'à travers l'identification $H = H_\Phi$ donnée par (4.1b)), nous avons :

$$V(e_{abc}\otimes e_{xyz}) = \sum_{l,m}\mu^{l-b+c+y}A(l,b-c-y)A(a+l,b-y+m)$$
$$\left(e_{c+m,a+y+l-m,a-m}\otimes e_{x+a-c-m,y-m,z-m}\right)$$

Introduisons l'unitaire $V'' \in \mathcal{L}(H\otimes H)$ défini par $V''(e_{abc}\otimes e_{xyz}) = e_{abc}\otimes e_{x,y+c-a,z+c-a}$. Alors la formule précédente nous dit exactement que $VV''^* = g_\mu(X)g_\mu(Y)$ où $X = \mathbf{v}^*(\mathbf{n}^*)^{-1}\otimes\mathbf{v}^*\mathbf{n}^*$ (resp. $Y = -(v_0n_0\otimes n_0^{-1}\otimes v_0^*)\otimes\mathbf{v}^*\mathbf{n}^*$), donc V est un unitaire multiplicatif dans H et nous avons pour tout $x \in A$, $(L\otimes L)(\delta(x)) = V(L(x)\otimes 1)V^*$.

Posons $W = g_\mu(X)V''$ et $Q = -(n_0\otimes v_0\otimes 1)$ dans H ; remarquons que les opérateurs normaux X et Y vérifient les conditions de ([28] thm.2.3) et que la fermeture de l'opérateur normal $\mu^{-1}X^{-1}Y$ est égale à l'opérateur $Q\otimes 1_H$.

4.7. PROPOSITION. — *Avec ces notations, nous avons :*

a) $V = (g_\mu(Q)\otimes 1_H)W(g_\mu(Q)^*\otimes 1_H)$.

b) V *est semi-régulier mais non régulier.*

c) $S_V = L(A)$

Démonstration. a) Par ([28] thm.2.3), nous avons

$$g_\mu(X)g_\mu(Y) = (g_\mu(Q)\otimes 1)g_\mu(X)(g_\mu(Q)^*\otimes 1)$$

Comme V'' et $g_\mu(Q)\otimes 1_H$ commutent, on a donc $V = (g_\mu(Q)\otimes 1_H)W(g_\mu(Q)^*\otimes 1_H)$.

b) En s'appuyant sur la formule :

$$W(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = \sum_n A(c-a-b+y,n) e_{a+n,b-n,c-n} \otimes e_{x-n,y+c-a-n,z+c-a-n}$$

il est facile de voir que l'adhérence normique E de l'espace vectoriel $\{ (id \otimes \omega)(\Sigma W) \ / \ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$ coincide avec celle de $\{ T_{xyz;x'y'z'} \ / \ (x,y,z) \in \mathbf{Z}^3, (x',y',z') \in \mathbf{Z}^3\}$ où chaque opérateur $T_{xyz;x'y'z'}$ est défini par $T_{xyz;x'y'z'} \, e_{abc} = \delta_{x,y}^{a+c,b-c} A(z-c,-y') e_{a+x',b+y',c+z'}$. Par (A.4 b)), on a $\mathcal{K}(H) \subset E$ donc $\mathcal{K}(H) \subset \overline{\mathcal{C}(V)}$. Comme $\lim\limits_{a \to -\infty} A(a,0) = 1$, l'inclusion est stricte.

c) Par le a), il est facile de voir que $S_V = \overline{lin} \ \{ \ L_{abc} \ / \ (a,b,c) \in \mathbf{Z}^3\}$ où chaque opérateur L_{abc} est défini par $L_{abc} \, e_{xyz} = A(y+a,b) e_{x-b,y+c,z+c}$. Par (A.4 b)), on a donc $S_V \subset L(A)$. D'autrepart, par (A.4 b)) et le théorème de Stone-Weierstrass, l'espace vectoriel engendré par les produits finis de fonctions sur $\mathbf{C}_\mu$ de la forme $g(\mu^x z) = f(x) z^j$ et $g(0) = 0$ où $f \in C_0(\mathbf{Z})$ et $j \in \mathbf{Z}$, et $g(\mu^x z) = A(x,0)$ et $g(0) = 1$, est dense dans $C_0(\mathbf{C}_\mu)$. Il en résulte que $L(A) \subset S_V$. ∎

Soit U l'unitaire dans H défini par $U e_{abc} = (-1)^a e_{a,b-c,-c}$. Nous avons :

4.8. PROPOSITION. — *(V,U) est un unitaire multiplicatif irréductible et semi-birégulier.*

Démonstration. Il est clair que $U = U^*$ et que $U^2 = 1$. Montrons que l'unitaire $\widehat{V} = \Sigma(U \otimes 1) V (U \otimes 1)\Sigma$ est multiplicatif.

Soit V' la co-isométrie dans $H_\Phi \otimes H_\Phi$ définie pour tout $x, y \in \mathfrak{N}_\Phi$ par $V'^*(\Lambda_\Phi x \otimes \Lambda_\Phi y) = \Lambda_{\Phi\otimes\Phi}(\delta(y)(x \otimes 1))$. Par la coassociativité de δ, V' est multiplicative. A travers l'identification $H = H_\Phi$, on trouve :

$$\widehat{V}(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = \sum_{l,n} \mu^{y+l-n} A(b-x-y-l, n-l-y) A(b-y, n-y)$$
$$(e_{a-l,b-x-z-l,c-x-z-l,} \otimes e_{x+l,n,z+l})$$

Utilisant la formule précédente et (4.1b)), on vérifie directement que $V' = \widehat{V}$. Procédant comme dans (4.7b)), on montre que $\widehat{V}$ est semi-régulier, donc V est semi-birégulier.

Il reste à montrer l'égalité $\widehat{V} V \widetilde{V} = (U \otimes 1)\Sigma$ où $\widetilde{V} = \Sigma(1 \otimes U) V (1 \otimes U)\Sigma$.

Utilisant (A.2 et A.3), on trouve :

$$V\widetilde{V}(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = \sum_{k,n} (-1)^{n+\alpha} A(\alpha+x, -n) A(a+n, \alpha+n+k)$$
$$(e_{k,a+b-\alpha-k,a+b-\alpha-y-k} \otimes e_{a+x-k,b-\alpha-n-k,c+x-k})$$

où on a posé $\alpha = b - c + z - y - x$. En composant avec $\widehat{V}$ et en utilisant (A.2), on obtient :

$$\widehat{V}V\widetilde{V}(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = \sum_{l,n}(-1)^l(-\mu)^{-\alpha-n+l}A(\alpha+x,-n)A(-x+n-l,\alpha+n-l)$$
$$(e_{-l,-x+y-z-l,-x-z-l} \otimes e_{a+x+l,b,c+x+l})$$

Par (A.2 et A.3), on a $\sum_n(-\mu)^{-\alpha-n+l}A(\alpha+x,-n)A(-x+n-l,\alpha+n-l) = \delta_0^{l+x}$, d'où finalement $\widehat{V}V\widetilde{V}(e_{abc} \otimes e_{xyz}) = (-1)^x\, e_{x,y-z,-z} \otimes e_{abc}$.

■

Comme conséquence de (3.10), V est un multiplicateur de la C*-algèbre $\widehat{S} \otimes S$. Nous allons préciser cette propriété.

Notons α' l'action de S^1 dans $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} = \{z \in \mathbf{C} \;/\; \mid z \mid^2 \in \mu^{\mathbf{Z}}\} \cup \{0\}$ définie pour $f \in C_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}})$ par $\alpha'_z(f)(\zeta) = f(z^{-2}\zeta)$ et posons $B' = C_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}}) \rtimes_{\alpha'} S^1$. Soit $z \to u_z$ le plongement de S^1 dans $M(B')$; pour tout $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$, on obtient par prolongement analytique un multiplicateur non borné u_λ de B'. Notons $\mathbf{b}'$ la fonction $\zeta \to \zeta$ sur $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}}$; avec ces notations nous avons :

4.9. PROPOSITION. — *Il existe un unique homomorphisme ρ de B' sur $\widehat{S}$ vérifiant $\rho(u_\mu) = n_0 \otimes 1 \otimes n_0^{-1}$ et $\rho(\mathbf{b}')$ est l'opérateur normal fermeture de l'opérateur $(v_0^{-1}n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0 n_0^{-1} \otimes v_0 n_0^{\frac{1}{2}}) - (v_0^{-1}n_0^{\frac{1}{2}} \otimes n_0^{-1} \otimes v_0 n_0^{\frac{1}{2}})$ dans H.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\rho(\mathbf{b}')$ est bien défini. Soit $X' = v_0^{-1}n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0 n_0^{-1} \otimes v_0 n_0^{\frac{1}{2}}$ et $Y' = -v_0^{-1}n_0^{\frac{1}{2}} \otimes n_0^{-1} \otimes v_0 n_0^{\frac{1}{2}}$. Il est facile de voir que les opérateurs normaux X' et Y' dans H, vérifient les conditions de ([28] thm.2.3), donc la fermeture Z' de l'opérateur $(v_0^{-1}n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0 n_0^{-1} \otimes v_0 n_0^{\frac{1}{2}}) - (v_0^{-1}n_0^{\frac{1}{2}} \otimes n_0^{-1} \otimes v_0 n_0^{\frac{1}{2}})$ est un opérateur normal. De plus, comme la fermeture de l'opérateur $\mu^{-1}X'^{-1}Y'$ est l'opérateur $Q = -(n_0 \otimes v_0 \otimes 1)$, par ([28] thm.2.3) nous avons $g_\mu(Q)^* Z' g_\mu(Q) = X'$. Nous en déduisons que la représentation ρ de B' dans H est bien définie et unique.

Pour voir que la C*-algèbre $\widehat{S}$ est l'image de ρ, introduisons l'opérateur unitaire T dans H définie par $T e_{abc} = e_{a+b+c,b,b+c}$. Il est facile de voir que $T^*X'T = v_0^{-2}n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0 n_0^{-1} \otimes 1$ et $T^*g_\mu(Q)^*(n_0 \otimes 1 \otimes n_0^{-1})g_\mu(Q)T = T^*(n_0 \otimes 1 \otimes n_0^{-1})T = n_0 \otimes 1 \otimes 1$. Nous avons $\widehat{S} = \overline{lin}\,\{\rho_V(\omega_{ijk}) \;/\; (i,j,k) \in \mathbf{Z}^3\}$. Utilisant (4.7), on vérifie directement que les représentations $B' \to \mathcal{L}(H) : x \to T^*g_\mu(Q)^*\rho(x)g_\mu(Q)T$ et $\widehat{S} \to \mathcal{L}(H) : x \to T^*g_\mu(Q)^*xg_\mu(Q)T$ ont même image, d'où le résultat.

■

Dans toute la suite, posons $\mathbf{b} = \rho(\mathbf{b}')$ et $\mathbf{x} = \rho(u_\mu^{-1})$. Il résulte de (4.9) que les opérateurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{x}$ sont affiliés à $\widehat{S}$. Notons également h la fonction sur $\mathbf{C}_\mu\backslash\{0\}$ définie par $h(\mu^m z) = z^{-m}$.

4.10. THÉORÈME. — *Nous avons $V = g_\mu(\mathbf{b}^*\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{v}^*\mathbf{n}^*)h(\mathbf{x}^{-1} \otimes \mathbf{v})$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'avec les notations de (4.7), la fermeture de l'opérateur $\mathbf{b}^*\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{v}^*\mathbf{n}^*$ coincide avec celle de $X+Y$. Par ([28] thm.2.3), nous avons :

$$g_\mu(\mathbf{b}^*\mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{v}^*\mathbf{n}^*) = g_\mu(X)g_\mu(Y) = VV''^*$$

D'autre part, il est clair que $V'' = h(\mathbf{x}^{-1} \otimes \mathbf{v})$.

■

Notons β la représentation de $\widehat{S}$ dans $\mathcal{L}(l^2(\mathbf{Z}^2))$, apparue dans la preuve de (4.9), donnée par $x \to T^*g_\mu(Q)^*xg_\mu(Q)T$ où T désigne toujours l'unitaire de $\mathcal{L}(H)$ défini par $Te_{abc} = e_{a+b+c,b,b+c}$.

4.11. COROLLAIRE. — *La C^*-algèbre de Hopf $\widehat{S}_V$ munie du coproduit opposé $\widehat{\delta}^0 = \sigma \circ \widehat{\delta}$ est isomorphe à la C^*-algèbre de Hopf des "fonctions continues tendant vers 0 à l'infini" sur le dual de Pontrjagyn de $E_\mu(2)$ (au sens de Woronowicz).*

Démonstration. Soit $(B, \widehat{\Phi})$ la C*-algèbre de Hopf des "fonctions continues tendant vers 0 à l'infini" sur le dual de Pontryagin de $E_\mu(2)$, voir [26]. Il résulte de (4.9) que la représentation β définit un isomorphisme de C*-algèbres de $\widehat{S}$ sur B. Pour montrer que β est un morphisme de C*-algèbres de Hopf, introduisons la représentation γ de S dans $\mathcal{L}(l^2(\mathbf{Z}^2))$ définie par $\gamma(\mathbf{v}) = v_0^{-1} \otimes 1$ et $\gamma(\mathbf{n}) = n_0^{-1} \otimes v_0$. Alors par (4.10), $(\beta \otimes \gamma)(V)$ est la représentation fondamentale $\mathcal{W}$ donnée par Woronowicz. Il en résulte que β est un isomorphisme de C*-algèbres de Hopf.

■

4.12. Remarque. — S'appuyant sur (4.7a)) et (A.2 et A.3), on peut voir que $\widehat{\delta}(\mathbf{b}) = V^*(1 \otimes \mathbf{b})V$ est l'opérateur normal ([28] thm.2.3) fermeture de l'opérateur $\mathbf{b} \otimes \mathbf{x}^{\frac{1}{2}} + \mathbf{x}^{-\frac{1}{2}} \otimes \mathbf{b}$. Ce résultat est également une conséquence du corollaire précédent et de [26]. D'autrepart, il est facile de voir qu'on a $\widehat{\delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$.

b) Représentations de $S \rtimes \widehat{S}$

Nous allons montrer que la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ est une extension de la C*-algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts par $\mathcal{K}$, donc n'admet que deux représentations. Il en résulte que (3.24) l'unitaire multiplicatif V n'admet que deux représentations covariantes : la représentation régulière (V, V) et une deuxième (X, Y), dont l'unitaire multiplicatif correspondant est non régulier et non irréductible, que nous expliciterons.

Commençons par décrire la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$.

Par (3.24), nous savons que la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ s'identifie à l'espace vectoriel fermé engendré par les opérateurs $\{ L(\omega)\, \rho(\omega') \ /\ \omega, \omega' \in \mathcal{L}(H)_* \}$, nous en déduisons un plongement canonique de la C*-algèbre S (resp. $\widehat{S}$) dans $M(S \rtimes \widehat{S})$. En particulier les opérateurs $L(\mathbf{v}), L(\mathbf{n}), \mathbf{b}, \mathbf{x}$ sont ([2], [25]) affiliés à $S \rtimes \widehat{S}$. Notons simplement dans cette section $\mathbf{v}$ (resp. $\mathbf{n}$), l'opérateur $L(\mathbf{v})$ (resp. $L(\mathbf{n})$), posons $\mathbf{u} = \text{Phase}\, \mathbf{n}$, $\mathbf{w} = \mathbf{u}\, \mathbf{v}$ et soit $\mathbf{y}$ l'opérateur normal fermeture ([28] thm.2.3) de l'opérateur $\mathbf{b} - \mathbf{v}\mathbf{n}^{-1}\mathbf{x}^{\frac{1}{2}}$; nous verrons plus loin que les opérateurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{w}$ sont également affiliés à la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$.

Nous avons :

4.13. THÉORÈME. — *La C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ est une extension de la C*-algèbre $\mathcal{K}$ des opérateurs compacts par $\mathcal{K}$.*

Par (3.23 et 3.24 b)), il résulte de l'irréductibilité de V et de (4.7b)) que la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ contient $\mathcal{K}$; pour montrer que le quotient de $S \rtimes \widehat{S}$ par $\mathcal{K}$ s'identifie également à $\mathcal{K}$, nous allons introduire une C*-algèbre D (qui est clairement une extension de $\mathcal{K}$ par $\mathcal{K}$), et montrer que l'extension D de $\mathcal{K}$ par $\mathcal{K}$ est canoniquement isomorphe à celle définie par $S \rtimes \widehat{S}$ et l'idéal $\mathcal{K} \subset S \rtimes \widehat{S}$.

Pour toute fonction $f \in C_0(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \cup \{-\infty\}))$, notons T_f l'opérateur dans H défini par $T_f\, e_{abc} = f(a-c, b, c)\, e_{abc}$. Nous avons :

4.14. PROPOSITION. — $S \rtimes \widehat{S} = \overline{lin}\,(\mathcal{K} + \{\mathbf{u}^i\, \mathbf{v}^j\, T_f \;/\; f \in C_0(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \cup \{-\infty\})), (i,j) \in \mathbf{Z}^2\})$.

Démonstration. Posons $E = \overline{lin}\,(\mathcal{K} + \{\mathbf{u}^i\, \mathbf{v}^j\, T_f\ \})$ et montrons que $E \subset S \rtimes \widehat{S}$. Ecrivant que les opérateurs $\mathbf{v}^x f_{y,z}(\mathbf{n})\, \rho_{ijk}\, \mathbf{v}^{x'} f_{y',z'}(\mathbf{n})$ appartiennent à $S \rtimes \widehat{S}$ et utilisant (A.2), on obtient que les opérateurs T de la forme :

$$T\, e_{abc} = \delta^x_{a-c}\, \delta^y_b\, A(c+z, y'-y)\, e_{a+x'y'c}$$

où $x, x'y, y'$ et z sont des entiers arbitraires, appartiennent à $S \rtimes \widehat{S}$. Par (A.4 b)), il est clair que $E \subset S \rtimes \widehat{S}$.

Pour montrer l'autre inclusion, nous avons besoin du lemme suivant :

4.15. LEMME. — *Pour tout $(x,y,z) \in \mathbf{Z}^3$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, posons $\Phi_n(b,c) = A(n+x, b+x)A(b-c+y, n-c+z)$. Nous avons :*

$$\sum_b \Phi_n(b,c)^2 \leq \mu^{2(x+z-y)}\, \mu^{2n}$$

Démonstration. Par (A.2 et A.3), nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_b \Phi_n(b,c)^2 &= \sum_b \mu^{2(b+x)}\, A(n-b, -b-x)^2\, A(b-c+y, n-c+z)^2 \\
&\leq \sum_b \mu^{2(b+x)}\, A(b-c+y, n-c+z)^2 \\
&= \mu^{2(c+x-y)} \sum_b \mu^{2b}\, A(b, n-c+z)^2 \\
&= \mu^{2(x+z-y)}\, \mu^{2n}
\end{aligned}$$

Fin de la démonstration de la proposition . Par (4.7a)), la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ est l'espace vectoriel fermé engendré par les opérateurs $L_{xyz}\, \rho_V(\omega_{ijk})$, où L_{xyz} (resp. $\rho_V(\omega_{ijk})$) est l'opérateur défini par $L_{xyz}\, e_{abc} = A(x+b,y)\, e_{a-y,b+z,c+z}$ (resp. $\rho_V(\omega_{ijk})\, e_{abc}$ $= (-1)^k\, \delta^{k-i}_{a-c} \sum_n (-1)^{n-b} A(n-i-j, b-i-j) A(b-c-j, n-c-j-k)\, e_{a-k,n,c+k}$).

Pour montrer qu'un opérateur T de la forme $T = L_{xyz}\, \rho_{ijk}$ appartient à E, il suffit de montrer, grâce à (A.2) et au lemme précédent, que pour chaque $n \in \mathbf{Z}$, on a $T_n \in E$, où T_n est un opérateur de la forme $T_n\, e_{abc} = \delta^x_{a-c}\, \delta^y_b\, A(c+j, n-k-y)\, e_{a-k,n,c+k}$. Or, si $y = n-k$, T_n est clairement un opérateur de E ; si par contre $y \neq n-k$, par (A.4 b)) T_n est compact.

■

Soit α l'action du groupe $S^1 \times \mathbf{Z}$ sur l'espace $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z}$ définie par $\alpha_{z,n}(g)(\zeta,p) = g(z^{-2}\zeta, p-n)$ où $g \in C_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z})$. Posons $C = C_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z}) \rtimes (S^1 \times \mathbf{Z})$ et soit $(z,n) \to u_{z,n}$ le plongement de $S^1 \times \mathbf{Z}$ dans $M(C)$; notons $\mathbf{y}'$ (resp. $\mathbf{p}$) la fonction $(\zeta,p) \to \zeta$ (resp. $(\zeta,p) \to \mu^p$) sur $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z}$. Munissons la C*-algèbre C de l'action du groupe $\mathbf{Z}$ donnée par l'automorphisme γ de C défini par :

$$\gamma(g)(\zeta,p) = g(\mu^{-\frac{1}{2}}\zeta, p+1)\ ,\ g \in C_0(\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \times \mathbf{Z})\ ;\ \gamma(u_{z,n}) = z^{-1}\, u_{z,n}$$

Posons finalement $D = C \rtimes \mathbf{Z}$. Nous avons :

4.16. LEMME. — *D est une extension de $\mathcal{K}$ par $\mathcal{K}$.*

Démonstration. Soit J l'idéal de D défini par $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \setminus \{0\}$. Comme $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \setminus \{0\}$ s'identifie à $\mathbf{Z} \times S^1$, l'idéal J est isomorphe à $\mathcal{K}$ ainsi que le quotient de D par cet idéal.

■

démonstration du théorème

Il suffit de construire un homomorphisme surjectif $\pi : D \to S \rtimes \widehat{S}$ de C*-algèbres tel que $\pi(J) = \mathcal{K}$ où J est l'idéal de D défini par $\mathbf{C}_{\sqrt{\mu}} \setminus \{0\}$.

Soit π la représentation de C dans H définie par $\pi(\mathbf{y}') = -v_0^{-1} n_0^{\frac{1}{2}} \otimes n_0^{-1} \otimes v_0 n_0^{\frac{1}{2}}$, $\pi(\mathbf{p}) = \mid \mathbf{n} \mid = 1 \otimes n_0 \otimes 1$ et $\pi(u_\mu, 1) = \mathbf{x}^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{w}\mathbf{x}^{-1}$. Pour tout $x \in C$, on a $\pi(\gamma(x)) = \mathbf{v}^*\, \pi(x)\, \mathbf{v}$; nous en déduisons une représentation de D dans H notée toujours π. La description de la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$ donnée par (4.14) permet de voir sans peine que $\pi(D) = S \rtimes \widehat{S}$ et que $\pi(J) = \mathcal{K}$.

■

4.17. COROLLAIRE. — *L'opérateur normal* $\mathbf{y}$ *est affilié à la C*-algèbre $S \rtimes \widehat{S}$.*

Démonstration. L'opérateur $\mathbf{y}'$ est affilié à la C*-algèbre D et on a $\pi(\mathbf{y}') = \mathbf{y}$.

■

Explicitons pour terminer la représentation covariante de V correspondant à l'homo-
morphisme quotient $p : S \rtimes \widehat{S} \to S \rtimes \widehat{S}/\mathcal{K} \simeq \mathcal{K}$.

Soit θ (resp. $\widehat{\theta}$), la représentation de S (resp. $\widehat{S}$) dans $l^2(\mathbf{Z}^2)$ définie par $\theta(\mathbf{v}) = 1 \otimes v_0$ et $\theta(\mathbf{n}) = v_0 \otimes n_0$ (resp. $\widehat{\theta}(\mathbf{b}) = v_0^{-1} n_0^{-\frac{1}{2}} \otimes v_0 n_0^{-\frac{1}{2}}$ et $\widehat{\theta}(\mathbf{x}) = n_0^{-1} \otimes n_0$). Posons $X = (\widehat{\theta} \otimes id)(V)$, $Y = (id \otimes \theta)(V)$ et $W' = (\widehat{\theta} \otimes \theta)(V)$.

4.18. PROPOSITION. — *L'homorphisme quotient p est la représentation de $S \rtimes \widehat{S}$ correspondant à la représentation covariante (X, Y) de V. De plus l'unitaire multiplicatif W' associé est non régulier et non irréductible.*

Démonstration. Il est clair que X (resp. Y) est une représentation (resp. coreprésenta- -tion) de V. Par un calcul directe utilisant (4.7) et (A.2 et A.3), on obtient la relation de covariance $Y_{12} V_{13} X_{23} = X_{23} Y_{12}$. Nous avons :

$$W'(e_{ab} \otimes e_{xy}) = \sum_n A(y - a, n) e_{a+n, b-n} \otimes e_{x-n, y+b-a-n}$$

S'appuyant sur la formule précédente, il est facile de voir que W' est non régulier et que le commutant de $S_{W'}$ est commutatif, donc W' est non irréductible. Soit p' la représentation (3.24) de $S \rtimes \widehat{S}$ dans $l^2(\mathbf{Z}^2)$ correspondant à cette représentation covariante ; on a $p'(\mathbf{y}) = 0$, donc $p'(S \rtimes \widehat{S}) = \mathcal{K}(l^2(\mathbf{Z}^2))$ et p' est unitairement équivalente à p. ■

c) Mesures de Haar duales et théorie modulaire

Pour expliciter les mesures de Haar duales, introduisons la famille (ω^{xyz}) de formes continues sur $\widehat{S_V}$ définie par

$$\omega^{xyz}(\rho_V(\omega_{ijk})) = (-\mu)^{-k} \, \delta^{x,z}_{k-i,k} \, A(i + j - y, k) = (f_{-z, y+z, z-x} \mid \rho_V(\omega_{ijk}) f_{0,y,-x})$$

où $f_{xyz} = g_\mu(Q) e_{xyz}$.

4.19. PROPOSITION. — *Nous avons :*
a) $\omega_{f_{x'y'z'}, f_{xyz}} = \delta^{x-x'}_{y'-y} \, \delta^{z'-z}_{y'-y} \, \omega^{x-z, y, x-x'}$ sur $\widehat{S_V}$.

b) $\omega^{xyz} * \omega^{x'y'z'} = \sum_n A(y' - x - y, n) A(y' - x - y + z' + z, n + z) \, \omega^{x+x', y'-x-n, z+z'}$

Démonstration. Nous avons $\widehat{S_V} = \overline{lin}\{\, \rho_V(\omega_{ijk} / (i,j,k) \in \mathbf{Z}^3 \,\}$. Utilisant (4.7a)), il est facile de vérifier l'égalité a) pour tout $x = \rho_V(\omega_{ijk})$.

b) Pour tout i, j, k, posons $T = \rho_V(\omega_{ijk})$; nous avons :

$$\begin{aligned} \omega^{xyz} * \omega^{x'y'z'}(T) &= (\omega^{xyz} \otimes \omega^{x'y'z'} \otimes \omega_{ijk})(V_{12}^* V_{23} V_{12}) \\ &= (\omega^{xyz} \otimes \omega^{x'y'z'} \otimes \omega_{ijk})(V_{13} V_{23}) \\ &= (\omega_{e_{-z, y+z, z-x}; e_{0,y,-x}} \otimes \omega_{e_{-z', y'+z', z'-x'}; e_{0,y',-x'}} \otimes \omega_{ijk})(W_{13} W_{23}) \\ &= \sum_{n,m} A(j - x' - y', n) A(j - x' - x - y - n, m) \delta_n^{-z'} \delta_m^{-z} \delta^{-k}_{n+m} \delta^{k-i}_{x+x'} \\ &= \delta^{k-i}_{x+x'} \, \delta^k_{z+z'} \, A(j - x' - y', -z') \, A(j - x' - x - y + z', -z) \end{aligned}$$

Utilisant (A.2), on obtient $A(j-x'-y',-z') = A(x'+y'-j, x'+y'-z'-j)$ et $A(j-x-x'-y+z',-z) = A(x+x'+y-z'-j, -z+x+x'+y-z'-j)$. Nous en déduisons :

$$\omega^{xyz} * \omega^{x'y'z'}(T) = \delta^{k-i}_{x+x'}\, \delta^{k}_{z+z'}\, A(z'+y'+z-x-i-j, y'+z-x-i-j)A(z+y-i-j, y-i-j)$$

Posons $\xi = y'-x-y+z+z'$, $\alpha = z+z'$, $\eta = y'-x-y$, $\beta = z'$, $\gamma = x+z'-y'+i+j$, on obtient grace à (A.4 a)) :

$$\begin{aligned}
\omega^{xyz} * \omega^{x'y'z'}(T) &= \delta^{k-i}_{x+x'}\, \delta^{k}_{z+z'}\, A(\xi+\beta-\gamma-\eta, \alpha-\gamma)A(\alpha-\gamma-\eta, \beta-\gamma-\eta) \\
&= \delta^{k-i}_{x+x'}\, \delta^{k}_{z+z'}\, (-\mu)^{-\gamma} \sum_n (-\mu)^{-n} A(\xi, n+\alpha)A(\eta, n+\beta)A(\xi-\eta, n+\gamma) \\
&= \delta^{k-i}_{x+x'}\, \delta^{k}_{z+z'}\, (-\mu)^{-k} \sum_n A(\xi, n+\alpha)A(\eta, n+\beta)A(n+\gamma, \xi-\eta) \quad (\text{ A.2 a)}) \\
&= \sum_n A(y'-x-y, n)A(y'+z'-x-y+z, n+z)\omega^{x+x', y'-x-n, z+z'}(T)
\end{aligned}$$

■

Posons $\tau = \sum_{a,b} \mu^{-a-2b}\, \omega^{a,b,0}$ et avec les notations de (4.9), $\widehat{F} = \rho(u_\mu)$.

4.20. PROPOSITION. — *Avec les notations précédentes, nous avons :*

a) *τ est une trace s.c.i, semi-finie normiquement sur $\widehat{S}_V$ et fidèle sur le bicommutant de $\widehat{S}_V$.*

b) *$\widehat{\Phi} = \tau(\widehat{F}^{-1}.)$ et $\Psi = \tau(\widehat{F}.)$ sont des poids s.c.i, semi-finis normiquement sur $\widehat{S}_V$ et fidèles sur le bicommutant de $\widehat{S}_V$.*

c) *La formule $\Lambda_{\widehat{\Phi}}\, \rho_V(\omega_{abc}) = (-1)^c \mu^{-b-c}\, e_{-c,a+b,a}$ identifie l'espace de Hilbert $H_{\widehat{\Phi}}$ de la représentation GNS de $\widehat{\Phi}$ à $H = l^2(\mathbf{Z}^3)$ et la représentation $\pi_{\widehat{\Phi}}$ correspondante à ρ_V.*

d) *L'opérateur modulaire $\Delta_{\widehat{\Phi}}$ et l'opérateur $J_{\widehat{\Phi}}$ canoniquement associés à $\widehat{\Phi}$, sont respectivement donnés par $\Delta_{\widehat{\Phi}}\, e_{abc} = \mu^{-2a}\, e_{abc}$ et $J_{\widehat{\Phi}}\, e_{abc} = (-1)^a\, e_{-a,b,c}$.*

e) *$\rho_V(\widehat{F})$ est affilié au centralisateur du poids $\widehat{\Phi}$ et on a $\widehat{\Phi}(\widehat{F}^2.) = \widehat{\Psi}$.*

Démonstration. a) Par un calcul directe, on voit que pour $x = \rho_V(\omega_{ijk})$, on a $x \in \mathcal{N}_\tau \cap \mathcal{N}_\tau^*$ et que les formes $x\tau$ et τx se prolongent de façon unique au bicommutant de $\widehat{S}$. Il en résulte que τ est semi-finie. Utilisant l'inclusion $U\widehat{S}U \subset \widehat{S}'$ donnée par ([4] 6.5 c)), on voit facilement que τ est fidèle sur l'algèbre de von Neumann S_V''. Comme pour tout $x = \rho_V(\omega_{ijk})$ et tout $y = \rho_V(\omega_{i'j'k'})$, on a $\tau(xy) = \tau(yx)$, τ est une trace sur S_V''.

b) Par (4.9), on sait que $\widehat{F} = \rho(u_\mu)$ est affilié à la C*-algèbre $\widehat{S}$; le b) résulte alors du a) et de [19].

c) Résulte de (4.3), $\rho_V(\omega_{abc})^* = (-\mu)^{-c}\rho_V(\omega_{a,b,-c})$ et d'un calcul directe.

d) et e) résultent du a) et du b) ; voir [22].

■

Il résulte facilement de (4.19 b)) que pour tout x, y on a $\widehat{\Psi} * \omega^{x,y,0} = \widehat{\Psi}$ (resp. $\omega^{x,y,0} * \widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}$) ; en particulier on a $\widehat{\Psi} * \omega^{0,0,0} = \widehat{\Psi}$ (resp. $\omega^{0,0,0} * \widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}$). Procédant comme dans (4.2), on montre :

4.21. THÉORÈME. — *Le poids $\widehat{\Phi}$ (resp. $\widehat{\Psi}$ est une mesure de Haar à gauche (resp. à droite) sur la C^*-algèbre de Hopf $\widehat{S}_V$.*

Nous avons muni chacune des C*-algèbres de Hopf S_V et $\widehat{S_V}$ canoniquement associées à l'unitaire multiplicatif irréductible (V, U), de mesures de Haar : S_V admet une mesure de Haar Φ à gauche et à droite; $\widehat{S_V}$ admet une mesure de Haar $\widehat{\Phi}$ à gauche et une mesure de Haar $\widehat{\Psi}$ à droite, cette dernière étant un poids de densité $\widehat{F}^2$ relativement à $\widehat{\Phi}$. D'autrepart, le carré de l'antipode κ (resp. $\widehat{\kappa}$) engendre un groupe à un paramètre d'automorphismes $(\kappa^2)^{it}$ (resp. $(\widehat{\kappa}^2)^{it}$) sur S_V (resp. $\widehat{S_V}$) implémenté par l'opérateur autoadjoint positif K (resp. $\widehat{K}$) donné par $K = \lambda(\widehat{F})\rho(\widehat{F})$ (resp. $\widehat{K} = K^{-1}$).

Il résulte alors de (4.1) et (4.20) qu'on a (cf. [21]) :

4.22. PROPOSITION. — *a)* $U = J_\Phi J_{\widehat{\Phi}} = J_{\widehat{\Phi}} J_\Phi$

b) les opérateurs modulaires des poids Φ, $\widehat{\Phi}$ et $\widehat{\Psi}$ sont donnés par :

$$\Delta_\Phi = \lambda(\widehat{F})\rho(\widehat{F}^{-1}) \, , \; \Delta_{\widehat{\Phi}} = \lambda(\widehat{F}^{-1})\rho(\widehat{F}^{-1}) \, , \; \Delta_{\widehat{\Psi}} = \lambda(\widehat{F})\rho(\widehat{F}).$$

c) $\delta \circ \sigma_t^\Phi = ((\kappa^2)^{it} \otimes \sigma_t^\Phi) \circ \delta = (\sigma_t^\Phi \otimes (\kappa^2)^{-it}) \circ \delta$ *sur* S_V.

d) $\widehat{\delta} \circ \sigma_t^{\widehat{\Phi}} = ((\widehat{\kappa}^2)^{it} \otimes \sigma_t^{\widehat{\Phi}}) \circ \widehat{\delta} \, , \; \widehat{\delta} \circ \sigma_t^{\widehat{\Psi}} = (\sigma_t^{\widehat{\Psi}} \otimes (\widehat{\kappa}^2)^{-it}) \circ \widehat{\delta}$ *sur* $\widehat{S_V}$.

e) $V \sigma_t^{\widehat{\Phi} \otimes \Phi}(V^*) = \rho(\widehat{F}^{2it}) \otimes 1.$

Procédant comme dans [4], on peut construire le double quantique de tout unitaire multiplicatif irréductible (V, U) semi-birégulier : on obtient un unitaire multiplicatif irréductible semi-birégulier.

Dans le cas du groupe quantique $E_\mu(2)$, l'algèbre réduite $S \otimes \widehat{S}$ (et l'algèbre réduite duale) admettent des mesures de Haar.

4.23. THÉORÈME. — *le poids $\Phi \otimes \widehat{\Phi}$ est une mesure de Haar à gauche et à droite pour le double quantique de $E_\mu(2)$.*

Démonstration. Soit $\tau : S \otimes \widehat{S} \to \widehat{S} \otimes S$ l'inversion donnée par $\tau(x \otimes y) = V(y \otimes x)V^*$, il suffit de montrer que $(\widehat{\Phi} \otimes \Phi) \circ \tau = \Phi \otimes \widehat{\Psi}$. Or par (4.22 e)), pour tout t on a $(D((\widehat{\Phi} \otimes \Phi) \circ \tau) : D(\Phi \otimes \widehat{\Psi}))_t = 1$, où $(D((\widehat{\Phi} \otimes \Phi) \circ \tau) : D(\Phi \otimes \widehat{\Psi}))_t$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym [10] du poids $(\widehat{\Phi} \otimes \Phi) \circ \tau$ relativement au poids $\Phi \otimes \widehat{\Psi}$ sur l'algèbre de von Neumann $S'' \otimes \widehat{S}''$.

■

Appendice A

Dans cette première appendice, nous donnons les preuves des propriétés des coefficients $A(m,j)$ utilisées principalement dans le paragraphe 4.

Considérons l'espace vectoriel réel (de dimension 2) E des suites $(b(m,j))_{(m,j)\in\mathbf{Z}}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ vérifiant pour tout (m,j) :

$$(E.1) \qquad b(m-1,j)\,\mu^j = b(m,j) + b(m,j+1)\,\mu^{m-1}$$

$$(E.2) \qquad b(m,j) = b(m-1,j)\,\mu^{-j} + b(m-1,j-1)\,\mu^{m-j}$$

Nous avons :

A.1 Lemme - *Soit $(b(m,j))$ une suite de E.*
a) $b(m,j) = (-\mu)^j\, b(m-j,-j) = b(-m,j-m) = (-\mu)^{j-m}\, b(j,m)$

b) Les nombres $b_{i,j,k} = (-\mu)^{-j}\, b(i-k,j-k)$ sont invariants par permutation des entiers i,j,k.

Démonstration. Posons $u(m,j) = (-\mu)^j\, b(m-j,-j)$ (resp. $v(m,j) = b(-m,j-m)$). Il est facile de voir que les suites $u(m,j)$ et $v(m,j)$ appartiennent à E. Comme $u(m,0) = b(m,0)$ et $v(0,j) = b(0,j)$ pour tout $m,j \in \mathbf{Z}$, on a donc $u = b = v$; les autres assertions se déduisent immédiatement de ce résultat.

■

Dans le paragraphe 4, nous avons noté g_μ, la fonction introduite par Woronowicz dans [25], définie par :

$$g_\mu(\zeta) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1+\mu^{-1-2j}\zeta}{1+\mu^{-1-2j}\bar{\zeta}}$$

La fonction g_μ est continue sur $\mathbf{C}_\mu$ et, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, la fonction $z \to g_\mu(\mu^m z)$ définie sur S^1, se prolonge en une fonction méromorphe [25] dans $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ dont les pôles sont les nombres $-\mu^{|m|-q}$ où $q = 1,3,5,\ldots$. Nous noterons dans ce qui suit $g_\mu(m,.)$ ce prolongement ; dans [25], il est noté $U(m,.)$. Rappelons également qu' on a posé $A(m,j)$ pour le jième coefficient de Fourier de la restriction de la fonction g_μ au cercle $\{z \in C_\mu / \mid z \mid = \mu^m\}$.

A.2 Proposition - *Nous avons :*
a) La suite $(A(m,j))$ appartient à E.

b) $\lim\limits_{m\to-\infty} A(m,j) = \delta_0^j$ *uniformément en j.*

c) Si $(b(m,j))$ est une suite bornée de E et vérifie $\lim\limits_{m\to-\infty} b(m,0) = 1$, alors nous avons $b(m,j) = A(m,j)$ pour tout (m,j).

Démonstration. a) Pour z de module 1, on a $g_\mu(m,\bar{z}) = \overline{g_\mu(m,z)}$, on en déduit que $A(m,j)$ est réel. La relation (E.1) (resp. (E.2)) résulte de la relation $g_\mu(m-1,\mu z) = (1+\mu^{m-1}z^{-1})\,g_\mu(m,z)$ (resp. $g_\mu(m,z) = (1+\mu^{m-1}z)\,g_\mu(m-1,\mu^{-1}z)$, voir [25].

b) Résulte de $\lim\limits_{m\to-\infty} g_\mu(\mu^m z) = 1$ uniformément en z de module 1.

c) Il résulte de a) et b), qu'il suffit de montrer qu' il existe une suite de E non bornée. Remarquons que toute suite $(b(m,j))$ de E est déterminée par la suite $(b(m,0))$. Posons alors $c_m = b(m,0)$. Il résulte de $(E.1)$ et de $(E.2)$ que la suite (c_m) vérifie la relation de récurrence :

$$c_{m+1} = -c_{m-1} + c_m(2 - \mu^{-2m})$$

Posons $\lambda = \mu^{-2}$ et soit $N \geq 1$ un entier tel que $\dfrac{\lambda^N}{(1-\lambda)^2} \leq 1$. Notons (x_m) la suite définie par $x_N = 0$, $x_{N+1} = 1$ et la relation de récurrence précédente. S'appuyant sur l'égalité :

$$x_m - x_{m-1} = x_1 - x_0 - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^j x_j$$

il est facile de montrer que la suite (x_m) est non bornée. ∎

Nous rassemblons dans la proposition suivante quelques propriétés de sommabilité de la suite$(A(m,n))$.

A.3 Proposition - *Nous avons :*

a) Pour tout entiers $m, x \in \mathbf{Z}$, on a $\sum_n A(m,n+x)\, A(m,n) = \delta_0^x$.

b) Pour tout entiers $n, y \in \mathbf{Z}$, on a $\sum_m \mu^{2m}\, A(m+y,n)\, A(m,n) = \mu^{2n}\, \delta_0^y$

c) Pour tout entiers a_i, h_i $(i = 1,2)$, on a :

$$\sum_n A(a_1, n+h_1)\, A(a_2, n+h_2)\, A(a_1 - n, a_2 - n) = A(h_1,h_2)\, A(a_1 + h_2, a_2 + h_1).$$

Démonstration. a) Pour tout z de module 1, on a $|\, g_\mu(\mu^m z)\,| = 1$; le a) résulte alors de l'égalité de Parseval.

b) Par (A.2), on a $A(m,n) = (-\mu)^{n-m}\, A(n,m)$; le b) découle alors immédiatement du a).

c) Fixons h_1, h_2 et posons $\alpha(m,j) = \sum_n A(m,n+h_1)A(j,n+h_2)A(m-n,j-n)$ (resp. $\beta(m,j) = A(m+h_2, j+h_1)$). Il résulte de $(E.1)$ et de $(E.2)$ que les deux suites $(\alpha(m,j))$ et $(\beta(m,j))$ vérifient les deux relations de récurrence :

$(E'.1)$ $\qquad b(m-1,j)\, \mu^{j+h_1-h_2} = b(m,j)\, \mu^{-h_2} + b(m,j+1)\, \mu^{m-1}$

$(E'.2)$ $\qquad b(m,j)\, \mu_1^h = b(m-1,j)\, \mu^{-j} + b(m-1,j-1)\, \mu^{m-j+h_2}$

Par le a), il est clair que la suite $(\alpha(m,j))$ est bornée. Il résulte alors de (A.2 c)) que les deux suites $(\alpha(m,j))$ et $(\beta(m,j))$ sont proportionnelles. Posons alors $\alpha(m,j) = \lambda(h_1,h_2)\, \beta(m,j)$ où $\lambda(h_1,h_2) \in \mathbf{R}$. Or pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on a $\sum_n |\, A(m,n)\,| < \infty$; en faisant $j = -h_1$, il découle alors de (A.2 a) et b)) qu' on a :

$$\lim_{m\to-\infty}\sum_n A(m,n+h_1)A(-h_1,n+h_2)A(m-n,-h_1-n)=A(-h_1,-h_1+h_2)$$
$$=A(h_1,h_2).$$

comme $\lim_{m\to-\infty} A(m+h_2,0)=1$, on a bien $\lambda(h_1,h_2)=A(h_1,h_2)$. ■

A.4 Remarques -

a) Il résulte d'un calcul facile s'appuyant sur (A.2 a)) que la formule :

$$\sum_n A(a_1,n+h_1)\,A(a_2,n+h_2)\,A(a_1-n,a_2-n)=A(h_1,h_2)\,A(a_1+h_2,a_2+h_1).$$

est équivalente à la relation :

$$\sum_n(-\mu)^{-n}A(x,n+a)\;A(y,n+b)\;A(x-y,n+c)$$
$$=(-\mu)^cA(a-c-y,b-c-y)\;A(b-c-y+x,a-c)$$

b) Soit $n\in\mathbf{Z}$, posons $q_n(a)=A(a,n)$. Pour tout $j\in\mathbf{Z}$, notons τ_j l'opérateur de translation par j et soit $\mathcal{A}_n$ l'algèbre des polynômes sans termes constants en $\{\tau_j q_n \;/\; j\in\mathbf{Z}\}$. Si $n\neq 0$, il résulte facilement du théorème de Stone-Weierstrass que l'algèbre $\mathcal{A}_n$ est dense dans $C_0(\mathbf{Z})$. Dans le cas où $n=0$, on voit de même que $\mathcal{A}_n$ est dense dans $C_0(\mathbf{Z}\cup\{-\infty\})$.

Appendice B

Dans cette seconde appendice, nous complétons la preuve du théorème (4.2) et nous montrons l'unicité de la mesure de Haar de $E_\mu(2)$. Nous conservons les notations du paragraphe 4.

B.1 Lemme - *Soit f une forme linéaire positive sur S_V. Alors pour tout $\xi\in H$, il existe une famille (ξ_i) (resp. (ξ_i') dans H telle que $f*\omega_\xi=\sum_i\omega_{\xi_i}$ (resp. $\omega_\xi*f=\sum_i\omega_{\xi_i'}$) et $\|f\|\|\xi\|^2=\sum_i\|\xi_i\|^2$ (resp. $\|f\|\|\xi\|^2=\sum_i\|\xi_i'\|^2$.*

Démonstration. On a par (3.10), $\widehat{V}\in M(S_V\otimes\mathcal{K})$ et pour tout $x\in S_V$, on a aussi $\delta(x)=\widehat{V}^*(1\otimes x)\widehat{V}$. Notons alors (π_f,H_f,ξ_f) la représentation GNS de la forme positive f et posons $(\pi_f\otimes id)(\widehat{V})(\xi_f\otimes\xi)=\sum_i\eta_i\otimes\xi_i$, où (η_i) est une base orthonormée de l'espace de Hilbert H_f. On a alors pour tout $x\in S_V$:

$$\begin{aligned}(f*\omega_\xi)(x)&=(f\otimes\omega_\xi)(\delta(x))\\&=<\xi_f\otimes\xi,(\pi_f\otimes id)(\widehat{V})^*(1\otimes x)(\pi_f\otimes id)(\widehat{V})>\\&=\sum_i<\xi_i,x\xi_i>\end{aligned}$$

L'assertion resp. se démontre de la même façon en remarquant (3.10) que $V \in M(\mathcal{K} \otimes S_V)$ et (3.12) que $\delta(x) = V(x \otimes 1)V^*$ pour tout $x \in S_V$.

■

fin de la démonstration de (4.2). Soit f une forme positive sur $A = S_V$, posons $f * \omega_{000} = \sum_i \omega_{\xi_i}$ avec $\|f\| = \sum_i \|\xi_i\|^2$. Par (4.6), on a alors :

$$\begin{aligned} \Phi(x * f) &= \Phi(x * f * \omega_{000}) \\ &= \sum_i \Phi(x * \omega_{\xi_i}) \\ &= \sum_i \|\xi_i\|^2 \Phi(x) = \|f\| \, \Phi(x) \end{aligned}$$

On montre de même que $\Phi(f * x) = \|f\| \, \Phi(x)$.

■

B.2 Remarque - : Soit ϕ un poids s.c.i normiquement sur A. Alors pour tout $\xi \in H$, il existe une famille de vecteurs (ξ_i) (resp. (η_i) de H telle que $\omega_\xi * \phi = \sum_i \omega_{\xi_i}$ (resp. $\phi * \omega_\xi = \sum_i \omega_{\eta_i}$. En effet, par [19], il existe une famille de formes positives sur A telle que $\phi = \sum_i f_i$; il suffit alors d'appliquer B.1 aux formes $\omega_\xi * f_i$ et $f_i * \omega_\xi$.

B.3 Proposition - *Soit ϕ un poids s.c.i et semi-fini normiquement sur A invariant à gauche, i.e pour tout vecteur ξ de H on a $\omega_\xi * \phi = \|\xi\|^2 \phi$. Si ϕ est invariant par le groupe à un paramètre d'automorphismes $(\kappa^2)^{it}$, alors il exite $\lambda \geq 0$ tel que $\phi = \lambda \, \Phi$.*

Démonstration. Il résulte de la formule (4.22 c)) $\delta \circ \sigma_t^\Phi = (\sigma_t^\Phi \otimes (\kappa^2)^{-it}) \circ \delta$ et de l'invariance de ϕ par $(\kappa^2)^{it}$ qu' on a $\phi = \phi \circ \sigma_t^\Phi$ pour tout t. Il en résulte que $\phi = \phi \circ E$ où $E : A \to C_0(\mathbf{C}_\mu)$ est l'espérance conditionnelle associées à l'action duale donc, ϕ étant semi-fini, sa restriction à $C_0(\mathbf{C}_\mu)^+$ est une mesure positive qui le détermine complétement. Comme $(\kappa^2)^{it}(\mathbf{n}) = \mu^{2it}\, \mathbf{n}$ et que $\phi = \phi \circ (\kappa^2)^{it}$, la restriction de ϕ à chaque cercle $\{z \in \mathbf{C}_\mu \ / \ | z | = \mu^j\}$ est proportionnelle à sa mesure sa mesure de Haar. Soit $\alpha_j \in [0, \infty]$ le facteur de proportionnalité, posons $\beta_j = \alpha_j \, \mu^{-2j}$; nous allons montrer que la suite (β_j) est constante.

Par ([3] 2.), on a pour tout i, j entiers $f_{j0}(\mathbf{n}) * \omega_{0i0} = \sum_n A(i-n, j-n)^2 \, f_{n0}(\mathbf{n})$.

Par invariance à gauche de ϕ, on en déduit :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \sum_n A(i-n, j-n)^2 \, \alpha_n \\ &= \sum_n A(i-j, n-j)^2 \, \mu^{2(j-n)} \, \alpha_n \qquad \text{par} \quad (A.2) \end{aligned}$$

donc $\beta_j = \sum_n A(i-j, n-j)^2 \, \beta_n$. Comme les entiers i, j sont arbitraires, on a donc :

$$\begin{aligned}\beta_j &= \sum_n A(i,n-j)^2\,\beta_n \\ &= \sum_n A(-i,n-j-i)^2\,\beta_n \qquad \text{par} \quad (A.2) \\ &= \beta_{i+j}\end{aligned}$$

■

Références bibliographiques

[1] S. Baaj : Prolongement d'un poids. C.R. Acad. Sci. 288 (1979) 1013-1015.

[2] S. Baaj : Thèse, Univ. P. et M. Curie, Paris (1980).

[3] S. Baaj : Représentation régulière du groupe quantique $E_\mu(2)$. C.R. Acad. Sci. 314 (1992) 1021-1026.

[4] S. Baaj et G. Skandalis : Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*- algèbres. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4^e série, t. 26, 1993, 425-488.

[5] S. Baaj et G. Skandalis : En préparation.

[6] N. Bourbaki : Intégration. Chap. 7 à 8, Hermann, 1963.

[7] F. Combes : Poids sur une C*-algèbre. J. Math. Pures Appl. 47 (1968) 57-100.

[8] F. Combes : Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche. Compositio Math. 23 (1971) 49-77.

[9] F. Combes : Systèmes hilbertiens à gauche et représentation de Gelfand-Segal. Int. Conf. on operator Algebra and Group Representations. Monographes Series in Math.7 (1982) 71-107.

[10] A. Connes : Une classification des facteurs de type III. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 6 (1973) 133-252.

[11] M. Enock : Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par une algèbre de Kac. I J.F.A. 26 n°1 (1977) 16-46.

[12] M. Enock et J.M. Schwartz : Une dualité dans les algèbres de von Neumann. Bull. S.M.F. Suppl. mémoire 44 (1975) 1-144.

[13] M. Enock et J.M. Schwartz : *Kac algebras and duality of locally compact groups.* Springer, Berlin (1992).

[14] M. Enock et J.M. Vallin : C*-algèbres de Kac et algèbres de Kac. Proc. London Math.Soc. (3) 66 (1993) p. 619-650.

[15] U. Haagerup : On the dual weights of crossed products of von Neumann algebras. Math. Scand. 43 (1978) 119-140.

[16] G.I. Kac et L.I. Vainerman : Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann

algebras. Math. USSR Sb. 23 (1974) 185-214. Translated from Matem. Sb. 94 (136) (1974), 2 194-225.

[17] S.H. Majid : Hopf von Neumann algebra Bicrossproducts, Kac Algebras Bicrossproducts, and the classical Yang-Baxter equation. JFA 95 n° 2, (1991) 291-319.

[18] G.K. Pedersen : *C*-algebras and their automorphism groups.* Academic press. (1979).

[19] G.K. Pedersen and M. Takesaki : The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. Acta Math. 130 (1973) 53-87.

[20] P. Podles et S.L. Woronowicz : Quantum deformation of Lorentz group. Comm. Math. Phys. 130 (1990) 381-431.

[21] G. Skandalis : Operator Algebras and Duality. Proceedings of the International Congress of Mathmaticians. 2 (1990) 997-1009.

[22] S. Stratila : *Modular theory in operateur algebras.* Academiei and Abacus Press. (1981).

[23] S. Stratila, D. Voiculescu annd L. Zsido : On crossed products. I and II. Rev. Roumaine Math. P. et Appl. 21 (1976) 1411-1449 and 22 (1977) 83-117.

[24] M. Takesaki : *Duality and von Neumann algebras.* LNM 247 (1972) 665-779.

[25] S.L.Woronowicz : Unbounded elements affiliated with C*-algebras and non compact quantum groups. Comm. Math. Phys. 136 (1991) 399-432.

[26] S.L.Woronowicz : Quantum E(2) group and its Pontryagin dual.Preprint.

[27] S.L. Woronowicz : Operator equalities related to Quantum E(2) group. Preprint.

[28] S.L. Woronowicz and S. Zakrzewski : Quantum Lorentz group having Gauss decomposition property. Preprint.

Saad BAAJ

Département de Mathématiques

Université d'Orléans

45046 Orléans Cedex