Astérisque

HELMUT A. HAMM

Cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ et cohomologie de De Rham : Exemples

Astérisque, tome 179-180 (1989), p. 113-144

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__179-180__113_0>

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ et
cohomologie de De Rham : Exemples

Helmut A. Hamm (Münster)

§ 0. Introduction

Considérons d'abord la cohomologie d'une variété algébrique complexe X à coefficients constants, en particulier à coefficients dans $\mathbb{Z}$: $H^r(\underline{X}; \mathbb{Z})$. Ici $\underline{X}$ est l'espace analytique correspondant. Pour calculer les groupes $H^r(\underline{X}; \mathbb{Z})$ il suffit de déterminer pour tout nombre premier p les groupes $H^r(\underline{X}; \mathbb{Z}_p)$, où $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n\}$.

Si X est lisse on peut calculer $H^r(\underline{X}; \mathbb{C})$ par la cohomologie de De Rham : comme le complexe de De Rham holomorphe $\Omega^{\bullet}_{\underline{X}}$ forme une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}_{\underline{X}}$, on a

$$H^r(\underline{X}; \mathbb{C}) = H^r(\underline{X}, \mathbb{C}_{\underline{X}}) = \mathbb{H}^r(\underline{X}, \Omega^{\bullet}_{\underline{X}})$$

et le théorème de comparaison de Grothendieck [Gr 1] dit que

$$\mathbb{H}^r(\underline{X}, \Omega^{\bullet}_{\underline{X}}) = \mathbb{H}^r(X, \Omega^{\bullet}_X)$$

où $\Omega^{\bullet}_X$ est le complexe de De Rham algébrique. Au total, les groupes de cohomologie à coefficients dans $\mathbb{C}$ sont isomorphes aux groupes de cohomologie de De Rham $\mathbb{H}^r(X, \Omega^{\bullet}_X)$.

Question : est-ce qu'il y a une relation similaire quand on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{Z}_p$? Dans ce cas, on suppose que X est déjà défini sur $\mathbb{Z}_p$. On va considérer des exemples où la cohomologie de De Rham (ordinaire ou convenablement modifiée) conduit aux mêmes résultats que la cohomologie de l'espace analytique correspondant à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$.

Voici une esquisse des résultats principaux :

Soit d'abord X une intersection complète lisse de dimension n dans l'espace projectif (ordinaire) $\mathbb{P}^m$ sur $\mathbb{Z}_p$. On peut déduire facilement d'un calcul de P. Deligne [De 2] qu'on a (voir théorème 1.2 ci-dessous) :

Théorème 0.1. :

a) $H^j(X, \Omega^i_X) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ 0 \leq i = j \leq n \ , \ i \neq \frac{n}{2} \\ \text{libre}, \quad i+j = n \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$

b) $\mathbb{H}^r(X, \Omega^\bullet_X) \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(X, \Omega^i_X)$

c) $\mathbb{H}^r(X, \Omega^\bullet_X)$ et $H^r(\underline{X}; \mathbb{Z}_p)$ sont libres, du même rang.

Considérons maintenant une situation plus générale où X est définie par des polynômes quasihomogènes $f_1,\dots,f_k$ de degrés $d_1,\dots,d_k$ par rapport aux poids $w_0,\dots,w_m$ dans l'espace projectif tordu correspondant $\operatorname{Proj} \mathbb{Z}_p[z_0,\dots,z_m]$, avec $\deg z_\nu = w_\nu$. Supposons que le cône épointé $\tilde{X}$ associé à X soit lisse de dimension $n+1$, où $n = m-k$. Il est convenable d'utiliser un complexe de De Rham modifié $\tilde{\Omega}^\bullet_X$ de X qui coïncide avec $\Omega^\bullet_X$ dans le cas classique $w_0 = \dots = w_m = 1$.

En remplaçant $\Omega^\bullet_X$ par $\tilde{\Omega}^\bullet_X$, le théorème 0.1 est encore valable sous chacune des hypothèses supplémentaires A, B ou C, qu'on va décrire :

A une renumérotation près nous pouvons supposer qu'il y a des nombres ℓ , κ tels que $p|w_\nu \iff \nu \leq \ell$, $p|d_j \iff j \leq \kappa$. La sous-variété Z de l'espace projectif tordu définie par $z_{\ell+1},\dots,z_m$ peut être considérée comme le lieu mauvais, donc l'hypothèse suivante est naturelle :

A) $X \cap Z = \emptyset$.

D'autre part l'espace projectif tordu lui-même ne présente guère de difficulté :

B) $k = 0$.

Il est peut-être moins évident qu'on peut aussi traiter le cas :

C) $k > 0$, $\kappa = 0$.

Les théorèmes qui correspondent au théorème 0.1 dans les cas A,B et C sont les théorèmes 3.2, 3.5 et 3.6.

En outre, on va traiter aussi le cône épointé $\tilde{X}$ associé à X . On a une graduation naturelle sur les groupes de cohomologie $H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})$; il est convenable de considérer seulement la partie $H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$ en degré 0 . Dans le cas classique $w_0 = \dots = w_m = 1$ ainsi que sous l'hypothèse A,B ou C il y a un nombre $\Delta \in \mathbb{Z}_p$ tel qu'on a :

Théorème 0.2. :

a) (i) $$H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ (i,j) \in \{(0,0) \ , \ (n+1,n)\} \\ 0, \ i+j \notin \{n,n+1\}, (i,j) \notin \{(0,0),(n+1,n)\} \\ \text{libre}, \quad i+j = n+1 \ , \ i \neq j \text{ ou } i+j = n \end{cases}$$

(ii) $$\operatorname{rg} H^j(\tilde{X}, \Omega^{i+1}_{\tilde{X}})_0 = \operatorname{rg} H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$$

$$= \begin{cases} \operatorname{rg} H^j(X, \Omega^i_X) \quad , \ i+j = n \ , \ i \neq j \\ \operatorname{rg} H^j(X, \Omega^i_X) - 1 \ , \ i = j = \frac{n}{2} \end{cases}$$

(iii) $$\operatorname{Tor} H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 = \mathbb{Z}_p/\Delta \cdot \mathbb{Z}_p \ , \ i = j = \frac{n+1}{2}$$

b) $$\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_0 \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$$

c) Pour chaque r les modules $H^r(\underline{\tilde{X}}, \mathbb{Z}_p)$ et $\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_0$ ont le même rang et la même torsion.

Plus précisément, on a $\Delta = d_1 \cdot \ldots \cdot d_k$ dans le cas classique (théorème 1.4), $\Delta = \dfrac{d_1 \cdot \ldots \cdot d_k}{w_0 \cdot \ldots \cdot w_m}$ dans le cas A (théorème 3.3) et $\Delta = 1$ dans les cas B (théorème 3.4) et C (théorème 3.7).

Après la lecture on va constater qu'il y a plus de questions que de réponses. Je ne dispose pas d'une comparaison directe entre la cohomologie à valeurs dans $\mathbb{Z}_p$ et la cohomologie de De Rham ; toutefois on va voir un certain parallèlisme des calculs. Notons qu'il est important pour le traitement de ces exemples que beaucoup de groupes de cohomologie s'annulent. Je dois laisser aux spécialistes la formulation de conjectures générales.

§ 1. Exemple introductif : intersections complètes dans l'espace projectif ou affine.

Soit X une intersection complète lisse de dimension n sur $\mathbb{Z}_p$, définie dans $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}_p} := \operatorname{Proj} \mathbb{Z}_p[z_0,\ldots,z_m]$ par $k = m-n$ polynômes homogènes

$f_1,\dots,f_k \in \mathbb{Z}_p[z_0,\dots,z_m]$, soit d_j le degré de f_j , $j = 1,\dots,k$. Pour l'espace analytique correspondant $\underline{X}$ on a le résultat suivant bien connu, en utilisant le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes et la dualité de Poincaré :

Théorème 1.1. :

$$H^r(\underline{X};\, \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p\ , & 0 \leq r \leq 2n\ ,\ r \text{ pair},\ r \neq n \\ \text{libre (sur } \mathbb{Z}_p)\ , & r = n \\ 0 \quad \text{sinon} & \end{cases}$$

La cohomologie de De Rham des intersections complètes lisses a été étudiée par P. Deligne [De 2] . En particulier, son théorème 1.5 donne, si τ dénote le morphisme $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$:

Proposition 1.1. :

a) $R^j \tau_* \Omega^i_X$ est un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p}$-module libre pour tous i,j ;

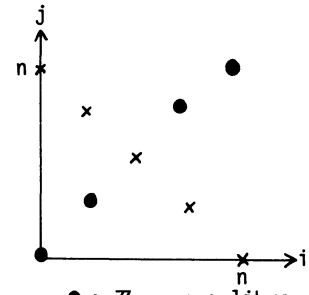
b) La suite spectrale $E_1^{ij} := R^j \tau_* \Omega^i_X \Longrightarrow \mathbb{R}^{i+j} \tau_* \Omega^\bullet_X$ dégénère en E_1 .

Ici $\Omega^i_X := \Omega^i_{X/\mathbb{Z}_p}$. (Notons qu'un $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p}$-module localement libre est automatiquement libre).

Il est maintenant facile de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.2. :

a) $$H^j(X, \Omega^i_X) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p\ , & 0 \leq i = j \leq n\ ,\ i \neq \frac{n}{2} \\ \text{libre}, & i+j = n \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$



● : $\mathbb{Z}_p$, x : libre

b) $\mathbb{H}^r(X, \Omega^\bullet_X) \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(X, \Omega^i_X)$

c) $\mathbb{H}^r(X, \Omega^\bullet_X)$ et $H^r(\underline{X};\, \mathbb{Z}_p)$ sont libres, du même rang.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 1.1 on a $\mathbb{R}^r \tau_* \Omega^\bullet_X \cong \bigoplus_{i+j=r} R^j \tau_* \Omega^i_X$. L'application du foncteur $H^0(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p\ ,\dots)$ donne b), les modules $H^j(X, \Omega^i_X)$ étant libres. Soit $X_{\mathbb{C}}$ la variété algébrique complexe qui correspond à X ; on a

$$H^j(X, \Omega^i_X) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C} \cong H^j(X_{\mathbb{C}}, \Omega^i_{X_{\mathbb{C}}}) \underset{\text{GAGA}}{\cong} H^j(\underline{X}, \Omega^i_{\underline{X}}) .$$

Il est bien connu que $\dim H^i(\underline{X}, \Omega^i_{\underline{X}}) \geq 1$, $0 \leq i \leq n$, $H^r(\underline{X}, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(\underline{X}, \Omega^i_{\underline{X}})$ (décomposition de Hodge). Le reste est clair à cause du théorème 1.1. Notons qu'en fait la décomposition de Hodge est utilisée dans [De 2] pour démontrer la partie b) de la proposition 1.1.

Au lieu de X considérons maintenant le cône épointé $\tilde{X}$ sur X . Plus précisément : Soit $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{m+1} := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p[z_0,\dots,z_m]$, soit $\mathbb{A}^*$ le complémentaire de la sous-variété de $\mathbb{A}$ définie par l'idéal $(z_0,\dots,z_m)$, et $\tilde{X}$ la sous-variété de $\mathbb{A}^*$ définie par l'idéal $(f_1,\dots,f_k)$. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ le morphisme canonique. Considérons la cohomologie de $\tilde{X}$. Le résultat suivant est bien connu :

Proposition 1.2. : Il y a une suite exacte (de Gysin) $\dots H^{r-1}(\underline{\tilde{X}}; \mathbb{Z}_p) \to H^{r-2}(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \to H^r(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \to H^r(\underline{\tilde{X}}; \mathbb{Z}_p) \to$.

Pour calculer $H^r(\underline{\tilde{X}}; \mathbb{Z}_p)$ il faut déterminer les flèches $H^{r-2}(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \to H^r(\underline{X}; \mathbb{Z}_p)$. Soit $\alpha \in H^2(\underline{X}; \mathbb{Z}_p)$ l'image du générateur canonique de $H^2(\underline{\mathbb{P}}^m ; \mathbb{Z}_p)$; on sait que α^{r-1} est appliqué sur α^r .

Soit $\Delta := d_1 \cdot \dots \cdot d_k$. Rappelons :

Proposition 1.3. :

a) α^r est un générateur de $H^{2r}(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, $0 \leq r < \frac{n}{2}$,

b) α^r engendre un facteur direct de $H^n(\underline{X}; \mathbb{Z}_p)$, si $n = 2r$,

c) il y a un générateur β_r de $H^{2r}(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ tel que $\alpha^r = \Delta \cdot \beta_r$, si $\frac{n}{2} < r \leq n$.

<u>Démonstration</u> : a) par le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes.

b) D'après le même théorème, $H^{n+1}(\underline{\mathbb{P}}^m, \underline{X}; \mathbb{Z}_p)$ est libre ; la suite exacte

$$0 \to H^n(\underline{\mathbb{P}}^m; \mathbb{Z}_p) \to H^n(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \to H^{n+1}(\underline{\mathbb{P}}^m, \underline{X}; \mathbb{Z}_p)$$

entraîne b).

c) A cause de a) et de la dualité de Poincaré il suffit de montrer ceci pour $r = n$. On choisit une surjection linéaire $\mathbb{A}^{m+1}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{C}}$ telle que la composition de $X \hookrightarrow \mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ avec l'application rationnelle induite $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ définisse une application rationnelle dominante $X \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Le degré de cette application est Δ , ce qui

implique l'assertion pour $r = n$.

Pour simplifier l'énoncé du théorème suivant supposons que $n > 0$. Pour un $\mathbb{Z}_p$-module M soit $\operatorname{rg} M$ le rang de M et $\operatorname{Tor} M := \{ c \in M \mid \exists \ell \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} : \ell \cdot c = 0 \}$ la torsion de M .

Théorème 1.3. :

$$\text{(i)}\quad H^r(\underline{\tilde{X}};\mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ r = 0 \ , \ 2n+1 \\ 0 \ , \ r \notin \{0, n, n+1, 2n+1\} \\ \text{libre}, \ r = n+1, \ n \text{ pair, ou } r = n \end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad \operatorname{rg} H^n(\underline{\tilde{X}} \ ; \mathbb{Z}_p) = \operatorname{rg} H^{n+1}(\underline{\tilde{X}}; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \operatorname{rg} H^n(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \ , \ n \ \text{ impair} \\ \operatorname{rg} H^n(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) - 1 \ , \ n \ \text{ pair} \end{cases}$$

$$\text{(iii)}\quad \operatorname{Tor} H^{n+1}(\underline{\tilde{X}}; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p / \Delta \cdot \mathbb{Z}_p \ , \ n \ \text{ impair.}$$

<u>Démonstration</u> : Ceci résulte du théorème 1.1 et des propositions 1.2 et 1.3.

On va étudier maintenant l'analogue de la suite exacte de Gysin pour la cohomologie de Hodge (c.-à-d. $H^j(X, \Omega^i_X)$) ou de De Rham.

Soit maintenant α l'image du générateur canonique de $H^1(\mathbb{P}^m, \Omega^1_{\mathbb{P}^m})$ dans $H^1(X, \Omega^1_X)$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.5 (iii) de Deligne [De 2] :

Proposition 1.4. :

a) α^r est un générateur de $H^r(X, \Omega^r_X) \cong \mathbb{Z}_p$, $0 \leq r < \frac{n}{2}$,

b) α^r engendre un facteur direct de $H^r(X, \Omega^r_X)$, si $n = 2r$

c) il y a un générateur β_r de $H^r(X, \Omega^r_X) \cong \mathbb{Z}_p$ tel que $\alpha^r = \Delta \cdot \beta_r$, si $\frac{n}{2} < r \leq n$.

Les $\mathcal{O}_X$-modules $\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}}$ sont munis d'une graduation naturelle : $\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}} = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} (\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}})_s$. Donc $H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}}) = H^j(X, \pi_* \Omega^i_{\tilde{X}})$ est aussi gradué (π est affine). Soit $\partial_i : \Omega^i_{\tilde{X}} \to \Omega^{i-1}_{\tilde{X}}$ la contraction par le champ d'Euler : $\sum_{\nu=0}^{m} z_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}$; on obtient un complexe de chaînes exact :

$$0 \longrightarrow \Omega^{n+1}_{\tilde{X}} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Omega^n_{\tilde{X}} \to \dots \to \Omega^1_{\tilde{X}} \xrightarrow{\partial_1} \Omega^0_{\tilde{X}} \longrightarrow 0$$

qui reste exact quand on applique le foncteur π_* .

Le morphisme $\partial_i : \pi_* \Omega^i_{\tilde{X}} \to \pi_* \Omega^{i-1}_{\tilde{X}}$ est compatible avec les graduations. On a

$$\Omega^i_X = \ker[\partial_i : (\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \longrightarrow (\pi_* \Omega^{i-1}_{\tilde{X}})_0]$$

donc une suite exacte :

$$0 \to \Omega^i_X \longrightarrow (\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \xrightarrow{\partial_i} \Omega^{i-1}_X \longrightarrow 0$$

qui s'insère dans une suite de complexes de De Rham :

$$0 \to \Omega^\cdot_X \to (\pi_* \Omega^\cdot_{\tilde{X}})_0 \longrightarrow \Omega^{\cdot -1}_X \longrightarrow 0 \ .$$

Ceci entraîne :

Proposition 1.5. : Il y a des suites exactes "de Gysin"

$$\ldots \to H^{j-1}(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \to H^{j-1}(X, \Omega^{i-1}_X) \to H^j(X, \Omega^i_X) \to H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \longrightarrow \ldots$$

et $\ldots \to \mathbb{H}^{r-1}(\tilde{X}, \Omega^\cdot_{\tilde{X}})_0 \to \mathbb{H}^{r-2}(X, \Omega^\cdot_X) \to \mathbb{H}^r(X, \Omega^\cdot_X) \to \mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^\cdot_{\tilde{X}})_0 \longrightarrow \ldots$

Théorème 1.4. :

a) (i) $$H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ (i,j) \in \{(0,0) \ , \ (n+1,n)\} \\ 0 \ , \ i+j \notin \{n,n+1\}, \ (i,j) \notin \{(0,0) \ , \ (n+1,n)\} \\ \text{libre}, \ \ i+j = n+1 \ , \ i \neq j \ \text{ ou } \ i+j = n \end{cases}$$

(ii) $$\operatorname{rg} H^j(\tilde{X}, \Omega^{i+1}_{\tilde{X}})_0 = \operatorname{rg} H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 = \begin{cases} \operatorname{rg} H^j(X, \Omega^i_X) \ , \ i+j = n, \ i \neq j \\ \operatorname{rg} H^j(X, \Omega^i_X) - 1 \ , \ i = j = \frac{n}{2} \end{cases}$$

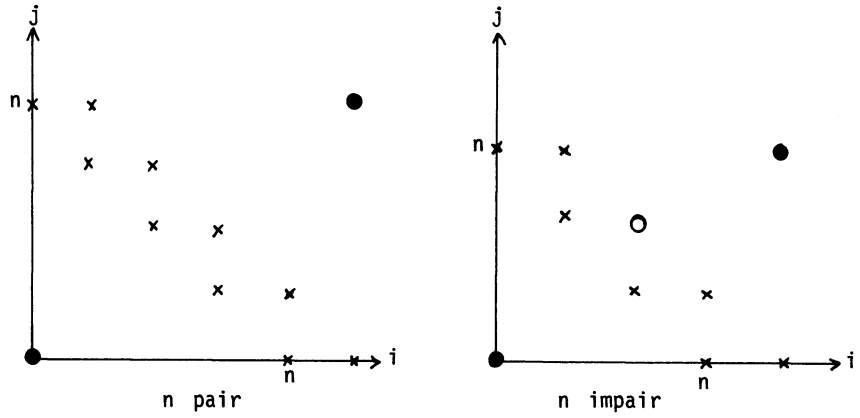
(iii) $$\operatorname{Tor} H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 = \mathbb{Z}_p/\Delta \cdot \mathbb{Z}_p \ , \quad i = j = \frac{n+1}{2}$$

b) $$\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^\cdot_{\tilde{X}})_0 \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$$

c) Pour chaque r les modules $H^r(\underline{\tilde{X}}; \mathbb{Z}_p)$ et $\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^\cdot_{\tilde{X}})_0$ ont le même rang et la même torsion.

Esquisse des modules $H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$:

● : $\mathbb{Z}_p$, x : libre , o : torsion possible



<u>Remarque</u> : La partie c) implique $\dim H^r(\tilde{\underline{X}}; \mathbb{C}) = \dim \mathbb{H}^r(\tilde{X}_{\mathbb{C}}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}_{\mathbb{C}}})_0$. D'autre part nous avons rappelé que $H^r(\tilde{\underline{X}}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^r(\tilde{X}_{\mathbb{C}}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}_{\mathbb{C}}})$, ce qui implique $\mathbb{H}^r(\tilde{X}_{\mathbb{C}}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}_{\mathbb{C}}})_s = 0$ pour $s \neq 0$. On peut déduire ceci directement du fait que la restriction de $\partial_{i+1} \circ d^i + d^{i+1} \circ \partial_i$ à $(\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}})_s$ est la multiplication par s , cf. [Do] 2.1.3 (d^i := opérateur de Cartan) : on a ici un opérateur d'homotopie qui montre que les multiplications par s et 0 sur $\mathbb{H}^j(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_s$ coïncident. Donc $\mathbb{H}^j(\tilde{X}_{\mathbb{C}}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}_{\mathbb{C}}})_s = 0$, $s \neq 0$.

Ceci n'entraîne pas que $\mathbb{H}^j(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_s = 0$ pour $s \neq 0$, donc il n'est pas clair que l'on puisse omettre l'indice 0 dans c).

Dans les paragraphes suivants on va considérer une situation plus générale et étudier des intersections complètes quasihomogènes. On va garder l'hypothèse que $\tilde{X}$ est lisse mais permettre à X d'avoir des singularités ; il est donc préférable de modifier le complexe de De Rham de X . On ne va pas étudier la situation la plus générale mais se borner à des cas où on garde essentiellement les mêmes résultats qu'ici.

Notons enfin que les théorèmes ci-dessus seront aussi des conséquences des théorèmes démontrés dans les paragraphes suivants.

§ 2. Cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ de quelques intersections complètes quasi-homogènes

Supposons que $f_1,\dots,f_k \in \mathbb{C}[z_0,\dots,z_m]$ sont quasihomogènes de degrés $d_1,\dots,d_k$ par rapport aux poids $w_0,\dots,w_m$, c.-à-d. $f_j = \Sigma\, \alpha_{\nu_0\dots\nu_m} z_0^{\nu_0}\cdot\dots\cdot z_m^{\nu_m}$, où $\alpha_{\nu_0\dots\nu_m} = 0$ si $\nu_0 w_0 + \dots + \nu_m w_m \neq d_j$. Les entiers $w_0,\dots,w_m$ sont choisis tels qu'ils ne sont pas tous divisibles par un nombre premier p donné.

Définissons une graduation de $\mathbb{C}[z_0,\dots,z_m]$ par $\deg z_\nu := w_\nu$, $\nu = 0,\dots,m$. Supposons que $f_1,\dots,f_k$ définissent une sous-variété lisse $\tilde{X}$ de dimension $n+1$ de $\mathbb{A}^*_{\mathbb{C}}$, où $n := m-k$ et $\mathbb{A}^*_{\mathbb{C}}$ est le complémentaire du point défini par $(z_0,\dots,z_m)$ dans $\mathbb{A}_{\mathbb{C}} = \mathbb{A}^{m+1}_{\mathbb{C}} := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[z_0,\dots,z_m]$. On a une sous-variété induite X de $\mathbb{P}^{(w)}_{\mathbb{C}} := \operatorname{Proj} \mathbb{C}[z_0,\dots,z_m]$, où Proj est formé par rapport à la graduation définie en haut. Notons que X est une sous-variété lisse de l'espace projectif ordinaire si $w_0 = \dots = w_m = 1$; en général, X peut avoir des singularités.

Soient $\underline{\tilde{X}}$ et $\underline{X}$ les espaces analytiques correspondants. On peut montrer que $\underline{X}$ est une V-variété, c.-à-d. localement le quotient d'un espace analytique lisse par un groupe fini ; cf [Do] 3.1.6. On a $\underline{\tilde{X}} \subset \underline{\mathbb{A}}^* = \mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}$; considérons sur $\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}$ l'action de $\mathbb{C}^*$: $c\circ(z_0,\dots,z_m) := (c^{w_0}z_0,\dots,c^{w_m}z_m)$. On a $\underline{X} = \underline{\tilde{X}}/\mathbb{C}^*$. Soit $\tilde{\mathcal{U}}_\nu$: $\{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid z_\nu \neq 0\}$, G_{w_ν} le groupe des w_ν-ièmes racines de l'unité ; on a $\mathbb{C}^m/G_{w_\nu} \cong \tilde{\mathcal{U}}_\nu/\mathbb{C}^*$, où l'action de G_{w_ν} sur $\mathbb{C}^m$ est donnée par $c\circ(\zeta_1,\dots,\zeta_m) = (c^{w_0}\zeta_1,\dots,c^{w_{\nu-1}}\zeta_\nu, c^{w_{\nu+1}}\zeta_{\nu+1},\dots,c^{w_m}\zeta_m)$ et l'isomorphisme est induit par $(\zeta_1,\dots,\zeta_m) \mapsto (\zeta_1,\dots,\zeta_\nu, 1, \zeta_{\nu+1},\dots,\zeta_m)$.
On a un isomorphisme induit $\underline{\tilde{X}}_\nu/G_{w_\nu} \cong (\underline{\tilde{X}} \cap \tilde{\mathcal{U}}_\nu)/\mathbb{C}^*$, où $\underline{\tilde{X}}_\nu$ est l'espace analytique lisse $\{\zeta \in \mathbb{C}^m \mid f_j(\zeta_1,\dots,\zeta_\nu,1,\zeta_{\nu+1},\dots,\zeta_m) = 0,\ j = 1,\dots,k\}$. Pour plus de résultats, voir [Do].

Pour simplifier supposons que $n > 0$.

Proposition 2.1. :

a) $$H^r(\underline{\tilde{X}};\mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & r = 0,\ 2n+1 \\ 0, & r \notin \{0, n, n+1, 2n+1\} \\ \text{libre}, & r = n \end{cases}$$

b) $\operatorname{rg} H^n(\underline{\tilde{X}};\mathbb{Z}_p) = \operatorname{rg} H^{n+1}(\underline{\tilde{X}};\mathbb{Z}_p)$.

Démonstration : Soit $\Sigma := \{z \in \tilde{\underline{X}} \mid |z_0|^2 + \ldots + |z_m|^2 = \varepsilon^2\}$, ε étant un nombre réel positif assez petit. On sait que Σ est une variété différentiable de dimension $2n+1$ qui est un rétracte par déformation de $\tilde{\underline{X}}$. D'après le théorème de Lefschetz local [Ha 1] (Satz 1.2) Σ est $(n-1)$-connexe. Le reste est clair à cause de la dualité de Poincaré.

Soit $\pi : \tilde{\underline{X}} \to \underline{X}$ la projection canonique. On a $R^0\pi_*((\mathbb{Z}_p)_{\tilde{\underline{X}}}) \cong (\mathbb{Z}_p)_{\underline{X}}$, $R^j\pi_*((\mathbb{Z}_p)_{\tilde{\underline{X}}}) = 0$, $j \geq 2$. Si l'on avait $R^1\pi_*((\mathbb{Z}_p)_{\tilde{\underline{X}}}) \cong (\mathbb{Z}_p)_{\underline{X}}$ la suite spectrale de Leray : $H^j(\underline{X}, R^i\pi_*((\mathbb{Z}_p)_{\tilde{\underline{X}}})) \Longrightarrow H^{i+j}(\tilde{\underline{X}}, (\mathbb{Z}_p)_{\tilde{\underline{X}}})$ conduirait à une suite exacte de Gysin :

$$\ldots \to H^{r-1}(\tilde{\underline{X}}; \mathbb{Z}_p) \to H^{r-2}(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \to H^r(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \to H^r(\tilde{\underline{X}}; \mathbb{Z}_p) \to \ldots$$

qui permettrait d'étudier $\underline{X}$. Mais en général il faut travailler modulo des sous-espaces (ou aussi avec des coefficients non constants) :

Après une rénumérotation des coordonnées il y a un ℓ, $-1 \leq \ell < m$, tel que : $p|w_\nu \Longleftrightarrow \nu \leq \ell$, $0 \leq \nu \leq m$.

Soit $\tilde{Z}$ la sous-variété de $\mathbb{A}^*_{\mathbb{C}}$ définie par $z_{\ell+1}, \ldots, z_m$ et $\tilde{Y} := \tilde{X} \cap \tilde{Z}$. Soient Z et Y les sous-variétés de $\mathbb{P}^{(w)}_{\mathbb{C}}$ correspondantes.

Proposition 2.2. : Il y a une suite exacte de Gysin :

$$\ldots \to H^{r-1}(\tilde{\underline{X}}, \tilde{\underline{Y}}; \mathbb{Z}_p) \to H^{r-2}(\underline{X}, \underline{Y}; \mathbb{Z}_p) \to H^r(\underline{X}, \underline{Y}; \mathbb{Z}_p) \to H^r(\tilde{\underline{X}}, \tilde{\underline{Y}}; \mathbb{Z}_p) \to \ldots .$$

Démonstration : On vérifie que $R^1\hat{\pi}_*((\mathbb{Z}_p)_{\tilde{X}\setminus\tilde{Y}}) \cong (\mathbb{Z}_p)_{X\setminus Y}$ où $\hat{\pi} := \pi|\tilde{X}\setminus\tilde{Y} : \tilde{X}\setminus\tilde{Y} \to X\setminus Y$.

Après une rénumérotation des polynômes $f_1, \ldots, f_k$ il y a un nombre κ, $0 \leq \kappa \leq k$, tel que $p|d_j \Longleftrightarrow j \leq \kappa$, $j = 1, \ldots, k$.

Proposition 2.3. :

a) $\tilde{Y}$ est définie dans $\mathbb{A}^*_{\mathbb{C}}$ par $f_1, \ldots, f_\kappa, z_{\ell+1}, \ldots, z_m$.

b) (i) $\tilde{Y} = \emptyset$ si $\ell - \kappa < 0$.

(ii) $\tilde{Y}$ est non-vide et lisse de dimension $\ell - \kappa + 1$ si $\ell - \kappa \geq 0$.

Démonstration : a) On peut travailler avec $\tilde{\underline{Y}}$ au lieu de $\tilde{Y}$. Considérons l'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^k$: $c \circ (t_1, \ldots, t_k) := (c^{d_1}t_1, \ldots, c^{d_k}t_k)$, et les applications $f : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^k$, $g : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, $h : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$, $F : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^k$, définies par

$f := (f_1,\dots,f_k)$, $g(z) := e^{2\pi i/p} \circ z$ (voir le début de ce paragraphe), $h(t) := e^{2\pi i/p} \circ t$, $F := h \circ f = f \circ g$ (à cause de la quasihomogénéité). En dérivant, on obtient en un point z de $\tilde{\underline{Z}}$: $\frac{\partial F_j}{\partial z_\nu}(z) = e^{2\pi i d_j/p} \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}(z) = e^{2\pi i w_\nu/p} \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}(z)$ pour $j = 1,\dots,k$, $\nu = 0,\dots,m$, donc $\frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}(z) = 0$, $j = \kappa+1,\dots,k$, $\nu = 0,\dots,\ell$. Ceci implique : $f_{\kappa+1} \equiv \dots \equiv f_k \equiv 0$ sur $\tilde{\underline{Z}}$.

b) Soit $z \in \tilde{\underline{Z}}$. On vient de constater que $\frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}(z) = 0$, $j = \kappa+1,\dots,k$, $\nu = 0,\dots,\ell$. Comme $\tilde{X}$ est lisse de dimension $m-k+1$, $\mathrm{rg}\left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_\nu}(z)\right)_{j=1,\dots,k,\nu=0,\dots,m}\right) = k$ si $z \in \tilde{X}$. Le reste est clair.

Considérons maintenant plusieurs cas spéciaux :

I. Supposons qu'on a

(A) $\qquad \tilde{Y} = \emptyset$.

D'après la proposition 2.3 ceci signifie $\ell-\kappa < 0$.

Théorème 2.1. : Sous l'hypothèse (A) on a l'assertion du théorème 1.1.

<u>Démonstration</u> : D'après la proposition 2.2 on a une suite exacte :

$$\dots \to H^{r-1}(\tilde{\underline{X}};\ \mathbb{Z}_p) \to H^{r-2}(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p) \to H^r(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p) \to H^r(\tilde{\underline{X}};\ \mathbb{Z}_p) \to \dots .$$

En utilisant la proposition 2.1 on obtient l'assertion pour $r \leq n$ par récurrence sur r , pour $r > n$ par récurrence sur $-r$.

Soit $\Delta := \dfrac{d_1 \cdot \dots \cdot d_k}{w_0 \cdot \dots \cdot w_m} \in \mathbb{Q}$.

Théorème 2.2. : Sous l'hypothèse (A) on a :

$\Delta \in \mathbb{Z}_p$, et l'assertion du théorème 1.3 reste vraie.

<u>Démonstration</u> : Grâce à la proposition 2.1 il suffit de considérer $H^{n+1}(\tilde{\underline{X}};\ \mathbb{Z}_p)$.

Pour n pair, la suite exacte de Gysin donne

$$0 \to H^{n+1}(\tilde{\underline{X}};\ \mathbb{Z}_p) \to \underset{\text{libre}}{H^n(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p)} \to \underset{\mathbb{Z}_p}{H^{n+2}(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p)} \to 0$$

donc $H^{n+1}(\tilde{\underline{X}};\ \mathbb{Z}_p)$ est libre, du rang indiqué.

Pour n impair, on obtient :

$$\underset{\mathbb{Z}_p}{\overset{\shortparallel}{H^{n-1}(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p)}} \to \underset{\mathbb{Z}_p}{\overset{\shortparallel}{H^{n+1}(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p)}} \to H^{n+1}(\tilde{\underline{X}};\ \mathbb{Z}_p) \to \underset{\text{libre}}{H^n(\underline{X},\ \mathbb{Z}_p)} \to 0$$

donc $H^{n+1}(\tilde{\underline{X}};\ \mathbb{Z}_p) \cong H^n(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p) \oplus \mathrm{Coker}(H^{n-1}(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p) \to H^{n+1}(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p))$.

Il suffit donc de déterminer le conoyau de

$$H^{n-1}(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p) \to H^{n+1}(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p) .$$

Soit $d_{k+1} = \ldots = d_{m+1}$ le plus petit commun multiple $[w_{\ell+1},\ldots,w_m]$ de $w_{\ell+1},\ldots,w_m$. Si l'on définit $f_j := \sum_{\nu=\ell+1}^{m} a_{j\nu}\, z_\nu^{d_j/w_\nu}$, $j = k+1,\ldots,m+1$, les coefficients $a_{j\nu}$ étant suffisamment généraux, on obtient que $\{z \in \mathbb{C}^{m+1} \mid f_1(z) = \ldots = f_{m+1}(z) = 0\} = \{0\}$: on applique le théorème de Sard à la projection de l'espace lisse $\{(z,(a_{j\nu})_{j=k+1,\ldots,m+1;\nu=\ell+1,\ldots,m}) \in (\mathbb{C}^{m+1}\setminus(\{0\}\cup\tilde{\underline{Z}})) \times \mathbb{C}^{(n+1)(m-\ell)} \mid f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0 ,\ \sum_{\nu=\ell+1}^{m} a_{j\nu}\, z_\nu^{d_j/w_\nu} = 0 ,\ j = k+1,\ldots,m+1\}$ sur $\mathbb{C}^{(n+1)(m-\ell)}$. L'application $(f_{k+1},\ldots,f_{m+1})$ induit un morphisme de suites exactes de Gysin :

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \to & H^{r-1}(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\};\ \mathbb{Z}_p) & \to & H^{r-2}(\underline{\mathbf{P}}^n;\mathbb{Z}_p) & \to & H^r(\underline{\mathbf{P}}^n;\mathbb{Z}_p) & \to \ldots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots \to & H^{r-1}(\tilde{\underline{X}};\ \mathbb{Z}_p) & \to & H^{r-2}(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p) & \to & H^r(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p) & \to \ldots .
\end{array}$$

On utilise ici qu'on peut identifier $R^1\pi_*(\mathbb{Z}_p)_{\tilde{\underline{X}}}$ avec $(\mathbb{Z}_p)_{\underline{X}}$ d'une façon convenable : $p \nmid d_j$, $j = k+1,\ldots,m+1$.

Il suffit donc de considérer le morphisme $H^{2n+1}(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\};\ \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(\tilde{\underline{X}};\ \mathbb{Z}_p)$.

Pour cela on détermine le degré de $(f_{k+1},\ldots,f_{m+1}) : \tilde{X} \to \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$, ou bien celui de $(f_1,\ldots,f_{m+1}) : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{m+1}$.

Comme $f_1,\ldots,f_{m+1}$ sont quasihomogènes de degrés $d_1,\ldots,d_{m+1}$ par rapport à $w_0,\ldots,w_m$ ce degré est $\dfrac{d_1\cdot\ldots\cdot d_{m+1}}{w_0\cdot\ldots\cdot w_m}$. Comme $p \nmid d_j$, $j = k+1,\ldots,m+1$, on obtient le résultat cherché.

On va considérer maintenant un autre cas qui est très spécial.

II. Supposons qu'on a :

(B) $k = 0$.

Dans ce cas $\tilde{X} = \mathbb{A}^*_{\mathbb{C}}$, $X = \mathbb{P}^{(w)}_{\mathbb{C}}$, $\tilde{Y} = \tilde{Z}$, $Y = Z$.

L'analogue du théorème 1.3 est trivial parce que $\underline{\tilde{X}} = \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$:

"Théorème" 2.3. : Sous l'hypothèse (B) on a :

$$H^r(\underline{\tilde{X}};\ \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p\ , & r = 0\ ,\ 2m+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent :

Proposition 2.4. : Sous l'hypothèse (B) on a :

$$H^r(\underline{\tilde{X}},\underline{\tilde{Y}};\ \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p\ , & r = 2\ell+2,\ 2m+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite exacte de Gysin (proposition 2.2) implique :

Proposition 2.5. : Sous l'hypothèse (B) :

$$H^r(\underline{X},\underline{Y};\ \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p\ , & 2\ell+2 \leq r \leq 2m\ ,\ r \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 2.4. : Sous l'hypothèse (B) :

$$H^r(\underline{X};\ \mathbb{Z}_p) = H^r(\underline{\mathbb{P}}^{(w)};\ \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p\ , & 0 \leq r \leq 2m\ ,\ r \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : par récurrence sur m , en utilisant la proposition 2.5.

III. Supposons maintenant qu'on a :

(C) $p \nmid d_1, \ldots, p \nmid d_k$ (i.e. $\kappa = 0$) , $k > 0$.

D'après la proposition 2.3 ceci implique $\tilde{Y} = \tilde{Z}$.

Proposition 2.6. :

$$H^r(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}, \tilde{\underline{X}} \; ; \; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \; , \; r = 2n+2, \; 2m+1 \\ 0, \; r \notin \{n+1, \; n+2, \; 2n+2, \; 2m+1\} \\ \text{libre}, \quad r = n+1 \end{cases}$$

Ceci résulte de la proposition 2.1 et du "théorème" 2.3.

Proposition 2.7. : Sous l'hypothèse (C) on a une suite exacte de Gysin :

$$\ldots \to H^{r-1}(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}, \tilde{\underline{X}}; \; \mathbb{Z}_p) \to H^{r-2}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \; \mathbb{Z}_p) \to H^r(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \; \mathbb{Z}_p)$$
$$\to H^r(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}, \tilde{\underline{X}}; \; \mathbb{Z}_p) \to \ldots$$

<u>Démonstration</u> : analogue à celle de la proposition 2.2.

Proposition 2.8. : Sous l'hypothèse (C) :

$$H^r(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \; \mathbb{Z}_p) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \; , \; 2n+2 \leqq r \leqq 2m, \; r \text{ pair} \\ \text{libre} \; , \; r = n+1 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : On utilise les propositions 2.6 et 2.7.
Comme $\dim \underline{X} = n$ on obtient l'assertion pour $r \geqq 2n+2$ à cause du théorème 2.4.

Après une renumérotation de $w_0, \ldots, w_\ell$ nous pouvons supposer que $w_{\nu-1}/w_\nu \in \mathbb{Z}_p$, $\nu = 1, \ldots, \ell$. Soit $d_j := [w_{m+1-j}, \ldots, w_m]$, $j = k+1, \ldots, m+1$. Si l'on définit $f_j := \sum_{\nu=m+1-j}^{m} a_{j\nu} \, z_\nu^{d_j/w_\nu}$, $j = k+1, \ldots, m+1$, les coefficients $a_{j\nu}$ étant suffisamment généraux, on obtient que $\{z \in \mathbb{C}^{m+1} | f_1(z) = \ldots = f_{m+1}(z) = 0\} = \{0\}$. Soit $d := (d_1, \ldots, d_{m+1})$, $\tilde{\underline{B}} := \{(t_1, \ldots, t_{m+1}) \in \mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\} \mid t_1 = \ldots = t_k = 0\}$ et $\underline{B}$ le sous-espace correspondant de $\underline{\mathbb{P}}^{(d)}$. L'application $(f_1, \ldots, f_{m+1})$ induit un morphisme de suites exactes de Gysin :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \to & H^{r-1}(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}, \tilde{\underline{B}}; \mathbb{Z}_p) & \to & H^{r-2}(\underline{\mathbb{P}}^{(d)}, \underline{B}; \mathbb{Z}_p) & \to & H^{r}(\underline{\mathbb{P}}^{(d)}, \underline{B}; \mathbb{Z}_p) & \to \dots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\dots \to & H^{r-1}(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}, \tilde{\underline{X}}; \mathbb{Z}_p) & \to & H^{r-2}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \mathbb{Z}_p) & \to & H^{r}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \mathbb{Z}_p) & \to \dots \quad .
\end{array}$$

En particulier on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
H^{2n+1}(\tilde{\underline{B}}; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cong} & H^{2n+2}(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}, \tilde{\underline{B}}; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^{2n+1}(\underline{\mathbb{P}}^{(d)}, \underline{B}; \mathbb{Z}_p) = 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{2n+1}(\tilde{\underline{X}}; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\cong} & H^{2n+2}(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}, \tilde{\underline{X}}; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow[\text{surj.}]{} & H^{2n+1}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \mathbb{Z}_p) \quad .
\end{array}$$

L'application verticale à gauche est un isomorphisme, parce que le degré de $(f_1,\dots,f_{m+1}) : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{m+1}$ est $\dfrac{d_1\cdot\dots\cdot d_{m+1}}{w_0\cdot\dots\cdot w_m}$ et $\dfrac{d_j}{w_{m+1-j}}$ est une unité de $\mathbb{Z}_p$, $j = 1,\dots,m+1$; donc $H^{2n+1}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \mathbb{Z}_p) = 0$. Le reste est clair.

Théorème 2.5. : Sous l'hypothèse (C) on a l'assertion du théorème 1.1.

<u>Démonstration</u> : On utilise la suite exacte longue de cohomologie pour $(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X})$. La cohomologie de $\underline{\mathbb{P}}^{(w)}$ est connue par le théorème 2.4. Comme $\dim \underline{X} = n$ il suffit de considérer le cas $r \leq 2n$, donc les cas $r = n$, $n+1$. On a la suite exacte :

$$\begin{aligned}
0 \to H^n(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}; \mathbb{Z}_p) \to H^n(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \to H^{n+1}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \mathbb{Z}_p) \\
\to H^{n+1}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}; \mathbb{Z}_p) \to H^{n+1}(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) \to 0 \quad .
\end{aligned}$$

Si n est pair, $H^{n+1}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}; \mathbb{Z}_p) = 0$, ce qui implique l'assertion.

Si n est impair, $H^{n+1}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ et $\operatorname{rg} H^{n+1}(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) = \dim H^{n+1}(\underline{X}; \mathbb{Q}) = 1$, puisque l'on a une suite exacte de Gysin à coefficients dans $\mathbb{Q}$; donc $H^{n+1}(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$. Le reste est clair.

Théorème 2.6. : Sous l'hypothèse (C) on a l'assertion du théorème 1.3, en posant $\Delta := 1$.

<u>Démonstration</u> : A cause des propositions 2.7 et 2.8 on a :

$H^{n+1}(\tilde{\underline{X}}; \mathbb{Z}_p)$ $H^{n+2}(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}, \tilde{\underline{X}}; \mathbb{Z}_p) \cong H^{n+1}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \mathbb{Z}_p)$ et $H^{n+1}(\underline{\mathbb{P}}^{(w)}, \underline{X}; \mathbb{Z}_p)$ est libre. Avec la proposition 2.1 on obtient donc (i) et (iii). La suite exacte considérée dans la démonstration du théorème précédent donne enfin (ii).

§ 3. Cohomologie de De Rham (modifiée) de quelques intersections complètes quasi-homogènes

Soit p un nombre premier. Commençons comme au § 2, mais en travaillant avec $\mathbb{Z}_p$ au lieu de $\mathbb{C}$. Considérons sur l'anneau $A := \mathbb{Z}_p[z_0,\dots,z_m]$ la graduation donnée par $\deg z_\nu := w_\nu$, $\nu = 0,\dots,m$, où les poids $w_0,\dots,w_m$ sont des nombres entiers positifs qui ne sont pas tous divisibles par p. Soient $f_1,\dots,f_k \in A$ des polynômes quasihomogènes de degrés $d_1,\dots,d_k$ par rapport à $w_0,\dots,w_m$. Soit $\mathbb{A} := \operatorname{Spec} A$ et $\mathbb{A}^*$ le complémentaire de la sous-variété définie par $(z_0,\dots,z_m)$ dans $\mathbb{A}$.

Supposons que $f_1,\dots,f_k$ définissent une sous-variété lisse $\tilde{X}$ (sur $\mathbb{Z}_p$) de codimension k dans $\mathbb{A}^*$. Soit X le sous-schéma de $\mathbb{P}^{(w)} := \operatorname{Proj} A$ correspondant ; soit $n := \dim X$, c.-à-d. $n = m-k$.

Dénotons par $\underline{\Omega}^1 = \underline{\Omega}^1_{m+1}$ le A-module des $\mathbb{Z}_p$-différentiels sur A, soit $\underline{\Omega}^i = \underline{\Omega}^i_{m+1} := \Lambda^i \underline{\Omega}^1$; en posant $\deg dz_\nu := w_\nu$ nous obtenons une A-algèbre graduée : $\bigoplus_i \underline{\Omega}^i$. Soit $\Omega^i_{\mathbb{A}} := \Omega^i_{\mathbb{A}/\mathbb{Z}_p}$ le $\mathcal{O}_A$-module associé à $\underline{\Omega}^i$ et $\Omega^i_{\mathbb{A}^*} := \Omega^i_{\mathbb{A}} | \mathbb{A}^*$. Dénotons par $\pi : \mathbb{A}^* \to \mathbb{P}^{(w)}$ la projection canonique ; le module $\pi_* \Omega^i_{\mathbb{A}^*}$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{(w)}}$-module gradué. Comme π est affine, $H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{A^*}) \cong H^j(\mathbb{P}^{(w)}, \pi_* \Omega^i_{\mathbb{A}^*})$; on a donc une graduation induite : $H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} (H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}))_s$.

Si l'on remplace $\underline{\Omega}^i$ par $\underline{\Omega}^i/(f_1,\dots,f_k, df_1,\dots,df_k)$ on obtient de la même façon une graduation sur $H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})$. Comme l'opérateur d de Cartan respecte la graduation on a aussi une graduation sur $\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^\cdot_{\tilde{X}})$. Au vu du § 1 il est naturel de considérer $\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^\cdot_{\tilde{X}})_0$ au lieu de $\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^\cdot_{\tilde{X}})$.

Soit $n > 0$.

Théorème 3.1. :

a) $$H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 = \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & (i,j) \in \{(0,0),(n+1,n)\} \\ 0, & i+j \notin \{n,n+1\},\ (i,j) \notin \{(0,0),(n+1,n)\} \\ \text{libre}, & i+j = n \end{cases}$$

b) $\operatorname{rg} H^j(\tilde{X}, \Omega^{i+1}_{\tilde{X}})_0 = \operatorname{rg} H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$ si $i+j = n$.

<u>Démonstration</u>: a) en plusieurs étapes :

(i) $H^j(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}}) = 0$, $j > 0$ ($\mathbb{A}$ affine),

$$H^0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}})_s = \begin{cases} \mathbb{Z}_p, & s = i = 0 \\ 0, & s < 0 \text{ ou } s = 0,\ i > 0 \end{cases} \quad \text{et } H^0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}})_s \text{ est libre (sur } \mathbb{Z}_p)$$

(ii) Soit $0 := \mathbb{A} \setminus \mathbb{A}^*$; on a une suite exacte :

$$\ldots \to H^j_0(\mathbb{A}, \Omega^i_A) \to H^j(\mathbb{A}, \Omega^i_A) \to H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}) \to \ldots \quad .$$

Soit d'abord $m = 0$: dans ce cas $\mathbb{A}^*$ est affine, $H^j_0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}}) = 0$, $j \neq 1$, $H^1_0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}})_s$ est libre,

$$H^1_0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}})_s = \begin{cases} \mathbb{Z}_p\ , & (s,i) = (0,1) \\ 0\ , & s > 0 \text{ ou } s = 0,\ i \neq 1\ . \end{cases}$$

(iii) En général, on aura, puisque $\bigoplus_i \underline{\Omega}^i$ est le produit tensoriel des algèbres correspondantes pour chaque coordonnée :

$$H^j_0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}}) = 0\ ,\ j \neq m+1 \quad ; \quad H^{m+1}_0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}})_s \text{ est libre} \quad ;$$

$$H^{m+1}_0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}})_s = \begin{cases} \mathbb{Z}_p\ , & (s,i) = (0,m+1) \\ 0\ , & s > 0 \text{ ou } s = 0\ ,\ i \neq m+1\ . \end{cases}$$

(iv) On déduit de (i), (iii) et la suite exacte en (ii) :

$$H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}) = \begin{cases} H^0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}})\ , & j = 0 \\ H^{m+1}_0(\mathbb{A}, \Omega^i_{\mathbb{A}})\ , & j = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(v) Soit $s \leqq 0$. Pour $0 \leqq \rho \leqq k$ on a :

$$H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_\rho))_s = \begin{cases} \mathbb{Z}_p\ , & s = i = j = 0 \\ 0\ , & j < m-\rho\ ,\ (s,i,j) \neq (0,0,0) \\ \text{libre}, & j = m-\rho \end{cases}$$

On démontre ceci par récurrence ; on a pour $\rho \geqq 1$ une suite exacte :

$$0 \to \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_{\rho-1}) \xrightarrow{f_\rho \cdot \ldots} \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_{\rho-1}) \to \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_\rho) \to 0$$

qui donne une suite exacte longue :

$$\ldots \to H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_{\rho-1}))_{s-d_\rho} \xrightarrow{f_\rho \cdot} H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_{\rho-1}))_s$$
$$\to H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_\rho))_s \to \ldots$$

(iv) Soit $s \leqq 0$. Pour $0 \leqq \rho \leqq k$, on a

$$H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_\rho))_s = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ s = i = j = 0 \\ 0, \ i+j < n \ , \ (s,i,j) \neq (0,0,0) \\ \text{libre}, \ i+j = n \end{cases}$$

On démontre ceci par récurrence sur ρ et i ; on a pour $\rho \geqq 1$ une suite exacte :

$$0 \to \Omega^{i-1}_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_\rho) \xrightarrow{df_\rho \wedge \ldots} \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_{\rho-1})$$
$$\to \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_\rho) \to 0 \ .$$

Ceci provient de l'hypothèse que $f_1,\ldots,f_k$ définissent une sous-variété lisse de codimension k dans $\mathbb{A}^*$.

On a donc une suite exacte longue :

$$\ldots \to H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^{i-1}_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_\rho))_{s-d_\rho}$$
$$\xrightarrow{df_\rho \wedge} H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_{\rho-1}))_s$$
$$\to H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_\rho)_s \to \ldots$$

(vii) En particulier on obtient l'assertion a) pour $i+j \leqq n$.

Pour traiter le cas $i+j > n$, on procède comme en (v) et (vi) et on démontre pour $0 \leqq \rho \leqq k$:

si $s \geqq d_1 + \ldots + d_\rho$, $j > 0$, on a

$$H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_\rho))_s = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ (s,i,j) = (d_1+\ldots+d_\rho, \ m+1, m-\rho) \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

si $s \geqq d_{\rho+1} + \ldots + d_k$, $i+j > m-\rho+1$, on a

$$H^j(\mathbb{A}^*, \Omega^i_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_\rho))_s = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ (s,i,j) = (d_{\rho+1}+\ldots+d_k, m+1-\rho, n) \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

(par récurrence sur ρ et $-i$) .

Si $\rho = k$ on obtient a) pour $i+j > n+1$. Le cas $i+j = n+1$ est trivial.

b) On a $\operatorname{rg} H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 = \dim H^j(\tilde{X}_{\mathbb{Q}}, \Omega^i_{\tilde{X}_{\mathbb{Q}}})_0$.

Quitte à remplacer p par un autre nombre premier convenable on peut donc supposer que $p \nmid w_0,\dots,p \nmid w_m$, c'est-à-dire qu'on a la condition A ci-dessous. L'assertion découlera donc du théorème 3.3.-

Supposons maintenant que les coordonnées $z_0,\dots,z_m$ et les polynômes $f_1,\dots,f_k$ sont numérotés de telle façon qu'il y a des nombres ℓ , $-1 \leq \ell < m$, et κ , $0 \leq \kappa \leq k$, tels que $p|w_\nu \Longleftrightarrow \nu \leq \ell$, $0 \leq \nu \leq m$; $p|d_j \Longleftrightarrow j \leq \kappa$, $1 \leq j \leq k$.

Soit $\tilde{Z}$ la sous-variété de $\mathbb{A}^*$ définie par $(z_{\ell+1},\dots,z_m)$ et $\tilde{Y} := \tilde{X} \cap \tilde{Z}$. Soient Z et Y les sous-variétés de $\mathbb{P}^{(w)}$ correspondantes.

Proposition 3.1. : On a l'assertion de la proposition 2.3 (avec $\mathbb{A}^*$ au lieu de $\mathbb{A}^*_{\mathbb{C}}$).

<u>Démonstration</u> : Ceci résulte de la proposition 2.3 et la lissité de $\tilde{X}$: Comme $f_{\kappa+1} \equiv \dots \equiv f_k \equiv 0$ sur $\underline{\tilde{Z}}$, ces polynômes appartiennent à l'idéal engendré par $z_{\ell+1},\dots,z_m$ dans $\mathbb{C}[z_0,\dots,z_m]$, donc à l'idéal correspondant dans A , ce qui implique a). Soit K la clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; on a $f_{\kappa+1} \equiv \dots \equiv f_k \equiv 0$ sur $\tilde{Z}_K$, donc $\frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} \equiv 0$ sur $\tilde{Z}_K$, $j = \kappa+1,\dots,k$, $\nu = 0,\dots,\ell$. On peut maintenant raisonner comme dans la démonstration de la partie b) de la proposition 2.3, en y remplaçant $\mathbb{C}$ par K et $\underline{\tilde{Z}}$, $\underline{\tilde{X}}$ par $\tilde{Z}_K$, $\tilde{X}_K$. Le critère jacobien de lissité [Gr 2] (Th. 4.10) implique b).

On a un champ d'Euler modifié : $\sum_{\nu=0}^{m} w_\nu z_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}$, qui définit des applications $\partial_i : \underline{\Omega}^i \longrightarrow \underline{\Omega}^{i-1}$. On va dénoter les applications induites aussi par ∂_i . Notons que $\partial_i : \pi_* \Omega^i_{\tilde{X}} \to \pi_* \Omega^{i-1}_{\tilde{X}}$ respecte les graduations ; posons

$$\tilde{\Omega}^i_X := \ker(\partial_i : (\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \to (\pi_* \Omega^{i-1}_{\tilde{X}})_0) .$$

Lemme 3.1. : Les ∂_i définissent un homomorphisme de complexes

$$\partial : ((\pi_* \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_0, d) \longrightarrow ((\pi_* \Omega^{\cdot -1}_{\tilde{X}})_0, d) .$$

<u>Démonstration</u> : Un calcul dans [Do] 2.1.3 montre que $\partial_{i+1} \circ d^i + d^{i-1} \circ \partial_i$ coïncide avec la multiplication par s sur $(\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}})_s$.

On a donc un complexe $(\tilde{\Omega}^{\cdot}_X, d)$. On va considérer

$$H^j(X, \tilde{\Omega}^i_X) \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^r(X, \tilde{\Omega}^{\cdot}_X)$$

comme cohomologie de Hodge ou de De Rham modifiée.

Considérons des cas spéciaux qui sont parallèles aux cas étudiés en § 2 :

I. Supposons qu'on a :

(A) $\tilde{Y} = \emptyset$, c'est-à-dire $\ell - \kappa < 0$.

Proposition 3.2. : Sous l'hypothèse (A) on a l'assertion de la proposition 1.5, en y remplaçant Ω^i_X par $\tilde{\Omega}^i_X$.

<u>Démonstration</u> : Comme dans la démonstration de la proposition 1.5 il faut vérifier qu'on a un complexe de chaînes exact :

$$0 \to \Omega^{n+1}_{\tilde{X}} \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Omega^n_{\tilde{X}} \xrightarrow{\partial_n} \dots \xrightarrow{\partial_1} \Omega^0_{\tilde{X}} \longrightarrow 0 \quad .$$

Considérons d'abord l'homologie de $(\underline{\Omega}^\bullet, \partial_\bullet)$. Ce complexe est le produit tensoriel des complexes analogues pour chaque coordonnée. Pour le cas $m = 0$, on obtient :

$$H_i(\underline{\Omega}^\bullet, \partial_\bullet) = 0 \ , \ i \neq 0 \ ; \ H_0(\underline{\Omega}^\bullet, \partial_\bullet) = \mathbb{Z}_p[z_0]/(w_0 \ z_0) \quad .$$

Dans le cas général on applique la formule de Künneth. Comme $p \nmid w_\nu$, $\nu = \ell+1,\dots,m$, on obtient pour le A-module $H_i(\underline{\Omega}^\bullet, \partial_\bullet)$: $H_i(\underline{\Omega}^\bullet, \partial_\bullet) \cong H_i(\underline{\Omega}^\bullet, \partial_\bullet)/(z_{\ell+1},\dots,z_m)$, par conséquent : $\mathcal{H}_i(\underline{\Omega}^\bullet_{A^*}, \partial_\bullet) \mid A^* \setminus \tilde{Z} = 0$ pour tout i .

La démonstration du théorème 3.1 montre qu'on peut parvenir à $\Omega^\bullet_{\tilde{X}\setminus\tilde{Y}} = \Omega^\bullet_{\tilde{X}}$ par des suites exactes, donc $\mathcal{H}_i(\Omega^\bullet_{\tilde{X}}, \partial_\bullet) = 0$ pour tout i .

Théorème 3.2. : Sous l'hypothèse (A) on a l'assertion du théorème 1.2, en y remplaçant Ω^i_X par $\tilde{\Omega}^i_X$.

<u>Démonstration</u> : a) D'après la proposition 3.2 on a une suite exacte de Gysin :

$$\dots \to H^{j-1}(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \to H^{j-1}(X, \tilde{\Omega}^{i-1}_X) \to H^j(X, \tilde{\Omega}^i_X) \to H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \to \dots \quad .$$

On obtient la partie a) du théorème par récurrence sur i (pour $i+j \leq n$) ou $-i$ (pour $i+j > n$) , en utilisant le théorème 3.1.

b) D'après la proposition suivante on a :

$$\mathbf{H}^r(X_{\mathbb{C}}, \tilde{\Omega}^\bullet_{X_{\mathbb{C}}}) \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(X_{\mathbb{C}}, \tilde{\Omega}^i_{X_{\mathbb{C}}}) \ , \text{ donc } \operatorname{rg} \mathbf{H}^r(X, \tilde{\Omega}^\bullet_X) = \sum_{i+j=r} \operatorname{rg} H^j(X, \tilde{\Omega}^i_X) \ .$$

Comme les $H^j(X, \tilde{\Omega}^i_X)$ sont libres et $E_1^{ij} = H^j(X, \tilde{\Omega}^i_X) \Longrightarrow H^{i+j}(X, \tilde{\Omega}^\bullet_X)$ on obtient b).

c) On a $\operatorname{rg} H^r(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) = \dim H^r(\underline{X}, \mathbb{C}) = \dim \mathbb{H}^r(X_{\mathbb{C}}, \tilde{\Omega}^{\bullet}_{X_{\mathbb{C}}}) = \operatorname{rg} \mathbb{H}^r(X, \tilde{\Omega}^{\bullet}_X)$, cf. proposition 3.3. Comme $\mathbb{H}^r(X, \tilde{\Omega}^{\bullet}_X)$ est libre (cf. b) et $H^r(\underline{X}; \mathbb{Z}_p)$ aussi (théorème 2.1) on obtient c).

Dans la démonstration du théorème 3.2. on a utilisé la

Proposition 3.3. : Pour tout r on a :

$$H^r(\underline{X}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^r(\underline{X}, \tilde{\Omega}^{\bullet}_{\underline{X}}) \cong \mathbb{H}^r(X_{\mathbb{C}}, \tilde{\Omega}^{\bullet}_{X_{\mathbb{C}}}) \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(X_{\mathbb{C}}, \tilde{\Omega}^i_{X_{\mathbb{C}}})$$

où $\tilde{\Omega}^i_{X_{\mathbb{C}}}$ et $\tilde{\Omega}^i_{\underline{X}}$ sont les analogues de $\tilde{\Omega}^i_X$.

<u>Démonstration</u> : La variété $X_{\mathbb{C}}$ possède une structure de Hodge mixte canonique qui est en fait pure parce que $X_{\mathbb{C}}$ est une V-variété complète, cf. [De 1] (8.2.4) et [St] (1.5). Soit Σ le lieu singulier de $\underline{X}$; on a $\operatorname{codim} \Sigma \geq 2$ parce que $X_{\mathbb{C}}$ est normal. Soit $\mathcal{U} := \underline{X} \setminus \Sigma$ et $\iota : \mathcal{U} \to \underline{X}$ l'inclusion. D'après [St] (1.12) on peut calculer la décomposition de Hodge avec $\iota_* \Omega^{\bullet}_{\mathcal{U}}$:

$$H^r(\underline{X}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^r(\underline{X}, \iota_* \Omega^{\bullet}_{\mathcal{U}}) \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(\underline{X}, \iota_* \Omega^i_{\mathcal{U}}) .$$

En effet, $\iota_* \Omega^i_{\mathcal{U}} \cong \tilde{\Omega}^i_{\underline{X}}$: Soit $\tilde{\Sigma} := \pi^{-1}(\Sigma)$, $\tilde{\mathcal{U}} := \pi^{-1}(\mathcal{U})$, $\pi' := \pi|\tilde{\mathcal{U}} : \tilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$. Comme $\operatorname{codim} \tilde{\Sigma} \geq 2$ et $\Omega^i_{\tilde{\underline{X}}}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{\tilde{\underline{X}}}$ on a $\tilde{\iota}_* \Omega^i_{\tilde{\mathcal{U}}} = \Omega^i_{\tilde{\underline{X}}}$, $\tilde{\iota}$ étant l'inclusion de $\tilde{\mathcal{U}}$ dans $\tilde{\underline{X}}$, donc $\pi_* \Omega^i_{\tilde{\underline{X}}} \cong \pi_* \tilde{\iota}_* \Omega^i_{\tilde{\mathcal{U}}} = \iota_* \pi'_* \Omega^i_{\tilde{\mathcal{U}}}$. La graduation sur $\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}_{\mathbb{C}}}$ induit des filtrations décroissantes sur $\pi_* \Omega^i_{\tilde{X}_{\mathbb{C}}}$ et $\pi_* \Omega^i_{\tilde{\underline{X}}}$; on peut donc parler de $(\pi_* \Omega^i_{\tilde{\underline{X}}})_0$. On a :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}^i_{\underline{X}} &= \ker(\partial_i : (\pi_* \Omega^i_{\tilde{\underline{X}}})_0 \to (\pi_* \Omega^{i-1}_{\tilde{\underline{X}}})_0) \\
&= \ker(\partial_i : (\iota_* \pi'_* \Omega^i_{\tilde{\mathcal{U}}})_0 \to (\iota_* \pi'_* \Omega^{i-1}_{\tilde{\mathcal{U}}})_0) \\
&= \iota_* \ker(\partial_i : (\pi'_* \Omega^i_{\tilde{\mathcal{U}}})_0 \to (\pi'_* \Omega^{i-1}_{\tilde{\mathcal{U}}})_0) .
\end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que

$$\Omega^i_{\mathcal{U}} = \ker(\partial_i : (\pi'_* \Omega^i_{\tilde{\mathcal{U}}})_0 \to (\pi'_* \Omega^{i-1}_{\tilde{\mathcal{U}}})_0) .$$

Mais ceci est clair pour $i = 1$, d'où on passe au cas général.

(Une autre démonstration de $\iota_* \Omega^i_{\mathfrak{U}} \cong \tilde{\Omega}^i_{\underline{X}}$ a été trouvée par J. Steenbrink [à paraître]).

On a donc : $H^r(\underline{X}; \mathbb{C}) \cong \mathbb{H}^r(\underline{X}, \tilde{\Omega}^{\cdot}_{\underline{X}}) \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(\underline{X}, \tilde{\Omega}^i_{\underline{X}})$.

D'après GAGA on a : $\mathbb{H}^r(\underline{X}, \tilde{\Omega}^{\cdot}_{\underline{X}}) \cong \mathbb{H}^r(X_{\mathbb{C}}, \tilde{\Omega}^{\cdot}_{X_{\mathbb{C}}})$ et $H^j(\underline{X}, \tilde{\Omega}^i_{\underline{X}}) \cong H^j(X_{\mathbb{C}}, \tilde{\Omega}^i_{X_{\mathbb{C}}})$.

Théorème 3.3. : Sous l'hypothèse (A) on a l'assertion du théorème 1.4, en y remplaçant Ω^i_X par $\tilde{\Omega}^i_X$ et en posant $\Delta := \dfrac{d_1 \cdot \ldots \cdot d_k}{w_0 \cdot \ldots \cdot w_m}$.

(N.B. : On sait déjà que $\Delta \in \mathbb{Z}_p$ d'après le théorème 2.2.).

<u>Démonstration</u> : a) A cause du théorème 3.1 a) on a déjà l'assertion pour $i+j \notin \{n,n+1\}$; de plus $H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$ est libre pour $i+j = n$. En utilisant la proposition 3.2 et le théorème 3.2 on voit qu'il suffit de considérer $H^{i-1}(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$ et $H^i(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$ pour n impair, $i = \frac{n+1}{2}$. On a dans ce cas la suite exacte :

$$H^{i-1}(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \to \underset{\mathbb{Z}_p}{\underset{\shortparallel}{H^{i-1}(X, \tilde{\Omega}^{i-1}_X)}} \to \underset{\mathbb{Z}_p}{\underset{\shortparallel}{H^i(X, \tilde{\Omega}^i_X)}} \to H^i(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \to \underset{\text{libre}}{H^i(X, \tilde{\Omega}^{i-1}_X)}$$

Il suffit évidemment de démontrer que l'homomorphisme $H^{i-1}(X, \tilde{\Omega}^{i-1}_X) \to H^i(X, \tilde{\Omega}^i_X)$ correspond à la multiplication par Δ , si $i = \frac{n+1}{2}$. (*)

Soit $\mathfrak{U}_\nu$ le complémentaire de la sous-variété de $\mathbb{P}^{(w)}$ définie par z_ν ; on peut calculer les groupes $H^i(X, \tilde{\Omega}^i_X)$, $i \geq 0$, par le recouvrement $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_0, \ldots, \mathfrak{U}_m)$. Soit $\eta^i \in C^{i-1}(\mathfrak{U}, (\pi_* \Omega^i_{\mathbb{A}^*})_0)$ défini par :

$$\eta^i_{\nu_0, \ldots, \nu_{i-1}} := w_0 \cdot \ldots \cdot w_m \frac{dz_{\nu_0}}{w_{\nu_0} z_{\nu_0}} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_{\nu_{i-1}}}{w_{\nu_{i-1}} z_{\nu_{i-1}}} .$$

Soit δ l'opérateur de cobord de Čech, $\omega^{i-1} := \partial \eta^i$.

On vérifie : $\delta \eta^i = \omega^i$. Ceci montre qu'on a dans la suite exacte de Gysin (pour $i \geq 1$) :

$$\begin{array}{ccc} H^{i-1}(X, \tilde{\Omega}^{i-1}_X) & \to & H^i(X, \tilde{\Omega}^i_X) \\ [\omega^{i-1}] & \mapsto & [\omega^i] \end{array}$$

Evidemment $[\omega^0] = w_0 \cdot \ldots \cdot w_m \cdot 1$. En outre, on vérifie :

$$\begin{array}{ccc}
[\omega^n] & \in & H^n(X, \tilde{\Omega}^n_X) \\
\mapsto & & \uparrow \cong \\
[\eta^{n+1}] & \in & H^n(\tilde{X}, \Omega^{n+1}_{\tilde{X}})_0 \\
\downarrow & & \downarrow \cong \\
[df_1 \wedge \ldots \wedge df_k \wedge \eta^{n+1}] & \in & H^n(\mathbb{A}^*, \Omega^{m+1}_{\mathbb{A}^*}/(f_1,\ldots,f_k))_{d_1+\ldots+d_k} \\
\downarrow & & \downarrow \cong \\
[d_1 \cdot \ldots \cdot d_k \cdot \eta^{m+1}] & \in & H^m(\mathbb{A}^*, \Omega^{m+1}_{\mathbb{A}^*})_0
\end{array}$$

en utilisant $\partial df_j = d_j \cdot f_j$, $j = 1,\ldots,k$.

Comme $[\eta^{m+1}]$ est un générateur de $H^m(\mathbb{A}^*, \Omega^{m+1}_{\mathbb{A}^*})_0 \cong H^{m+1}_0(\mathbb{A}, \Omega^{m+1}_{\mathbb{A}})_0$ et $H^{i-1}(X, \tilde{\Omega}^{i-1}_X) \to H^i(X, \tilde{\Omega}^i_X)$ est un isomorphisme pour $1 \leq i \leq n$, $i \neq \frac{n+1}{2}$, on obtient (*) .

b) On peut déduire du théorème 3.1 que $\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_0 = 0$, $r \neq 0$, n, $n+1$, $2n+1$. D'après la proposition 3.2 on a une suite exacte de Gysin :

$$\ldots \to \mathbb{H}^{r-1}(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_0 \to \mathbb{H}^{r-2}(X, \tilde{\Omega}^{\cdot}_X) \to \mathbb{H}^r(X, \tilde{\Omega}^{\cdot}_X) \to \mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_0 \to \ldots .$$

D'après le théorème 3.2 on a $\mathbb{H}^r(X, \tilde{\Omega}^{\cdot}_X) \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(X, \tilde{\Omega}^i_X)$.
En raisonnant comme dans a) et en comparant on obtient b).

c) D'après le théorème 3.2 on a $\operatorname{rg} H^r(\underline{X}; \mathbb{Z}_p) = \operatorname{rg} \mathbb{H}^r(X, \tilde{\Omega}^{\cdot}_X)$. Par comparaison du théorème 2.2 et des a), b) ci-dessus on obtient c).

<u>Remarque</u> : On peut déterminer tous les groupes considérés explicitement. Il suffit de calculer $h_0^{i,n-i}(\underline{X})$ où $h_0^{i,j}(\underline{X}) := \operatorname{rg} H^j(X, \tilde{\Omega}^i_X) - \delta_{ij}$, $i,j = 0,\ldots,n$.
D'après [Ha 2] ou [Ha 3] (Th. 1) on a la formule suivante :

$$h_0^{i,n-i}(\underline{X}) = (-1)^{n-i} \operatorname{res}_{X=\infty} \operatorname{res}_{Y=\infty} X^{-1}Y^{-i-1}Q(X,Y) ,$$

où
$$Q(X,Y) := \frac{1}{1+Y} \prod_{\nu=0}^{m} \frac{1+YX^{w_\nu}}{1-X^{w_\nu}} \prod_{j=1}^{k} \frac{1-X^{d_j}}{1+YX^{d_j}} .$$

II. Supposons maintenant qu'on a

(B) $k = 0$.

On a $\tilde{X} = \mathbb{A}^*$, $X = \mathbb{P}^{(w)}$, $\tilde{Y} = \tilde{Z}$, $Y = Z$, $m = n$.

Théorème 3.4. : Sous l'hypothèse (B) on a :

a) $$H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ (i,j) \in \{(0,0), (m+1,m)\} \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

b) $$\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^\cdot_{\tilde{X}})_0 \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \quad .$$

c) Pour chaque r les modules $H^r(\underline{\tilde{X}}; \mathbb{Z}_p)$ et $\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^\cdot_{\tilde{X}})_0$ sont libres, de même rang.

<u>Démonstration</u> : a) Ceci était démontré dans les étapes (i), (iii), (iv) de la démonstration de la partie a) du théorème 3.1.

b) et c) : clair ; cf. théorème 2.3.

Soit $\mathcal{J}^i_{\tilde{X},\tilde{Y}} := \ker(\Omega^i_{\tilde{X}} \to (\Omega^i_{\tilde{Y}})_{\tilde{X}})$, où $(\Omega^i_{\tilde{Y}})_{\tilde{X}}$ est l'extension triviale de $\Omega^i_{\tilde{Y}}$ sur $\tilde{X}$. On a un complexe de chaînes $(\mathcal{J}^\cdot_{\tilde{X},\tilde{Y}}, \partial_\cdot)$; soit

$$\mathcal{J}^i_{X,Y} := \ker(\partial_i : (\pi_* \mathcal{J}^i_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0 \to (\pi_* \mathcal{J}^{i-1}_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0) \quad .$$

On va considérer $H^j(X, \mathcal{J}^i_{X,Y})$ et $\mathbb{H}^r(X, \mathcal{J}^\cdot_{X,Y})_0$ comme cohomologie de Hodge ou de De Rham (modifiée) de la paire (X,Y).

Le théorème 3.4 implique :

Proposition 3.4. : Sous l'hypothèse (B) on a

$$H^j(\tilde{X}, \mathcal{J}^i_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0 = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ (i,j) \in \{(\ell+1,\ell+1), (m+1,m)\} \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

Proposition 3.5. : Sous l'hypothèse (B) il y a des suites exactes "de Gysin" :

$$\ldots \to H^{j-1}(\tilde{X}, \mathcal{J}^i_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0 \to H^{j-1}(X, \mathcal{J}^{i-1}_{X,Y}) \to H^j(X, \mathcal{J}^i_{X,Y}) \to H^j(\tilde{X}, \mathcal{J}^i_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0 \to \ldots$$

et $$\ldots \to \mathbb{H}^{r-1}(\tilde{X}, \mathcal{J}^\cdot_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0 \to \mathbb{H}^{r-2}(X, \mathcal{J}^\cdot_{X,Y}) \to \mathbb{H}^r(X, \mathcal{J}^\cdot_{X,Y}) \to \mathbb{H}^r(\tilde{X}, \mathcal{J}^\cdot_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0 \to \ldots$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer le

Lemme 3.2. : Sous l'hypothèse (B) il y a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{J}^{m+1}_{\tilde{X},\tilde{Y}} \xrightarrow{\partial_{m+1}} \mathcal{J}^{m}_{\tilde{X},\tilde{Y}} \to \dots \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{J}^{0}_{\tilde{X},\tilde{Y}} \to 0 \ .$$

<u>Démonstration</u> : Dans la démonstration de la proposition 3.2 on avait étudié l'homologie de $(\underline{\Omega}^{\bullet}_{m+1}, \partial_{\bullet})$. On a une projection $\underline{\Omega}^{i}_{m+1} \to \underline{\Omega}^{i}_{\ell+1}$, le module $\underline{\Omega}^{i}_{\ell+1}$ étant défini en utilisant les coordonnées $z_0,\dots,z_\ell$. On avait obtenu que $H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{m+1}, \partial_{\bullet}) \cong (H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{m+1}, \partial_{\bullet}))/(z_{\ell+1},\dots,z_m)$; ceci signifie que $H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{m+1}, \partial_{\bullet}) \xrightarrow{\cong} H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{\ell+1}, \partial_{\bullet})$ pour tout i . Soit $I^{\bullet}$ le noyau de $\underline{\Omega}^{\bullet}_{m+1} \to \underline{\Omega}^{\bullet}_{\ell+1}$; on obtient $H_i(I^{\bullet}, \partial_{\bullet}) = 0$, donc $\mathcal{H}_i(\mathcal{J}^{\bullet}_{\tilde{X},\tilde{Y}}, \partial_{\bullet}) = 0$ pour tout i .

Les propositions 3.4 et 3.5 impliquent la

Proposition 3.6. : Sous l'hypothèse (B) on a :

$$H^j(X, \mathcal{J}^i_{X,Y}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , & \ell+1 \leq i = j \leq m \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

Lemme 3.3. : Sous l'hypothèse (B) on a une suite exacte de complexes

$$0 \to \mathcal{J}^{\bullet}_{X,Y} \to \tilde{\Omega}^{\bullet}_X \to (\tilde{\Omega}^{\bullet}_Y)_X \to 0$$

(d étant l'opérateur de cobord).

<u>Démonstration</u> : Si $C_{\bullet}$ est un complexe de chaînes quelconque, on a la filtration par les sous-complexes tronqués

$$F_i(C_{\bullet}) : (F_i(C_{\bullet}))_j = \begin{cases} 0, & j > i \\ C_j \ , & j \leq i \end{cases}$$

On a une suite exacte de complexes de chaînes (∂ étant l'opérateur de bord) :

$$0 \to F_i(\pi_* \mathcal{J}^{\bullet}_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0 \to F_i(\pi_* \Omega^{\bullet}_{\tilde{X}})_0 \to F_i((\pi_* \Omega^{\bullet}_{\tilde{Y}})_{\tilde{X}})_0 \to 0 \ .$$

La partie

$$\mathcal{H}_{i+1}(F_i((\pi_* \Omega^{\bullet}_{\tilde{Y}})_{\tilde{X}})_0) \to \mathcal{H}_i(F_i(\pi_* \mathcal{J}^{\bullet}_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0) \to \mathcal{H}_i(F_i(\pi_* \Omega^{\bullet}_{\tilde{X}})_0)$$

$$\to \mathcal{H}_i(F_i((\pi_* \Omega^{\bullet}_{\tilde{Y}})_{\tilde{X}})_0) \to \mathcal{H}_{i-1}(F_i(\pi_* \mathcal{J}^{\bullet}_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0$$

de la suite exacte d'homologie s'identifie avec

$$0 \to \mathcal{J}^i_{X,Y} \to \tilde{\Omega}^i_X \to (\tilde{\Omega}^i_Y)_X \to \mathcal{H}_{i-1}((\pi_* \mathcal{J}^\cdot_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0)$$

et $\mathcal{H}_{i-1}((\pi_* \mathcal{J}^\cdot_{\tilde{X},\tilde{Y}})_0) = 0$ à cause du lemme 3.2.

Il est facile maintenant de démontrer le

Théorème 3.5. : Sous l'hypothèse (B) on a :

a) $$H^j(X, \tilde{\Omega}^i_X) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ 0 \leq i = j \leq m \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

b) $\mathbb{H}^r(X, \tilde{\Omega}^\cdot_X) \cong \bigoplus_{i+j=r} H^j(X, \Omega^i_X)$

c) Pour chaque r les modules $\mathbb{H}^r(X, \tilde{\Omega}^\cdot_X)$ et $H^r(\underline{X}; \mathbb{Z}_p)$ sont libres, du même rang.

<u>Démonstration</u> : a) par récurrence sur m , en utilisant proposition 3.6 et lemme 3.3

b) clair

c) cf. théorème 2.4.

III. Considérons maintenant le cas

(C) $\quad p \nmid d_1, \ldots, p \nmid d_k \quad , \quad k > 0$.

D'après la proposition 3.1 on a donc $\tilde{Y} = \tilde{Z}$.

Soit $\mathcal{J}^i_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}} := \ker(\Omega^i_{\mathbb{A}^*} \to (\Omega^i_{\tilde{X}})_{\mathbb{A}^*})$ et

$$\mathcal{J}^i_{\mathbb{P}^{(w)},X} := \ker(\partial_i : (\pi_* \mathcal{J}^i_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0 \to (\pi_* \mathcal{J}^{i-1}_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0) .$$

Proposition 3.7. : Sous l'hypothèse (C) il y a des suites exactes "de Gysin" :

$$\ldots \to H^{j-1}(\mathbb{A}^*, \mathcal{J}^i_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0 \to H^{j-1}(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^{i-1}_{\mathbb{P}^{(w)},X}) \to H^j(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^i_{\mathbb{P}^{(w)},X})$$
$$\to H^j(\mathbb{A}^*, \mathcal{J}^i_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0 \to \ldots$$

et $$\ldots \to \mathbb{H}^{r-1}(\mathbb{A}^*, \mathcal{J}^\cdot_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0 \to \mathbb{H}^{r-2}(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^\cdot_{\mathbb{P}^{(w)},X}) \to \mathbb{H}^r(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^\cdot_{\mathbb{P}^{(w)},X})$$
$$\to \mathbb{H}^r(\mathbb{A}^*, \mathcal{J}^\cdot_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0 \to \ldots \quad .$$

Démonstration : Il suffit de démontrer le

Lemme 3.4. : Sous l'hypothèse (C) on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}^{m+1}_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}} \xrightarrow{\partial_{m+1}} \mathcal{J}^{m}_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}} \to \cdots \to \mathcal{J}^{1}_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{J}^{0}_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}} \to 0 \ .$$

Démonstration : On va prendre ici toujours ∂ comme opérateur de bord.

(i) Soit $\mathcal{U}_\nu$ choisi comme dans la démonstration du théorème 3.3 et $\underline{\Omega}^i_{(\nu)} := H^0(\mathcal{U}_\nu, \pi_* \Omega^i_{\mathbb{A}})$. La démonstration de la proposition 3.2 montre que $H_i(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)})$ est un A-module annulé par la multiplication par z_j , $\ell+1 \leq j \leq m$.

(ii) Pour $0 \leq \rho \leq k$ et tout i , l'application

$$H_i(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_{\rho+1},\ldots,f_k)) \to H_i(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_\rho))$$

est un isomorphisme. On démontre ceci par récurrence sur ρ . Le cas $\rho = 0$ est clair ; soit donc $\rho \geq 1$. Comme $p \nmid d_\rho$, on a une suite exacte

$$0 \to \underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_{\rho+1},\ldots,f_k) \xrightarrow{d_\rho f_\rho \cdot \ldots} \underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_{\rho+1},\ldots,f_k) \to \Omega^\bullet_{(\nu)}/(f_\rho,\ldots,f_k) \to 0$$

qui induit une suite exacte longue d'homologie. L'application de bord $H_i(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_\rho,\ldots,f_k)) \to H_{i-1}(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_{\rho+1},\ldots,f_k))$ admet une application inverse à droite, induite par $df_\rho \wedge \ldots$, par conséquent, on a une suite exacte scindée :

$$0 \to H_i(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_{\rho+1},\ldots,f_k)) \to H_i(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_\rho,\ldots,f_k))$$
$$\rightleftarrows H_{i-1}(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_{\rho+1},\ldots,f_k)) \to 0 \ .$$

De plus, on a une suite exacte :

$$0 \to \underline{\Omega}^{\bullet-1}_{(\nu)}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_\rho) \xrightarrow{df_\rho \wedge \ldots} \underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_{\rho-1})$$
$$\to \underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_\rho) \to 0 \qquad (*)$$

qui induit une suite exacte longue d'homologie. D'après l'hypothèse de récurrence on a

$$H_i(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_\rho,\ldots,f_k)) \cong H_i(\underline{\Omega}^\bullet_{(\nu)}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_{\rho-1})) \ .$$

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H_{i-1}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_{\rho+1},\dots,f_k)) & \xrightarrow{df_\rho \wedge \dots} & H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_\rho,\dots,f_k)) \\
\downarrow & & \downarrow \cong \\
H_{i-1}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_\rho)) & \xrightarrow{df_\rho \wedge \dots} & H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_{\rho-1}))
\end{array}$$

L'application supérieure donnait un scindage et est donc injective. Ceci implique que l'application à gauche est injective.

L'application inférieure admet une application inverse à gauche, qui est la composition de

$$\begin{aligned}
H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_{\rho-1})) &\to H_{i-1}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,\hat{f}_\rho,\dots,f_k,df_1,\dots,df_{\rho-1}) \\
&\to H_{i-1}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_\rho)
\end{aligned}$$

où la première application provient de la suite exacte longue d'homologie de

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,\hat{f}_\rho,\dots,f_k,df_1,\dots,df_{\rho-1}) \\
&\xrightarrow{d_\rho f_\rho \cdot \dots} \underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,\hat{f}_\rho,\dots,f_k,df_1,\dots,df_{\rho-1}) \to \underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_{\rho-1})) \to 0.
\end{aligned}$$

On a donc une suite exacte scindée :

$$\begin{aligned}
0 \to H_{i-1}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_\rho)) &\underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{df_\rho \wedge \dots}} H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_{\rho-1}) \\
&\to H_i(\Omega^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_\rho)) \to 0 \quad , \text{ cf } (*) .
\end{aligned}$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
0 & & \\
\downarrow & & \\
H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_{\rho+1},\dots,f_k)) & \longrightarrow & H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_\rho)) \\
\downarrow & & \uparrow \\
H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_\rho,\dots,f_k)) & \xrightarrow[\cong]{} & H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_{\rho-1})) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_{i-1}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_{\rho+1},\dots,f_k)) & \xrightarrow[\text{injectif}]{} & H_{i-1}(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\dots,f_k,df_1,\dots,df_\rho)) \\
\downarrow & & \\
0 & &
\end{array}$$

dont les colonnes proviennent des suites exactes considérées.

Une chasse dans le diagramme montre que la flèche horizontale supérieure est surjective : on commence en prenant comme image inverse dans $H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_1,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_{\rho-1}))$ l'élément qui est appliqué sur 0 par la flèche inférieure à droite.
Ceci achève la démonstration de (ii).

(iii) D'après (ii) on a pour tout i :

$$H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}) \underset{\cong}{\rightarrow} H_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{(\nu)}/(f_\rho,\ldots,f_k,df_1,\ldots,df_k)) \quad , \quad \text{donc}$$

$$\mathcal{H}_i(\underline{\Omega}^{\bullet}_{\mathbb{A}^*}) \underset{\cong}{\rightarrow} \mathcal{H}_i((\Omega^{\bullet}_{\tilde{X}})_{\mathbb{A}^*}) \quad .$$

Ceci entraîne $\mathcal{H}_i(\mathcal{J}^{\bullet}_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}}) = 0$.

Proposition 3.8. : Sous l'hypothèse (C) on a :

$$H^j(\mathbb{A}^*, \mathcal{J}^i_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0 = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ (i,j) \in \{(n+1,n+1),(m+1,m)\} \\ 0 \ , \ i+j \notin \{n+1,n+2\}, \ (i,j) \notin \{(n+1,n+1),(m+1,m)\} \\ \text{libre} \ , \ i+j = n+1 \end{cases}$$

Ceci résulte des théorèmes 3.1 et 3.4.

Proposition 3.9. : Sous l'hypothèse (C) on a :

$$H^j(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^i_{\mathbb{P}^{(w)},X}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_p \ , \ n+1 \leq i = j \leq m \\ \text{libre} \ , \ i+j = n+1 \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : Ceci est clair pour $i \neq j$ à cause des propositions 3.7 et 3.8.
De plus, $H^i(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^i_{\mathbb{P}^{(w)},X}) \cong \mathbb{Z}_p$, $n+1 \leq i \leq m$. Il suffit de montrer que

$H^{n+1}(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^{n+1}_{\mathbb{P}^{(w)},X}) \rightarrow H^{n+1}(\mathbb{A}^*, \mathcal{J}^{n+1}_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0$ est un isomorphisme.

Avec les notations de la démonstration du théorème 3.3, on a :

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^i_{\mathbb{P}^{(w)},X}) & \xrightarrow{\cong} & H^{i+1}(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^{i+1}_{\mathbb{P}^{(w)},X}) \\ [\omega^i] & \longmapsto & [\omega^{i+1}] \end{array} \quad , \quad n < i < m \quad ,$$

$$H^m(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^m_{\mathbb{P}^{(w)},X}) \xleftarrow{\cong} H^m(\mathbb{A}^*, \mathcal{J}^{m+1}_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0 \cong H^m(\mathbb{A}^*, \Omega^{m+1}_{\mathbb{A}^*})_0$$

$$[\omega^m] \longleftarrow [\eta^{m+1}]$$

$$H^{n+1}(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^{n+1}_{\mathbb{P}^{(w)},X}) \longrightarrow H^{n+1}(\mathbb{A}^*, \mathcal{J}^{n+1}_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0 \xleftarrow{\cong} H^n(\tilde{X}, \Omega^{n+1}_{\tilde{X}})_0$$

$$[\omega^{n+1}] \longmapsto [\omega^{n+1}] \longleftarrow [\eta^{n+1}]$$

Comme dans la démonstration du théorème 3.3, $[\eta^{m+1}]$ est un générateur de $H^m(\mathbb{A}^*, \Omega^{m+1}_{\mathbb{A}^*})_0$, et $[\eta^{n+1}]$ est un générateur de $H^n(\tilde{X}, \Omega^{n+1}_{\tilde{X}})_0$, parce que $p \nmid d_1, \ldots, p \nmid d_k$.

Ceci achève la démonstration.

Lemme 3.5. : Sous l'hypothèse (C) on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^{\bullet}_{\mathbb{P}^{(w)},X} \longrightarrow \tilde{\Omega}^{\bullet}_{\mathbb{P}^{(w)}} \longrightarrow (\tilde{\Omega}^{\bullet}_X)_{\mathbb{P}^{(w)}} \longrightarrow 0 .$$

<u>Démonstration</u> : analogue à celle du lemme 3.3, en utilisant le lemme 3.4.

Théorème 3.6. : Sous l'hypothèse (C) on a l'assertion du théorème 1.2, en y remplaçant Ω^i_X par $\tilde{\Omega}^i_X$.

<u>Démonstration</u> : a) On utilise le lemme 3.5. Les formes ω^i , $n+1 \leq i \leq m$, représentent en même temps des générateurs de $H^i(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^i_{\mathbb{P}^{(w)},X})$ et de $H^i(\mathbb{P}^{(w)}, \tilde{\Omega}^i_{\mathbb{P}^{(w)}}) \cong H^i(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^i_{\mathbb{P}^{(w)},Z})$ (Cf. théorème 3.5.).

b) et c) sont démontrés comme dans le théorème 3.2 (cf. théorème 2.5.).

Théorème 3.7. : Sous l'hypothèse (C) on a l'assertion du théorème 1.4, en y remplaçant Ω^i_X par $\tilde{\Omega}^i_X$ et en posant $\Delta := 1$.

<u>Démonstration</u> : a) A cause du théorème 3.4 et des propositions 3.7 et 3.9 on a pour $i+j = n+1$:

$$H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 \cong H^{j+1}(\mathbb{A}^*, \mathcal{J}^i_{\mathbb{A}^*,\tilde{X}})_0 \cong H^{j+1}(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^{i-1}_{\mathbb{P}^{(w)},X})$$

et $H^{j+1}(\mathbb{P}^{(w)}, \mathcal{J}^{i-1}_{\mathbb{P}^{(w)},X})$ est libre, du rang

rg $H^j(X, \tilde{\Omega}_X^{i-1})$ si $i-1 \neq j$ et du rang rg $H^j(X, \tilde{\Omega}_X^{i-1}) - 1$ si $i-1 = j$ (cf. lemme 3.5 et théorème 3.5). Le reste est clair à cause du théorème 3.1.

b) Il suffit de démontrer que rg $\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_0 = \sum_{i+j=r}$ rg $H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0$. Comme rg $\mathbb{H}^r(\tilde{X}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}})_0 = \dim \mathbb{H}^r(\tilde{X}_{\mathbb{Q}}, \Omega^{\cdot}_{\tilde{X}_{\mathbb{Q}}})_0$ et rg $H^j(\tilde{X}, \Omega^i_{\tilde{X}})_0 = \dim H^i(\tilde{X}_{\mathbb{Q}}, \Omega^i_{\tilde{X}_{\mathbb{Q}}})_0$, on peut remplacer p par un autre nombre premier tel que $p \nmid w_\nu$, $\nu = 0,\dots,m$. On retombe donc dans le cas I où on peut appliquer le théorème 3.3.

c) clair, cf. théorème 2.6 et 3.6.

<u>Exemple</u> : $k = 1$, $m = 3$, p arbitraire ;
$f := z_0^2 + z_0 z_1^2 + z_2^4 + z_2 z_3$ est quasihomogène de degré 4 par rapport aux poids $w_0 = 2$, $w_1 = w_2 = 1$, $w_3 = 3$.
Soient $\tilde{X}$ et X les sous-variétés de $\mathbb{A}^*$ et $\mathbb{P}^{(w)} = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}_p[z_0,\dots,z_m]$ (formé par rapport aux poids donnés) définies par f.

$\tilde{X}_{\mathbb{C}}$ est lisse sur $\mathbb{C}$: on a

$$\frac{\partial f}{\partial z_0} = 2z_0 + z_1^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = 2z_0 z_1, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} = 4z_2^3 + z_3, \quad \frac{\partial f}{\partial z_3} = z_2 .$$

Soit $z \in \underline{\tilde{X}}$, i.e. $z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$, $f(z) = 0$: si $\frac{\partial f}{\partial z_0}(z) = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_3}(z) = 0$ on conclut que $z_0 = \dots = z_3 = 0$, contradiction.

$\tilde{X}_K$ est lisse sur K, K étant la clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: il faut montrer qu'on a pour tout $z \in K^{m+1} \setminus \{0\}$ avec $f(z) = 0$: $\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_3}(z)\right) \neq 0$.
Si $p \neq 2$ on raisonne comme ci-dessus ; si $p = 2$, $\frac{\partial f}{\partial z_0}(z) = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_3}(z) = 0$ implique $z_1 = z_2 = z_3 = 0$; comme $f(z) = 0$ on a aussi $z_0 = 0$, contradiction.

Par conséquent, $\tilde{X}$ est lisse.

Si $p \neq 3$ on peut appliquer les résultats obtenus dans le cas I, si $p = 3$ ceux du cas III.

Références :

[De 1] P. Deligne : Théorie de Hodge, III. Publ. Math. IHES 44, 5-77 (1972).

[De 2] P. Deligne : Cohomologie des intersections complètes. Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7 II), Exposé XI. Lecture Notes in Math. n° 340 (Springer-Verlag), 1973.

[Do] I. Dolgachev : Weighted projective varieties. Dans : Group actions and vector fields, pp. 34-71, Lecture Notes in Math. n° 956 (Springer-Verlag), (1982).

[Gr 1] A. Grothendieck : On the De Rham cohomology of algebraic varieties. Publ. Math. IHES 29, 96-103 (1966).

[Gr 2] A. Grothendieck : Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1). Exposé II : Morphismes lisses. Lecture Notes in Math. n° 224 (Springer-Verlag), 1971.

[Ha 1] H.A. Hamm : Genus χ_y of quasihomogeneous complete intersections [en russe] Funkcional Anal. i Priložen. 11, n° 1, 87-88 (1977) = Functional Anal. Appl. 11, 78-79 (1977).

[Ha 3] H.A. Hamm : Invariants of weighted homogeneous singularities. Revue de l'Inst. Elie Cartan 10 (Journées Complexes, Nancy 1985), 6-13 (1986).

[St] J.H.M. Steenbrink : Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. In : Real and complex singularities, Oslo 1976, pp 525-563. Sijthoff & Noordhoff Int. Publ. 1977.