Astérisque

ABDERRAZAK BOUAZIZ

Relèvement des caractères d'un groupe endoscopique pour le changement de base $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

Astérisque, tome 171-172 (1989), p. 163-194

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1989__171-172__163_0>

© Société mathématique de France, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 171-172 (1989), p. 163-194.

RELÈVEMENT DES CARACTÈRES D'UN GROUPE ENDOSCOPIQUE POUR LE CHANGEMENT DE BASE $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

Abderrazak Bouaziz

1-INTRODUCTION.

Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini et quasi-déployé sur $\mathbb{R}$. On note $\tilde{G}$ le groupe obtenu à partir de G par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$. L'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ opère dans $\tilde{G}$ par un automorphisme rationnel qu'on note α. Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$ (voir [S-1]). On fixe un plongement permis (voir 2-3) $\tilde{\xi}$ de ${}^LH$ dans ${}^L\tilde{G}$. Si φ est une section admissible de ${}^LH$, on note $\tilde{\varphi} = \tilde{\xi} \circ \varphi$. C'est une section admissible de ${}^L\tilde{G}$. Le L-paquet de Langlands associé à $\tilde{\varphi}$ est réduit à un seul élément. C'est une représentation irréductible de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ stable par α. Son caractère tordu, qu'on note $\Theta^{\alpha}_{\tilde{\varphi}}$, est une distribution sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ stable par α-conjugaison (i.e. stable par les automorphismes $x \longmapsto \alpha(g)xg^{-1}, g \in \tilde{G}(\mathbb{R})$).

Le but de cet article est de décrire le lien, quand $\tilde{\varphi}$ est bornée, entre $\Theta^{\alpha}_{\tilde{\varphi}}$ et le caractère Θ_{φ} du L-paquet de représentations de $H(\mathbb{R})$ associé à φ. Le résultat précis utilise la notion de relèvement de distributions de $H(\mathbb{R})$ à $\tilde{G}(\mathbb{R})$ que nous rappelons brièvement. A chaque fonction f dans $C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, Shelstad associe une fonction f_H (pas unique) dans l'espace de Harish-Chandra-Schwartz de $H(\mathbb{R})$ qui est définie par ses intégrales orbitales stables à partir de f (voir [S-1]) . Si Θ est une distribution tempéré stablement invariante sur $H(\mathbb{R})$, $\Theta(f_H)$ ne dépend que des intégrales orbitales stables de f_H . Ceci permet de définir une distribution sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\Theta$, par $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\Theta(f) = \Theta(f_H)$. Elle est

stable par α-conjugaison . On l'appelle relèvement de Θ à $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Nous montrons, dans cet article, que $\Theta^{\alpha}_{\tilde{\varphi}} = \varepsilon \ \mathrm{Lift}^{\tilde{G}}_{H}\Theta_{\varphi}$ où ε est un signe que nous précisons dans le texte. Ce problème a été posé par Shelstad dans [S-1]. Comme application nous montrons que si la fonction f ci-dessus était en plus K-finie, où K est un sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on peut choisir f_H dans $C^{\infty}_{c}(H(\mathbb{R}))$,K_H-finie où K_H est un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbb{R})$.

Je remercie D. Shelstad pour l'intérêt qu'elle a porté à ce travail ,et L. Clozel pour avoir attiré mon attention sur l'application au transfert de fonctions K-finies .

2-GROUPES ENDOSCOPIQUES.

Dans ce chapitre nous rappelons les définitions et résultats de [S-1], concernant les groupes endoscopiques, dont nous avons besoin.

2-1-Notations.

Si H est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, on note H(F) l'ensemble de ses points rationnels sur F (F= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour alléger les notations, on identifie souvent H avec $H(\mathbb{C})$; on le fera souvent sans commentaire. L'action de l'élément non trivial σ de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ sur $H(\mathbb{C})$ sera notée σ_H. On notera $\tilde{H}$ le groupe obtenu à partir de H par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$. On identifie les groupes $\tilde{H}(\mathbb{C})$ et $H(\mathbb{C})\times H(\mathbb{C})$ avec l'action de σ donnée par $\sigma_{\tilde{H}}(x,y) = (\sigma_H(y),\sigma_H(x))$. Le groupe $H(\mathbb{C})$ s'identifie, alors, avec $\tilde{H}(\mathbb{R})$ par: $x \longmapsto (x,\sigma_H(x))$. On notera α_H (ou simplement α) le complexifié de σ_H, c'est un automorphisme rationnnel de $\tilde{H}$. Avec l'identification ci-dessus, on a $\alpha_H(x,y) = (y,x)$.

On notera H° la composante connexe de l'élément neutre d'un groupe algébrique H et S_o la composante connexe (pour la topologie ordinaire) de l'élément neutre d'un groupe de Lie réel S .

Si T est un tore complexe, on note X(T) le groupe de ses caractères rationnels et $X^{v}(T)$ le groupe de ses sous-groupes à un paramètre .

Si H est un groupe algébrique réductif complexe et T est un tore maximal

de H,on note R(H,T) (resp. $R^{\vee}(H,T)$) le système de racines (resp. coracines) de T dans H .Si $\beta \in R(H,T)$ on note $\beta^{\vee}$ sa coracine .Si B est un sous-groupe complexe de H contenant T,on note R(B,T) le sous-ensemble de R(H,T) formé par les racines de T dans B .On note $\Omega(H,T)$ le groupe de Weyl de (H,T) .

On notera W le groupe de Weil de $\mathbb{R}$ .Comme ensemble on a $W = \mathbb{C} \times \Gamma$ avec la loi de groupe donnée par:

$(z_1,\tau_1)(z_2,\tau_2) = (a_{\tau_1\tau_2} z_1 \tau_1(z_2), \tau_1\tau_2)$

où $a_{11} = a_{\sigma 1} = a_{1\sigma} = 1$, $a_{\sigma\sigma} = -1$ et $\sigma(z) = \bar{z}$.

2-2-<u>L-groupes</u>.

Dans toute la suite G désignera un groupe algébrique réductif connexe défini et quasi-déployé sur $\mathbb{R}$.

On fixe un sous-groupe de Borel B^* de G défini sur $\mathbb{R}$ et T^* un tore maximal dans B^* défini sur $\mathbb{R}$. On note Δ (resp. $\Delta^{\vee}$) la base de $R(G,T^*)$ (resp. $R^{\vee}(G,T^*)$) défini par B^*. On associe à (G,B^*,T^*) la donnée radicielle polarisée $\Psi = (X(T^*),\Delta,X^{\vee}(T^*),\Delta^{\vee})$. La donnée radicielle polarisée ${}^L\Psi = (X^{\vee}(T^*),\Delta^{\vee},X(T^*),\Delta)$ détermine de façon unique,à un isomorphisme près,un triplet $({}^LG^\circ, {}^LB^\circ, {}^LT^\circ)$;on a $X({}^LT^\circ) = X^{\vee}(T^*)$ et $X^{\vee}({}^LT^\circ) = X(T^*)$ (voir par exemple [Spr]). Pour tout $\beta^{\vee}$ appartenant à $\Delta^{\vee}$,on fixe un vecteur radiciel non nul $X_{\beta^{\vee}}$ dans l'algèbre de Lie de ${}^LG^\circ$. Il existe alors un unique automorphisme rationnel ${}^L\sigma_G$ de ${}^LG^\circ$ tel que ${}^L\sigma_G . X_{\beta^{\vee}} = X_{\sigma_G . \beta^{\vee}}$ et induisant le même automorphisme que σ_G sur ${}^L\Psi$ (quand il n'y a pas de confusion à craindre on notera σ_G au lieu de ${}^L\sigma_G$). On réalise le L-groupe de G sur $\mathbb{R}$, qu'on notera ${}^LG$, comme le produit semi-direct ${}^LG^\circ \times W$ où $\mathbb{C}^\times \times 1$ opère trivialement et $1 \times \sigma$ opère par ${}^L\sigma_G$.

On utilise $\tilde{B}^*$ et $\tilde{T}^*$ comme données de référence pour réaliser le L-groupe ${}^L\tilde{G}$ de $\tilde{G}$. On pose ${}^L\tilde{G}^\circ = {}^LG^\circ \times {}^LG^\circ$, ${}^L\tilde{B}^\circ = {}^LB^\circ \times {}^LB^\circ$ et ${}^L\tilde{T}^\circ = {}^LT^\circ \times {}^LT^\circ$. Alors ${}^L\tilde{G} = {}^L\tilde{G}^\circ \times W$ où $\mathbb{C}^\times$ opère trivialement et $1 \times \sigma$ opère par l'automophisme ${}^L\sigma_{\tilde{G}} : (x,y) \longmapsto ({}^L\sigma_G(y), {}^L\sigma_G(x))$. On notera ${}^L\alpha_G$ (ou simplement α) l'automorphisme de ${}^L\tilde{G}$: $(x,y) \times w \longmapsto (y,x) \times w$.

Si T est un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{A}(T)$ l'ensemble des éléments g de G tels que la restriction de $ad(g)$ à T soit défini sur $\mathbb{R}$. Une pseudo-diagonalisation (ou p-d pour abréger) η de T est une application de T dans T^* de la forme : $T \xrightarrow{ad(x)} T_o \xrightarrow{ad(m)} T^*$ où $x \in \mathcal{A}(T)$, $T_o = x\,T\,x^{-1}$ est standard (i.e. la composante,déployée sur $\mathbb{R}$, S_{T_o} de T_o est incluse dans T^*) et m appartient au sous-groupe de Lévi attaché à T_o (i.e. le centralisateur dans G de S_{T_o}). On note $\sigma_{T,\eta} = \eta \circ \sigma_T \circ \eta^{-1}$. On notera de la même façon les automorphismes qui en résultent sur $X(T^*)$, $X^\vee(T^*)$ et ${}^L T^\circ$.

2-3-Groupes endoscopiques pour $(\tilde{G},\alpha)$.

Pour fixer les notations, nous allons rappeler brièvement la définition d'un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$ de [S-1] .

Soit $x \in {}^L\tilde{G}^\circ$. On note $N(x) = x\alpha(x)$. On pose $Cent_\alpha(x, {}^L\tilde{G}^\circ) = \{ g \in {}^L\tilde{G}^\circ ;\ g^{-1}x\alpha(g) = x \}$. On dit que x est α-semi-simple si $Cent_\alpha(x, {}^L\tilde{G}^\circ)$ est un sous-groupe réductif. Alors x est α-semi-simple si et seulement si $N(x)$ est semi-simple. On note $\tilde{Z}^W = {}^L\tilde{G}^\circ \cap Centre({}^L\tilde{G})$. Il est clair que le groupe $Cent_\alpha(x, {}^L\tilde{G})$ ne dépend que de la classe de x modulo $\tilde{Z}^W$. Ceci permet de définir $Cent_\alpha(s, {}^L\tilde{G})$ pour $s \in {}^L\tilde{G}/\tilde{Z}^W$.

On appelle donnée endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$ toute collection :

$(s\ , {}^L H^\circ_s\ ,\ {}^L B^\circ_s\ ,\ {}^L T^\circ_s\ ,\ \{Y\}\ , \rho_s)$

où

(i) $s \in {}^L\tilde{G}^\circ / \tilde{Z}^W$ est une classe formée d'éléments α-semi-simples .

(ii) ${}^L H^\circ_s = Cent_\alpha(s, {}^L\tilde{G}^\circ)^\circ$

(iii) ${}^L B^\circ_s$ est un sous-groupe de Borel de ${}^L H^\circ_s$.

(iv) ${}^L T^\circ_s$ est un tore maximal dans ${}^L B^\circ_s$.

(v) $\{Y\}$ est un ensemble de vecteurs radiciels non nuls dans l'algèbre de Lie de ${}^L H^\circ_s$ correspondant aux racines simples de ${}^L T^\circ_s$ dans ${}^L B^\circ_s$.

(vi) $\rho_s : W \longrightarrow Aut({}^L H^\circ_s\ ,\ {}^L B^\circ_s\ ,\ {}^L T^\circ_s\ ,\ \{Y\}\ )$ est un homomorphisme qui se factorise à travers Γ et tel que pour tout $w \in W$ on a $\rho_s(w) = ad\ n(w)\ |{}^L H^\circ_s$ où $n(w)$ est un

élément de ${}^L\tilde{G}^\circ \times w \cap \mathrm{Cent}_\alpha(s, {}^L\tilde{G})$.

A chaque donnée endoscopique on associe le L-groupe abstrait ${}^LH_s = {}^LH_s^\circ \times W$ où l'action de W dans ${}^LH_s^\circ$ est définie par ρ_s. On notera $\sigma_s = \rho_s(1 \times \sigma)$.

On dit que deux données endoscopiques (s,...) et (s',...) sont équivalents s'il existe un élément g de ${}^L\tilde{G}^\circ$ qui envoie $({}^LH_s^\circ, {}^LB_s^\circ, {}^LT_s^\circ, \{Y\})$ sur $({}^LH_{s'}^\circ, {}^LB_{s'}^\circ, {}^LT_{s'}^\circ, \{Y'\})$ et tel que, pour tout $w \in W$, si $n(w) \in \mathrm{Cent}_\alpha(s, {}^L\tilde{G})$ réalise $\rho_s(w)$ alors $g\, n(w)\, g^{-1} \in \mathrm{Cent}_\alpha(s', {}^L\tilde{G})$ et réalise $\rho_{s'}(w)$. Il est clair alors que ${}^LH_s$ et ${}^LH_{s'}$ sont isomorphes .

Un groupe algébrique réductif connexe défini et quasi-déployé sur $\mathbb{R}$ est dit groupe endoscopique pour $(\tilde{G}, \alpha)$ si son L-groupe est réalisé par un des groupes ${}^LH_s$.

<u>REMARQUE</u>: Pour chaque classe d'équivalence de données endoscopiques pour $(\tilde{G}, \alpha)$, Shelstad [S-1] associe une classe de données endoscopiques pour G (voir [S-2]) qui définit le même L-groupe abstrait , de sorte qu'un groupe endoscopique pour $(\tilde{G}, \alpha)$ est aussi un groupe endoscopique pour G [S-2] . Ceci est essentiel pour la définition des facteurs de transferts , mais nous n'avons pas besoin de l'expliciter .

Suivant la suggestion du rapporteur , on appelle *plongement permis* de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$ ("allowed embedding" dans la terminologie de [S-1]) , un homomorphisme $\tilde{\xi} : {}^LH_s \longrightarrow {}^L\tilde{G}$ tel que:

(i) $\tilde{\xi}({}^LH_s^\circ \times w) \subset {}^L\tilde{G}^\circ \times w \quad , w \in W$

(ii) $\tilde{\xi}(h \times 1) = (h,h) \times 1 \quad , h \in {}^LH_s^\circ$

(iii) $\tilde{\xi}({}^LH_s) \subset \mathrm{Cent}_\alpha(s, {}^L\tilde{G})$.

Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G}, \alpha)$. On va fixer une réalisation ${}^LH_s$ du L-groupe de H qui sera commode pour la suite. Bien entendu quand on parle de ${}^LH_s$ on sous-entend la donnée endoscopique qui le définit. On utilisera fréquemment,sans commentaire,l'identification de ${}^LG$ avec son image dans ${}^L\tilde{G}$ par

l'application : $g \times w \longmapsto (g,g) \times w$. Commençons par prendre un ${}^L H_s$ réalisant le L-groupe de H. Alors ,d'après le lemme 4-1 de [S-1] ,en conjugant par un élément de ${}^L\tilde{G}^\circ$,on peut prendre s de la forme :$(x,1)\tilde{Z}^W$ où x est un élément semi-simple de ${}^L G^\circ$. Dans ce cas $\mathrm{Cent}_\alpha(s\ ,\ {}^L\tilde{G}^\circ) = \mathrm{Cent}(x\ ,{}^L G^\circ)$, ce dernier étant plongé de façon diagonale dans ${}^L\tilde{G}^\circ$;ceci nous permettra de voir ${}^L H_s^\circ$ comme un sous groupe de ${}^L G^\circ$. Donc ${}^L H_s^\circ$ a le même rang que ${}^L G^\circ$. On peut supposer ,alors,et on le fera, que x appartient à ${}^L T^\circ$ et que ${}^L T_s^\circ = {}^L T^\circ$. On supposera en plus que ${}^L H_s$ est en position standard [S-3] (i.e. il existe un tore maximal $\bar{T}$ de G défini sur $\mathbb{R}$ et une p-d η de $\bar{T}$ tels que $\sigma_{\bar{T},\eta}$ coincide avec σ_s sur ${}^L T^\circ$). Cette hypothèse est réalisé en conjugant par un élément convenable de la forme (g,g) où g appartient au normalisateur de ${}^L T^\circ$ dans ${}^L G^\circ$. Nous verrons plus bas son intérêt. En définitive , nous fixons pour toute la suite une réalisation ${}^L H_s$ du L-groupe de H telle que s soit de la forme $(x,1)\tilde{Z}^W$,x appartenant à ${}^L T^\circ$, ${}^L T^\circ_s = {}^L T^\circ$ et ${}^L H_s$ en position standard. Alors un plongement permis $\tilde{\xi} : {}^L H_s \longmapsto {}^L\tilde{G}$ est de la forme :

$\tilde{\xi}(h \times 1 \times 1) = (h\ ,\ h) \times 1 \times 1 \qquad , h \in {}^L H_s^\circ$.

$\tilde{\xi}(1 \times z \times 1) = (\tilde{\xi}_o(z)\ ,\ \tilde{\xi}_o(z)) \times z \times 1$.

$\tilde{\xi}(1 \times 1 \times \sigma) = (xm\ ,\ m) \times 1 \times \sigma$,

où $\tilde{\xi}_o : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{Centre}({}^L H_s^\circ)$ est un homomorphisme vérifiant $\tilde{\xi}_o(\bar{z}) = \sigma_s(\tilde{\xi}_o(z))$ pour $z \in \mathbb{C}^\times$,m appartient au normalisateur de ${}^L T^\circ$ dans ${}^L G^\circ$, $xm\sigma_G(m) = \tilde{\xi}_o(-1)$ et la restriction de $\mathrm{ad}((xm,m) \times 1 \times \sigma)$ à ${}^L H_s^\circ$ coincide avec σ_s .

On note $\mathcal{T}_H(G)$ l'ensemble des couples (T,η) où T est un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$ et η est une p-d de T tels que $\sigma_{T,\eta} \in \Omega({}^L H_s^\circ, {}^L T_s^\circ)\sigma_s$.

On fixe un sous-groupe de Borel B_H de H défini sur $\mathbb{R}$ et T_H un tore maximal de B_H défini sur $\mathbb{R}$ tels que la donnée radicielle polarisée associée à(H,B_H,T_H) soit duale de celle associée à $({}^L H_s^\circ, {}^L B_s^\circ, {}^L T_s^\circ)$, en particulier on a $X(T_H) = X^\vee({}^L T^\circ)$ et $X^\vee(T_H) = X({}^L T^\circ)$. Soit $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. Alors il existe un tore maximal T' de H défini sur $\mathbb{R}$ et $h \in H(\mathbb{C})$ tels que $hT'h^{-1} = T_H$ et la suite:

$$X(T') \xrightarrow{ad(h)} X(T_H) = X^v({}^LT^\circ) = X(T^*) \xrightarrow{\eta^{-1}} X(T)$$

donne un isomorphisme $i(h,\eta) : T' \longrightarrow T$ défini sur $\mathbb{R}$. Inversement , si T' est un tore maximal de H défini sur $\mathbb{R}$,il existe $h \in H(\mathbb{C})$ et $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ tels que l'on ait un isomorphisme $i(h,\eta) : T' \longrightarrow T$ défini sur $\mathbb{R}$ (voir [S-3]). C'est ici qu'on utilise le fait que ${}^LH_s$ est en position standard. On dira qu'un élément semi-simple γ' de $H(\mathbb{R})$ provient de $\gamma \in G(\mathbb{R})$ ("originates from γ " dans la terminologie de [S-1]) si γ est l'image de γ' par une application $i(h,\eta)$. Si γ' est un élément régulier de $T'(\mathbb{R})$, on dira que γ' n'est pas une norme s'il n'est pas dans l'image de l'application norme de $\tilde{T}'(\mathbb{R})$ dans $T'(\mathbb{R})$ (i.e. l'application $\delta' \longmapsto \delta'\alpha(\delta')$) .

Soient $\tilde{\xi}$ un plongement permis de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$ et ξ un plongement admissible de ${}^LH_s$ dans ${}^LG$ (içi on considère H comme un groupe endoscopique pour G,voir remarque ci-dessus). Alors il existe un 1-cocycle a de W dans Centre$({}^L\tilde{H}^\circ)$ tel que $\tilde{\xi}(h \times w) = a(w)\ \xi(h \times w)$. A ce cocycle on associe,pour tout $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ un quasi-caractère $a_{T,\eta}$ de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ (voir [S-1]). Si $\Lambda_{T,\eta}$ est le quasi-caractère correctif associé à ξ [S-2] ,le caractère : $\delta \longmapsto a_{T,\eta}(\delta)\ \Lambda_{T,\eta}(\delta\alpha(\delta))$ de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ ne dépend que de $\tilde{\xi}$ ([S-1] ,lemme 6-2). Nous le noterons $b_{T,\eta}$. Comme on va s'en servir dans la suite , on le décrit de façon explicite .On écrit $\tilde{\xi}(1 \times z \times 1) = (\tilde{\xi}_o(z),\tilde{\xi}_o(z)) \times z \times 1$. Alors il existe $\mu_* \in X^v({}^LT^\circ) \otimes \mathbb{C}$ tel que $\lambda^v(\tilde{\xi}_o(z)) = z^{\langle\mu_*,\lambda^v\rangle}\ \bar{z}^{\langle\sigma_s\mu_*,\lambda^v\rangle}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$ et tout $\lambda^v \in X({}^LT^\circ)$. On rappelle que $X(T_H) = X^v({}^LT^\circ) = X(T^*)$. Ceci identifie $R(H,T_H)$ avec un sous-ensemble (mais pas un sous-système) de $R(G,T^*)$. On pose:

$$\iota_* = 1/2 \sum_{\substack{\beta \in R(B^*,T^*)\setminus R(H,T_H) \\ \sigma_{T,\eta}.\beta = -\beta}} \beta$$

Si $\lambda^v \otimes z \in X^v(T)\otimes \mathbb{C}$,on pose $\overline{\lambda^v \otimes z} = \lambda^v \otimes \bar{z}$. On identifie $X^v(T)\otimes \mathbb{C}$ avec l'algèbre de Lie de $T(\mathbb{C})$ et $T(\mathbb{C})$ avec $\tilde{T}(\mathbb{R})$. Alors

$$b_{T,\eta}(\exp X) = e^{(\mu_* - \iota_*)(\eta(X+\sigma_T\bar{X}))} \text{ pour tout } X \in X^v(T)\otimes \mathbb{C}.$$

On note $H^1(T) = H^1(\Gamma, T(\mathbb{C}))$. Chaque élément de $H^1(T)$ peut être représenté par un cocycle :

$$\sigma \longmapsto \exp(i\pi\lambda^\vee) \quad , \lambda^\vee \in X^\vee(T) \text{ et } \sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee .$$

$$1 \longmapsto 1 .$$

On notera $\exp(i\pi\lambda^\vee)$ l'élément de $H^1(T)$ défini par ce cocycle .

Suivant Shelstad [S-1], on associe à s (fixé ci-dessus) et à tout (T,η) appartenant à $\mathcal{T}_H(G)$ un quasi-caractère de $H^1(T)$ de la façon suivante : un élément a de s est de la forme $a = (xz, {}^L\sigma_G(z))$ où z est un élément du centre de ${}^LG^\circ$. Comme $xz\,{}^L\sigma_G(z)$ appartient à ${}^LT^\circ = \mathrm{Hom}(X({}^LT^\circ), \mathbb{C}^\times)$, il définit un quasi-caractère de $X({}^LT^\circ)$. Du fait que $\sigma_s(x) = x$ on déduit que ce quasi-caractère est invariant par $\sigma_{T,\eta}$ pour tout $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. Par transfert via η on obtient un quasi-caractère de $X^\vee(T)$ invariant par σ_T. Quand z varie dans le centre de ${}^LG^\circ$ ces quasi-caractères coincident sur $\{\lambda^\vee \in X^\vee(T); \sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee\}$ et sur $X^\vee(T_{sc})$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de $X^\vee(T)$ engendré par les coracines de T dans G. On obtient ainsi un quasi-caractère unique sur :

$$\{\lambda^\vee \in X^\vee(T) \ ; \sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee\} \ / \ \{\mu^\vee - \sigma_T.\mu^\vee \ ; \ \mu^\vee \in X^\vee(T) \}$$

que nous noterons $\kappa_{T,\eta}$ (ou simplement κ si aucune confusion n'est à craindre), et donc ,par la dualité de Tate-Nakayama , un quasi-caractère sur $H^1(T)$ que nous noterons de la même façon. On notera aussi $\kappa_{T,\eta}$ le quasi-caractère sur $X^\vee(T_{sc})$. On aura besoin du lemme suivant ([S-1] , lemme 6-3) .

(2-3-1) <u>LEMME</u>: $\kappa_{T,\eta}(\exp i\pi\lambda^\vee) = b_{T,\eta}(\exp i\pi\lambda^\vee)$ <u>pour tout</u> $\lambda^\vee \in X^\vee(T)$ <u>tel que</u> $\sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee$.

2-4-<u>Transfert d'intégrales orbitales</u>.

On utilise les notations de 2-3 ,en particulier H est un groupe endoscopique pour $(\tilde{G}, \alpha)$ et ${}^LH_s$ la réalisation fixée de son L-groupe.

Soit $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. On fixe un ensemble $\{u = \exp i\pi\lambda^\vee \ ; \ \lambda^\vee \in X^\vee(T)$ et $\sigma_T.\lambda^\vee = -\lambda^\vee \}$ tels que les cocycles $\sigma \longmapsto u$ forment un ensemble de représentants des éléments de $H^1(T)$. On fixe des mesures de Haar dt sur $T(\mathbb{R})$ et $d\tilde{g}$ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$.

Soit $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$. Pour $\delta \in \tilde{T}(\mathbb{R})$ tel que $\delta\alpha(\delta)$ est régulier , on pose :

$$\Phi_f^{(T,\alpha,\kappa)}(\delta,dt,d\tilde{g}) = \sum_u \kappa(u) \int_{\tilde{G}(\mathbb{R})/\,T(\mathbb{R})} f(\alpha(\tilde{g})u\delta\tilde{g}^{-1})\, d\tilde{g}/dt \ .$$

Içi $T(\mathbb{R})$ est considéré comme un sous-groupe de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ par l'identification de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ avec $T(\mathbb{C})$.

On fixe un plongement permis $\tilde{\xi}$ de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$. D'après Shelstad [S-1],il existe un quasi-caractère χ de $H(\mathbb{R})$ tel que $|\chi(\gamma')\, b_{T,\eta}(\delta)| = 1$ si γ' provient de $\delta\alpha(\delta)$ via (T,η). On note $\mathcal{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$ l'espace des fonctions f sur $H(\mathbb{R})$ tels que $f\chi$ appartient à l'espace de Harish-Chandra-Schwartz de $H(\mathbb{R})$. Si T' est un tore maximal de H défini sur $\mathbb{R}$,on note dt' la mesure de Haar sur $T'(\mathbb{R})$ image inverse par $i(h,\eta)$ de la mesure dt. Elle ne dépend pas du choix de h. Soit $f \in \mathcal{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$. Si γ' est un élément régulier de $T'(\mathbb{R})$,on note $\Phi_f^{(T',1)}(\gamma',dt',dh)$ l'intégrale orbitale stable de f (voir ,par exemple,[S-2]).

Soit $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. Soit $\beta \in R(G,T)$,on note $\beta > 0$ si $\eta.\beta$ appartient à $R(B^*,T^*)$. Soit $\gamma \in T$. On pose :

$$'\Delta_{T,\eta}(\gamma) = \prod_{\substack{\beta > 0 \\ \sigma_T.\beta = -\beta \\ \kappa(\beta^\vee) \neq 1}} (1 - \beta(\gamma^{-1})) \prod_{\substack{\beta > 0 \\ \sigma_T.\beta \neq -\beta \\ \kappa(\beta^\vee) \neq 1}} |1 - \beta(\gamma)|^{1/2}\, |1 - \beta(\gamma^{-1})|^{1/2}.$$

Dans [S-2] ,Shelstad définit un entier $q(G,H)$ et pour tout $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ un signe $\varepsilon(T,\eta)$ de sorte qu'on ait :

(2-4-1) <u>PROPOSITION</u> ([S-1], théorème 7-1). <u>Soient H un groupe endoscopique pour</u> $(\tilde{G},\alpha)$,${}^LH_s$ <u>le L-groupe fixé dans 2-3</u> ,$\tilde{\xi}$ <u>un plongement permis de</u> ${}^LH_s$ <u>dans</u> ${}^L\tilde{G}$ <u>et</u> ξ <u>un plongement admissible de</u> ${}^LH_s$ <u>dans</u> ${}^LG$. <u>Alors</u> ,<u>pour tout</u> $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, <u>il existe</u> $f_H \in \mathcal{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$ <u>tel que</u> :

$$\Phi_{f_H}^{(T',1)}(\gamma',dt',dh) = \begin{cases} (-1)^{q(G,H)}\varepsilon(T,\eta)\, b_{T,\eta}(\delta)\, '\Delta_{T,\eta}(\delta\alpha(\delta))\, \Phi_f^{(T,\alpha,\kappa)}(\delta,dt,d\tilde{g}) \\ \qquad \text{si } \gamma' \text{ provient de } \delta\alpha(\delta) \text{ via } (T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G) \\ 0 \quad \text{si } \gamma' \text{ n'est pas une norme} \ , \end{cases}$$

où γ' est un élément de $T'(\mathbb{R})$ qui provient d'un élément régulier de $G(\mathbb{R})$.

2-5-Transfert d'intégrales orbites et composantes de Lévi.

Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$. On fixe ${}^{L}H_s$ comme en 2-3. Soit $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. On note $M = M_T$. Suivant [S-3] ,on va réaliser le L-groupe de M comme un sous-groupe de ${}^{L}G$. On écrit η : $T \xrightarrow{ad(x_1)} T_1 \xrightarrow{ad(m_1)} T^*$ avec T_1 standard et on supposera que $x_1 \in G(\mathbb{R})$. Alors les L-groupes de M et de $M_1 = M_{T_1}$ sont canoniquement isomorphes. On travaillera ,donc , avec M_1 à la place de M. Comme T^* est inclus dans M_1 ,on prend pour données de référence ,pour réaliser le L-groupe de M_1 ,T^* et $B^* \cap M_1$. On note ${}^{L}M^\circ$ le sous-groupe de ${}^{L}G^\circ$ engendré par ${}^{L}T^\circ$ et par les coracines des racines de T^* dans M_1. Il est stable par ${}^{L}\sigma_G$. On pose ${}^{L}M = {}^{L}M^\circ \times W$ où $\mathbb{C}^\times \times 1$ opère trivialement et $1 \times \sigma$ opère par ${}^{L}\sigma_G$. Pour voir que ${}^{L}M$ est une réalisation du L-groupe de M_1 ,il suffit de pouvoir choisir , pour toute racine simple $\beta^\vee$ du système $R({}^{L}B^\circ \cap {}^{L}M^\circ, {}^{L}T^\circ)$,un vecteur radiciel $Y_{\beta^\vee}$ de sorte que ${}^{L}\sigma_G . Y_{\beta^\vee} = Y_{\sigma_G . \beta^\vee}$. Ceci découle du fait que ${}^{L}M^\circ$ est une composante de Lévi d'un sous-groupe parabolique (pas unique) ${}^{L}P^\circ$ de ${}^{L}G^\circ$ stable par ${}^{L}\sigma_G$,et du lemme 2-6 de [L]. On supposera dans la suite que (T,η) vérifie :

$$(*) \qquad \sigma_s = \omega\, \sigma_{T,\eta} \text{ pour } \omega \in \Omega({}^{L}M^\circ \cap {}^{L}H_s^\circ, {}^{L}T^\circ) .$$

On va construire un sous-groupe M' de H qui soit un groupe endoscopique pour $(\tilde{M},\alpha)$. On pose $({}^{L}M')^\circ = {}^{L}M^\circ \cap {}^{L}H_s^\circ$ (qui est connexe). D'après (*) ,$({}^{L}M')^\circ$ est stable par σ_s. On pose ${}^{L}M' = ({}^{L}M')^\circ \times W$ où $\mathbb{C}^\times \times 1$ opère trivialement et $1 \times \sigma$ opère par σ_s. Le groupe ${}^{L}P^\circ \cap {}^{L}H_s^\circ$ est un sous-groupe parabolique de ${}^{L}H^\circ$ dont $({}^{L}M')^\circ$ est une composante de Lévi ;il découle de (*) qu'il est stable par σ_s. Invoquant de nouveau le lemme 2-6 de [L] ,on voit facilement que ${}^{L}M'$ est un L-groupe et que c'est une réalisation du L-groupe du sous-groupe M' ,défini sur $\mathbb{R}$,de H engendré par T_H et par le sous-système de racines de $R(H,T_H)$ formé par les racines dont les coracines sont dans $R(({}^{L}M')^\circ, {}^{L}T^\circ)$. Il est clair , d'après (*) ,qu'il existe $m' \in M'$ tel que ,posant $T' = (m')^{-1}.T_H.m'$, l'application $i(m',\eta): T' \longrightarrow T$ est défini sur $\mathbb{R}$ et $M' = M_{T'}$.

On construit ,comme en 2-2 ,le groupe ${}^{L}\tilde{M}$ qu'on regardera comme un sous-groupe de ${}^{L}\tilde{G}$. On note $\tilde{Z}_M^W = {}^{L}\tilde{M}^\circ \cap \text{Centre}({}^{L}\tilde{M})$. Il est clair qu'il contient $\tilde{Z}^W$.

On note $s^M = s\tilde{Z}_M^W$. Alors $\mathrm{Cent}_\alpha(s^M, {}^L\tilde{M})^\circ = ({}^LM')^\circ$ où ce dernier est considéré comme un sous-groupe de ${}^L\tilde{M}^\circ$ plongé de façon diagonale. Il n'est pas difficile de voir qu'on peut trouver une donnée endoscopique $(s^M, \ldots)$ pour $(\tilde{M},\alpha)$ dont ${}^LM'$ soit le L-groupe associé. Donc M' est un groupe endoscopique pour $(\tilde{M},\alpha)$. Un argument standard montre ,d'après (*),que $\bar{T}$ est inclus dans M_1 ,donc ${}^LM'$ est en position standard. Si $\tilde{\xi}$ est un plongement permis de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$,sa restriction à ${}^LM'$ est un plongement permis de ${}^LM'$ dans ${}^L\tilde{M}$ qu'on notera $\tilde{\xi}^M$.

Soient $(U,\eta_U) \in \mathcal{T}_H(G)$ et κ le quasi-caractère qui lui est associé. Suivant shelstad [S-2] ,on dit que (U,η_U) est subordonné à M si U est inclus dans M et η_U est de la forme $\mathrm{ad}(x_1 m)$,$m \in M_1$. Alors $(U,\eta_U) \in \mathcal{T}_{M'}(M)$. Le quasi-caractère κ^M de $\{\lambda^V \in X^V(U)\ ;\ \sigma_U.\lambda^V = -\lambda^V\}/\{\mu^V-\sigma_U.\mu^V ; \mu^V \in X^V(U)\}$ associé à s^M et (U,η_U) coincide avec κ. Réciproquement si $(U,\eta_U) \in \mathcal{T}_{M'}(M)$,alors comme élément de $\mathcal{T}_H(G)$, (U,η_U) est subordonné à M.

On fixe un sous-groupe parabolique P de G défini sur $\mathbb{R}$ et contenant M comme composante de Lévi. On note N son radical unipotent. Les groupes $\tilde{M}$, $\tilde{P}$ et $\tilde{N}$ s'identifient de façon canonique à des sous-groupes de $\tilde{G}$. On fixe un sous-groupes compact maximal K de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{G}(\mathbb{R}) = K\tilde{P}(\mathbb{R})$. On note $\tilde{\underline{n}}$ l'algèbre de Lie de $\tilde{N}$. On fixe des mesures de Haar dk et $d\tilde{n}$ respectivement sur K et $\tilde{N}(\mathbb{R})$. On note $d\tilde{m}$ l'unique mesure de Haar sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ telle que ,pour toute fonction continue à support compact f sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$, on ait :

$$\int_{\tilde{G}(\mathbb{R})} f(\tilde{g})\, d\tilde{g} = \int_{\tilde{M}(\mathbb{R})} \int_{\tilde{N}(\mathbb{R})} \int_K f(k\tilde{n}\tilde{m})\, dk\, d\tilde{n}\, d\tilde{m} .$$

Si $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$,on définit $f^{\tilde{M}} \in C_c^\infty(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ par :

$$f^{\tilde{M}}(\tilde{m}) = |\det(\alpha \circ \mathrm{ad}(\tilde{m}))_{\tilde{\underline{n}}}|^{1/2} \int_{\tilde{N}(\mathbb{R})} \int_K f(\alpha(k)\tilde{m}\tilde{n}k^{-1})\, dk\, d\tilde{n} .$$

Soit (U,η_U) subordonné à M. Pour $\delta \in \tilde{U}(\mathbb{R})$ tel que $\delta\alpha(\delta)$est régulier (dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$) , on vérifie facilement que :

$$\Phi_f^{(U,\alpha,\kappa)}(\delta, du\, d\tilde{g}) = \prod_{\beta \in R(N,U)} |1-\beta(\delta\alpha(\delta))|^{-1/2} |1-\beta((\delta\alpha(\delta))^{-1})|^{-1/2} \times \Phi_{f^{\tilde{M}}}^{(U,\alpha,\kappa)}(\delta, du, d\tilde{m}) ,$$

où $\Phi_{f^{\tilde{M}}}^{(U,\alpha,\kappa)}(\delta, du, d\tilde{m})$ est défini de façon évidente.

Prenons un système de racines positives $R^+(G,U)$ dans $R(G,U)$. Alors on voit facilement que :

$$\prod_{\beta \in R(N,U)} |1-\beta(\delta\alpha(\delta))|^{1/2}|1-\beta((\delta\alpha(\delta))^{-1})|^{1/2} = \prod_{\substack{\beta \in R^+(G,U) \\ \beta \notin R(M,U)}} |1-\beta(\delta\alpha(\delta))|^{1/2}|1-\beta((\delta\alpha(\delta))^{-1})|^{1/2} .$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}_\xi(H)$. On définit de façon analogue à ci-dessus une fonction $\varphi^{M'} \in \mathcal{S}_{\tilde{\xi}^M}(M')$ (voir [S-2]) de telle sorte que , pour tout tore maximal U' de M' défini sur $\mathbb{R}$ et tout élément régulier $\gamma' \in U'(\mathbb{R})$,on ait :

$$\Phi_\varphi^{(U',1)}(\gamma',du',dh) = \prod_{\substack{\beta' \in R^+(H,U') \\ \beta' \notin R(M',U')}} |1-\beta'(\gamma')|^{-1/2}|1-\beta'(\gamma'^{-1})|^{-1/2} \times \Phi_{\varphi^{M'}}^{(U',1)}(\gamma',du',dm') .$$

où $R^+(H,U')$ est un système de racines positives quelconque dans $R(H,U')$.

Soit (U,η_U) subordonné à M. On pose :

$\epsilon^M(U,\eta_U) = (-1)^{q(G,H)-q(M,M')}\,\epsilon(U,\eta_U)$.

$b^M_{U,\eta_U}(\delta) = b_{U,\eta_U}(\delta)$, $\delta \in \tilde{U}(\mathbb{R})$.

On note $R^+(M,U) = \eta_U^{-1}(R(B^* \cap M_1, T^*))$ et, pour $\gamma \in U$, on pose :

$$'\Delta^M_{U,\eta_U}(\gamma) = \prod_{\substack{\beta \in R^+(M,U) \\ \sigma_U.\beta = -\beta \\ \kappa(\beta^\vee) \neq 1}} (1-\beta(\gamma^{-1})) \prod_{\substack{\beta \in R^+(M,U) \\ \sigma_U.\beta \neq -\beta \\ \kappa(\beta^\vee) \neq 1}} |1-\beta(\gamma)|^{1/2}|1-\beta(\gamma^{-1})|^{1/2}.$$

Signalons que si $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ et $i(h,\eta) : T' \longrightarrow T$ est défini sur $\mathbb{R}$ où T' est un tore maximal de H défini sur $\mathbb{R}$, alors $i(h,\eta)$ envoie $R(H,T')$ sur le sous-ensemble des racines $\beta \in R(G,T)$ tels que $\kappa(\beta^\vee) = 1$.

Avec les définitions ci-dessus , la proposition suivante est immédiate .

(2-5-1) <u>PROPOSITION</u>: <u>Soit</u> $\varphi \in C_c^\infty(\tilde{M}(\mathbb{R}))$. <u>Alors il existe</u> $\varphi_{M'} \in \mathcal{S}_{\tilde{\xi}^M}(M'(\mathbb{R}))$ <u>telle que</u> :

$$\Phi^{(U',1)}_{\varphi_{M'}}(\gamma',du',dm') = \begin{cases} (-1)^{q(M,M')}\ \varepsilon^{M}(U,\eta_U)\ b^{M}_{U,\eta_U}(\delta)\ \Delta^{M}_{U,\ U}(\delta\alpha(\delta)) \times \\ \Phi^{(U,\alpha,\kappa)}_{\varphi}(\delta,d\tilde{u},dm) \quad \text{si } \gamma' \text{ provient de } \delta\alpha(\delta) \text{ via } (U,\eta_U) \text{ s bordonné à } M, \\ 0 \text{ si } \gamma' \text{ n'est pas une norme} \end{cases}.$$

où γ' est un élément de $U'(\mathbb{R})$ qui provient d'un élément régulier de $H(\mathbb{R})$. En particulier si $\varphi = f^{\tilde{M}}$ pour $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, on peut prendre $\varphi_{M'} = (f_H)^{M'}$ où f_H est la fonction donnée par la proposition (2-4-1) .

3-RELÈVEMENT DES DISTRIBUTIONS.

3-1-Définition du relèvement.

On utilise les notations de 2-3 . Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$. On fixe un plongement permis $\tilde{\xi}$ de ${}^{L}H_s$ dans ${}^{L}\tilde{G}$. Rappelons qu'il existe un quasi-caractère χ de $H(\mathbb{R})$ tel que $f \in \mathcal{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$ si et seulement si χf appartient à l'espace de Harish-Chandra-Schwartz de $H(\mathbb{R})$. Une forme linéaire Θ sur $\mathcal{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$ sera dite une distribution essentiellement tempérée si et seulement si $\chi^{-1}\Theta$ est une distribution tempérée sur $H(\mathbb{R})$. Soit Θ une distribution essentiellement tempérée sur $H(\mathbb{R})$ stablement invariante (voir [S-4]). Si φ appartient à $\mathcal{S}_{\tilde{\xi}}(H(\mathbb{R}))$, $\Theta(\varphi)$ ne dépend que des intégrales orbitales stables de φ , donc si $f \in C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$, $\Theta(f_H)$ ne dépend pas du choix de la fonction f_H vérifiant la proposition (2-4-1). On définit le relèvement de Θ à $\tilde{G}(\mathbb{R})$,qu'on note $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\,\Theta$, par :

$\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\,\Theta\ (f) = \Theta\ (f_H)$.

C'est une forme linéaire sur $C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ stable par α-conjugaison. Elle est continue ;ceci découle aisément du théorème de Banach-Steinhaus .

Soit $(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$. On utilise les notations de 2-4. L'application $f \longmapsto f^{\tilde{M}}$ de $C_c^{\infty}(\tilde{G}(\mathbb{R}))$ dans $C_c^{\infty}(\tilde{M}(\mathbb{R}))$ définit par dualité une application de l'espace des distributions invariantes par α-conjugaison sur $\tilde{M}(\mathbb{R})$ dans l'espace des distributions invariantes par α-conjugaison sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ que nous noterons $\tau^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}$.

De même on définit une application de l'espace des distributions essentiellement temperées stablement invariantes sur $M'(\mathbb{R})$ dans celles sur $H(\mathbb{R})$ que nous noterons $\tau^{H}_{M'}$. Alors le lemme suivant est une conséquence directe de la proposition (2-5-1) .

(3-1-1) <u>LEMME</u>: <u>Soit Θ une distribution essentiellement tempérée stablement invariante sur $M'(\mathbb{R})$. Alors on a</u>:

$$\mathrm{Lift}^{\tilde{G}}_{H}\, \tau^{H}_{M'}\, \Theta = \tau^{\tilde{G}}_{\tilde{M}}\, \mathrm{Lift}^{\tilde{M}}_{M'}\, \Theta .$$

3-2-<u>Relèvement et action du centre de l'algèbre enveloppante</u>.

Si S est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, on note $\underline{s}$ l'algèbre de Lie de $S(\mathbb{C})$, $\underline{s}_{\mathbb{R}}$ l'algèbre de Lie de $S(\mathbb{R})$ et $\tilde{\underline{s}}$ l'algèbre de Lie de $\tilde{S}$. La différentielle de σ_S définit une involution de l'algèbre de Lie (réelle) $\underline{s}$, que nous noterons σ, de sorte que $\underline{s}_{\mathbb{R}}$ soit l'espace des points fixes de σ. Avec les identifications faites en 2-1 ,nous avons $\tilde{\underline{s}} = \underline{s} \times \underline{s}$ et la différentielle de $\sigma_{\tilde{S}}$, que nous noterons $\tilde{\sigma}$, est donnée par $\tilde{\sigma}.(X,Y) = (\sigma.Y,\sigma.X)$. L'algèbre de Lie $\underline{s}$ s'identifie, comme algèbre de Lie réelle , à l'espace des points fixes de $\tilde{\sigma}$. La complexifiée de $\underline{s}$ s'identifie canoniquement avec $\tilde{\underline{s}}$, celle de $\underline{s}_{\mathbb{R}}$ avec la diagonale de $\underline{s} \times \underline{s}$ et la complexifiée de σ , qu'on notera α , s'identifie avec: $(X,Y) \longmapsto (Y,X)$. On notera $U(\underline{s})$ l'algèbre enveloppante de $\underline{s}$ et $Z(\underline{s})$ le centre de $U(\underline{s})$. Alors $U(\tilde{\underline{s}})$ s'identifie avec $U(\underline{s}) \otimes_{\mathbb{C}} U(\underline{s})$ et $Z(\tilde{\underline{s}})$ avec $Z(\underline{s}) \otimes_{\mathbb{C}} Z(\underline{s})$. Si $\underline{t}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\underline{s}$ et T est le sous-groupe de Cartan correspondant on note $\gamma_{\underline{s}/\underline{t}}$ (ou simplement γ quand il n'y a pas de confusion à craindre) l'isomorphisme de Harish-Chandra de $Z(\underline{s})$ dans $U(\underline{t})^{\Omega(G,T)}$. On note $N_{\underline{s}}$ l'homomorphisme d'algèbres de $Z(\tilde{\underline{s}})$ dans $Z(\underline{s})$ défini par $N_{\underline{s}}(z_1 \otimes z_2) = z_1 z_2$.

On va définir un homomorphisme de $Z(\underline{g})$ dans $Z(\underline{h})$. On note $\underline{t}^*$ l'algèbre de Lie de T^* qui s'identifie avec $X^{\vee}(T^*) \otimes \mathbb{C}$. Rappelons que , si $\tilde{\xi}$ est un plongement permis de ${}^{L}H_s$ dans ${}^{L}\tilde{G}$, on a associé à $\tilde{\xi}$ en 2-3 un élément μ_* de

$X^v({}^L T^\circ) \otimes \mathbb{C}$. Il s'identifie canoniquement à une forme linéaire sur $\underline{t}^*$. L'algèbre de Lie $\underline{t}_H$ de T_H s'identifie à $\underline{t}^*$ par l'égalité $X^v(T^*) = X^v(T_H)$. On note I_{μ_*} l'isomorphisme d'algèbres de $U(\underline{t}_H)$ défini par $I_{\mu_*}(Y) = Y + \mu_*(Y)$; $Y \in \underline{t}_H$.

Comme $< \mu_*, \beta^v > = 0$ pour tout $\beta \in R(H,T_H)$, I_{μ_*} induit un isomorphisme de $U(\underline{t}_H)^{\Omega(H,T_H)}$. On pose $\mu_{\underline{g}/\underline{h}} = \gamma^{-1}_{\underline{h}/\underline{t}_H} \circ I_{\mu_*} \circ \gamma_{\underline{g}/\underline{t}^*}$. C'est un homomorphisme d'algèbres de $Z(\underline{g})$ dans $Z(\underline{h})$. On notera $\tilde{\mu}_{\underline{g}/\underline{h}} = \mu_{\underline{g}/\underline{h}} \circ N_{\underline{g}}$.

(3-2-1) <u>LEMME</u>: <u>Soit Θ une distribution essentiellement tempérée stablement invariante sur</u> $H(\mathbb{R})$. <u>Alors si</u> $z \in Z(\tilde{\underline{g}})$, <u>on a</u> :

$z.\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta = \mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \tilde{\mu}_{\underline{g}/\underline{h}}(z).\Theta$.

La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 4-2-1 de [S-2] .

3-3-<u>Relèvement des distributions Z(h)-finies</u>.

Soit Θ une distribution essentiellement tempérée sur $H(\mathbb{R})$ stablement invariante et $Z(\underline{h})$-finie. D'après un résultat classique de Harish-Chandra, Θ est une fonction localement sommable analytique sur $H(\mathbb{R})_{reg}$ (l'ensemble des éléments réguliers de $H(\mathbb{R})$). Il est clair que $Z(h)$ est une algèbre de type fini sur $\tilde{\mu}_{\underline{g}/\underline{h}}(Z(\tilde{\underline{g}}))$. On déduit alors , du lemme (3-2-1) et du théorème (2-1-1) de [B], que $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta$ est une fonction localement sommable analytique sur l'ensemble des éléments α-réguliers de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ (un élément g de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est dit α-régulier si $\mathrm{Cent}_\alpha(g,\tilde{G})^\circ$ est un tore). On notera $\tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$ l'ensemble des éléments α-réguliers de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Tout élément de $\tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$ est α-conjugué à un élément d'un $\tilde{T}(\mathbb{R})$ où T est un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$ (voir [C] , chapitre 2). Le but de ce paragraphe est de calculer $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta$ sur $\tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$ en fonction de Θ.

Soit T un tore maximal de G défini sur $\mathbb{R}$. Soient ${}^1T', \ldots, {}^rT'$ des représentants des classes de conjugaison sous $H(\mathbb{R})$ de tores maximaux de H

définis sur $\mathbb{R}$ "provenant" de T , i.e. les tores T' tels qu'il existe $i(h,\eta)$: $T' \longrightarrow T$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $1 \leq \nu \leq r$, on fixe $(T,\eta_\nu) \in \mathcal{T}_H(G)$ et $h_\nu \in H$ tels que $i_\nu = i(h_\nu,\eta_\nu) : {}^\nu T' \longrightarrow T$ soit définie sur $\mathbb{R}$. On note κ_ν le quasi-caractère associé à s et (T,η_ν) en 2-3. L'ensemble des racines $\beta \in R(G,T)$ tels que $\kappa_\nu(\beta^\vee) = 1$ s'identifie ,par i_ν , avec $R(H,{}^\nu T')$ et le sous-groupe , du groupe de Weyl $\Omega(G,T)$, engendré par ces racines ,qu'on notera $\Omega^{\kappa_\nu}(G,T)$, s'identifie avec $\Omega(H,{}^\nu T')$. Rappelons que $\Omega(G,T)$ opère dans T de telle sorte que $\omega.\lambda(\omega.\gamma) = \lambda(\gamma)$, $\lambda \in X(T)$. On note $\Omega_o(G,T)$ le sous-groupe de $\Omega(G,T)$ qui laisse stable $T(\mathbb{R})$ et $\Omega_o^{\kappa_\nu}(G,T) = \Omega^{\kappa_\nu}(G,T) \cap \Omega_o(G,T)$. A chaque élément ω de $\Omega_o(G,T)$ on associe un élément de $H^1(T)$, qu'on note de la même façon , comme suit : on choisit g appartenant au normalisateur de T dans G qui représente ω , alors la classe du cocycle $\{1 \longmapsto 1 \ , \ \sigma \longmapsto \sigma(g^{-1})g \}$ ne dépend que de ω ; c'est la classe associé à ω .

On pose $n(T) = 1/2 \ | \{ \beta \in R(G,T) \ ; \ \sigma_T.\beta = -\beta \text{ et } \kappa_\nu(\beta^\vee) \neq 1 \} |$.

(3-3-1) <u>LEMME</u>: <u>Soit</u> $\delta \in \tilde{T}(\mathbb{R}) \cap \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$. <u>Alors</u>

$$\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta\ (\delta) = (-1)^{q(G,H)+n(T)} \sum_{\nu=1}^{r} \varepsilon(T,\eta_\nu) \sum_{\omega \in \Omega_o(G,T)/\Omega_o^{\kappa_\nu}(G,T)} \kappa_\nu(\omega) \times$$

$$b_{T,\eta_\nu}(\omega^{-1}.\delta)({}'\Delta^{-1}_{T,\eta_\nu}(\Theta_\circ i_\nu^{-1}))(\omega^{-1}.(\delta\alpha(\delta))) \ .$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 4-2-4 de [S-2], comme le suggère la discussion de la page 415 de [S-1].

4-<u>RELÈVEMENT DES CARACTÈRES</u>.

4-1-<u>Caractères tordus de $\tilde{G}(\mathbb{R})$</u>.

Soit Π une représentation unitaire irréductible de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. On dit que Π est α-stable si la représentation ${}^\alpha\Pi$, définie par ${}^\alpha\Pi(g) = \Pi(\alpha(g))$ pour tout $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})$, est équivalente à Π. Si tel est le cas , il existe un opérateur involutif A_α ,unique au signe près , dans l'espace de Π tel que

${}^{\alpha}\Pi(g) = A_\alpha\, \Pi(g)\, A_\alpha$, $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})$.

Le caractère tordu associé à un choix de A_α est la distribution :

$f \longmapsto \mathrm{tr}(\, \Pi(f)_\circ\, A_\alpha\,)$, $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}))$.

Le but de ce paragraphe est de fixer un choix de A_α pour les représentations tempérées de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Ces représentations sont bien connues ; elles sont toutes obtenues de la façon suivante. Soient S un tore maximal de $\tilde{G}$ défini sur $\mathbb{R}$, χ un caractère (unitaire) de $S(\mathbb{R})$, B un sous-groupe de Borel de $\tilde{G}$ défini sur $\mathbb{R}$ et contenant S. On note N le radical unipotent de B. On pose

$\Pi^{\tilde{G}}(\chi) = \mathrm{Ind}_{S(\mathbb{R})N(\mathbb{R})}^{\tilde{G}(\mathbb{R})}\, \chi \otimes 1_{N(\mathbb{R})}$.

C'est une représentation irréductible tempérée de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ et on obtient ainsi toutes les représentations irréductibles tempérées , à équivalence près , de $\tilde{G}(\mathbb{R})$. On a omis B et S dans la notation car la représentation $\Pi^{\tilde{G}}(\chi)$ ne dépend pas du choix de B quant à S il est sous-entendu par χ. Quand il n'y a pas de confusion à craindre on note $\Pi(\chi)$ à la plaçe de $\Pi^{\tilde{G}}(\chi)$. Deux représentations $\Pi(\chi)$ et $\Pi(\chi')$ sont équivalentes si et seulement si χ et χ' sont conjugués par $\tilde{G}(\mathbb{R})$ (i.e. il existe $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ tel que $g.S.g^{-1} = S'$ et $\chi'(s') = \chi(g^{-1}.s.g)$). On note ${}^{\alpha}\chi$ le caractère du tore $\alpha(S(\mathbb{R}))$ défini par ${}^{\alpha}\chi(\alpha(s)) = \chi(s)$, $s \in S(\mathbb{R})$. Supposons que Π est α-stable. Alors χ et ${}^{\alpha}\chi$ sont conjugués par $\tilde{G}(\mathbb{R})$. Puisque G est quasi-déployé , on peut choisir un conjugué χ' de χ tel que ${}^{\alpha}\chi' = \chi'$; ceci se démontre de la même façon que le théorème 4-1 de [K] , nous omettons les détails car la paramétrisation de Langlands nous fournit un tel χ' (voir 4-2). Donc toute représentation irréductible tempérée α-stable de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ est de la forme $\Pi(\chi)$ où ${}^{\alpha}\chi = \chi$ et $\alpha(S) = S$. On fixe une telle représentation. On note S_a la composante anisotrope de S. Alors $S_a(\mathbb{R})$ est un tore compact maximal de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ stable par α. On note χ_a la restriction de χ à $S_a(\mathbb{R})$. Soit K un sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ contenant $S_a(\mathbb{R})$ et stable par α. Alors χ_a est un poids extrémal du K-type minimal de $\Pi(\chi)$. On fixe A_α de telle sorte qu'il induise l'identité sur cet espace poids. On note $A_\alpha^{\tilde{G}}(\chi)$ cet opérateur. Le lemme suivant

montre qu'il ne dépend pas du choix de K.

(4-1-1) LEMME: Soient K et K' deux sous-groupes compacts maximaux contenant $S_a(\mathbb{R})$ et stables par α. Alors il existe g appartenant à $S(\mathbb{R})^\alpha$ tel que $gKg^{-1} = K'$ (où $S(\mathbb{R})^\alpha$ désigne l'ensemble des points fixes par α de $S(\mathbb{R})$).

DÉMONSTRATION: Soit $x \in \tilde{G}(\mathbb{R})$ tel que $xKx^{-1} = K'$. Alors il existe $k' \in K'$ tel que $ad(k'x)$ envoie K sur K' et laisse $S_a(\mathbb{R})$ stable. Quitte à remplacer k' par un autre élément de K' , on peut supposer que $ad(k'x)$ centralise $S_a(\mathbb{R})$. Dans ce cas $y = k'x$ appartient à $S(\mathbb{R})$. Le fait que K et K' soient α-stables implique que $y^{-1}\alpha(y)$ appartient à K , donc c'est un élément de $S_a(\mathbb{R})$. Notons S_d la composante déployée de S. Alors $S_a(\mathbb{R}) \cap S_d(\mathbb{R})_\circ = \{ 1 \}$ et $S(\mathbb{R}) = S_a(\mathbb{R}).S_d(\mathbb{R})_\circ$. On écrit $y = uv$ suivant cette décomposition. Il est alors clair que $\alpha(v) = v$ et $vKv^{-1} = K'$, d'où le lemme.

Soit P un sous-groupe parabolique de $\tilde{G}$ défini sur $\mathbb{R}$, contenant S et stable par α. On note N le radical unipotent de P et $\tilde{M}$ la composante de Lévi de P contenant S; ils sont définis sur $\mathbb{R}$ et stables par α. Alors les représentations $\Pi^{\tilde{M}}(\chi)$ et $\Pi^{\tilde{G}}(\chi)$ sont définies et on a :

$$\Pi^{\tilde{G}}(\chi) = \mathrm{Ind}_{\tilde{M}(\mathbb{R})\,N(\mathbb{R})}^{\tilde{G}(\mathbb{R})} \Pi^{\tilde{M}}(\chi) \otimes 1_{N(\mathbb{R})} .$$

Cette représentation est réalisée dans un espace de fonctions sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ à valeurs dans l'espace de $\Pi^{\tilde{M}}(\chi)$. On vérifie facilement,comme dans ([B-2] , p.551), que :

(4-1-2) $(A_\alpha^{\tilde{G}}(\chi).\varphi)(g) = A_\alpha^{\tilde{M}}(\chi).\varphi(\alpha(g))$.

4-2-Relèvement des caractères (résultat principal).

Soit H un groupe endoscopique pour $(\tilde{G},\alpha)$. On adopte les notations de 2-3. Soit $\tilde{\xi}$ un plongement permis de ${}^LH_s$ dans ${}^L\tilde{G}$. On a vu en 2-3 que $\tilde{\xi}$ est de la forme :

$\tilde{\xi}(h \times 1 \times 1) = (h\ ,\ h) \times 1 \times 1 \quad , h \in \tilde{H}^{\circ}_{s}$.

$\tilde{\xi}(1 \times z \times 1) = (\tilde{\xi}_{o}(z)\ ,\ \tilde{\xi}_{o}(z)) \times z \times 1 \quad , z \in \mathbb{C}^{\times}$.

$\tilde{\xi}(1 \times 1 \times \sigma) = (xm_{o}\ ,\ m_{o}) \times 1 \times \sigma$,

où $\tilde{\xi}_{o}$ est un homomorphisme de $\mathbb{C}^{\times}$ dans Centre($^{L}H_{s}$) vérifiant $\tilde{\xi}_{o}(\bar{z}) = \sigma_{s}(\tilde{\xi}_{o}(z))$, $z \in \mathbb{C}^{\times}$, m_{o} est un élément du normalisateur de $^{L}T^{\circ}$ dans $^{L}G^{\circ}$ tel que $xm_{o}\sigma_{G}(m_{o}) = \tilde{\xi}_{o}(-1)$, $x^{-1}m_{o}\sigma_{G}(x) = m_{o}$ et la restriction de $ad(m_{o}) \circ {}^{L}\sigma_{G}$ à $^{L}H^{\circ}_{s}$ coincide avec σ_{s} .

Soit φ un homomorphisme admissible de W dans $^{L}H_{s}$ (voir [L]). On pose $\tilde{\varphi} = \tilde{\xi} \circ \varphi$. C'est un homomorphisme admissible de W dans $^{L}\tilde{G}$. Comme on s'interesse à φ et $\tilde{\varphi}$ seulement à travers les L-paquets de représentations qui leurs sont associés,on peut les remplacer par des conjugués respectivement par $^{L}H^{\circ}_{s}$ et $^{L}\tilde{G}^{\circ}$. Rappelons que φ se factorise à travers un sous-groupe de Lévi de $^{L}H_{s}$ (voir [Bor])et qu'un sous-groupe de Lévi minimal parmi ceux qui contiennent $\varphi(W)$ est conjugué à un des sous-groupes $^{L}M_{T'}$ (voir 2-4) où T' est un tore maximal de H défini sur $\mathbb{R}$ tel que $S_{T'} \subseteq T_{H}$. Quitte à remplacer φ , par un conjugué par $^{L}H^{\circ}_{s}$, on supposera dans la suite que $\varphi(W)$ est inclus dans un $^{L}M_{T'}$ (comme ci-dessus) , qu'il n'est contenu dans aucun sous-groupe de Lévi propre de $^{L}M_{T'}$ et qu'il normalise $^{L}T^{\circ}$. Alors φ est de la forme :

$\varphi(z \times 1) = \varphi_{o}(z) \times z \times 1 \quad , z \in \mathbb{C}^{\times}$.

$\varphi(1 \times \sigma) = n_{H} \times 1 \times \sigma$,

où φ_{o} est un homomorphisme de $\mathbb{C}^{\times}$ dans $^{L}T^{\circ}$ tel que $\varphi_{o}(\bar{z}) = ad(\varphi(1 \times \sigma)).\varphi(z)_{o}$, $z \in \mathbb{C}^{\times}$ et $n_{H}\sigma_{s}(n_{H}) = \varphi_{o}(-1)$. Notons $\bar{\sigma}$ la restriction de $ad(\varphi(1 \times \sigma))$ à $^{L}T^{\circ}$ ainsi que l'involution qui s'en déduit sur $X^{v}(^{L}T^{\circ})$. Utilisant les notations usuelles on pose $\varphi_{o}(z) = z^{\mu}\ \bar{z}^{\bar{\sigma}.\mu}$, $\mu \in X^{v}(^{L}T^{\circ}) \otimes \mathbb{C}$. Donc

$\tilde{\varphi}(z \times 1) = (\tilde{\varphi}_{o}(z)\ ,\ \tilde{\varphi}_{o}(z)) \times z \times 1 \quad , z \in \mathbb{C}^{\times}$,

$\tilde{\varphi}(1 \times \sigma) = (xn_{H}m_{o}\ ,\ n_{H}m_{o}) \times 1 \times \sigma$,

où $\tilde{\varphi}_{o}(z) = \varphi_{o}(z)\tilde{\xi}_{o}(z)$, $z \in \mathbb{C}^{\times}$.

Supposons que $\tilde{\varphi}(W)$ est borné. Alors la représentation de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ associée à $\tilde{\varphi}$ est tempérée. Nous allons la décrire en fonction des paramètres de 4-1. Soit

$(T,\eta) \in \mathcal{T}_H(G)$ tel que $\sigma_{T,\eta} = \bar{\sigma}$. On identifie $\tilde{T}$ avec un sous-groupe de $\tilde{G}$. Soit $\delta \in \tilde{T}(\mathbb{R})$. Alors il s'ecrit $\delta = (\exp.Y\ ,\ \exp.\sigma_T\bar{Y})$ où Y est un élément de $\underline{t}$. On pose $\chi_{\tilde{\varphi}}(\delta) = e^{(\mu + \mu_*)(\eta(Y + \sigma_T.\bar{Y}))}$. C'est un caractère unitaire α-stable de $\tilde{T}(\mathbb{R})$. La représentation $\Pi_{\tilde{\varphi}}$ de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ associée à $\tilde{\varphi}$ est $\Pi(\chi_{\tilde{\varphi}})$. Le caractère $\chi_{\tilde{\varphi}}$ ne dépend pas seulement de $\tilde{\varphi}$, il dépend aussi de η. On note $\Sigma_o = \eta^{-1}(R(B^*,T^*)$. Soit $\omega_o \in \Omega(M,T)$ tel que $\langle\ \omega_o.\eta^{-1}(\mu + \mu_*)\ ,\ \beta^v\ \rangle \geq 0$ pour tout $\beta \in \Sigma_o \cap R(M,T)$. On pose $n(\omega_o) = |\{\ \beta \in \Sigma_o \cap R(M,T)\ ;\ \omega_o.\beta \in -\Sigma_o$ et $\kappa_{T,\eta}(\beta^v) \neq 1\ \}|$. Il est clair que $n(\omega_o)$ ne dépend pas de η ; le théorème ci-dessous montre qu'il ne dépend pas du choix de ω_o. On pose $A^{\tilde{G}}_{\tilde{\varphi}} = (-1)^{n(\omega_o)}\ \epsilon^M(T,\eta)\ A^{\tilde{G}}_{\alpha}(\chi_{\tilde{\varphi}})$ où M désigne M_T. Le théorème ci-dessous montre que $A^{\tilde{G}}_{\tilde{\varphi}}$ ne dépend pas de η. On note ${}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\varphi}}$ le caractère tordu de $\Pi_{\tilde{\varphi}}$ associé au choix de $A_\alpha = A^{\tilde{G}}_{\tilde{\varphi}}$. On note Θ_φ le caractère du L-paquet de représentations de $H(\mathbb{R})$ associé à φ. Le résultat principal de cet article est

(4-2-1) <u>THÉORÈME</u>: <u>Utilisant les notations ci-dessus on a</u>:

$$\mathrm{Lift}^{\tilde{G}}_H\ \Theta_\varphi = {}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\varphi}}$$

<u>DÉMONSTRATION</u>: Nous ferons la démonstration en trois étapes.

<u>Première étape</u>: Nous supposons que T est anisotrope modulo le centre de G et $\langle\ \mu + \mu_*\ ,\ \beta^v\ \rangle \neq 0$ pour tout $\beta \in R(G,T^*)$. Alors M = G et $\sigma_{T,\eta}.\beta = -\beta$ pour tout $\beta \in R(G,T^*)$. Soit $m' \in M_T$, tel que $\mathrm{ad}(m').T' = T_H$. Alors $\sigma_{T',m'} = \bar{\sigma} = \sigma_{T,\eta}$. On en déduit que T' est anisotrope modulo le centre de H , et, donc M' = H . Le L-paquet de représentations de $H(\mathbb{R})$ associé à φ est alors formé par les représentations de carré intégrable modulo le centre de $H(\mathbb{R})$ dont le caractère infinitésimal est : $z \longmapsto \gamma_{\underline{h}/\underline{t}_H}(z)(\mu)$, $z \in Z(\underline{h})$ et ayant même caractère central. Notons Z_H le centre de H. Soit K_H un sous-groupe compact maximal de $H(\mathbb{R})$. On pose $q_H = 1/2\ \dim(H(\mathbb{R})\ /\ K_H Z_H(\mathbb{R}))$. On note $\mu' = \mathrm{ad}(m'^{-1}).\mu$ et Σ' le sous-système de racines positives de $R(H,T')$ formé par les racines β telles que $\langle\ \mu',\beta^v\ \rangle < 0$. Alors la formule du caractère de la série discrète de

Harish-Chandra donne , pour $Y \in \underline{t}'_{\mathbb{R}}$ tel que $\exp(Y) \in H(\mathbb{R})_{reg}$,

$$(4\text{-}2\text{-}2) \qquad \Theta_{\varphi}(\exp Y) = (-1)^{q_H} \sum_{\omega \in \Omega(H,T')} \frac{e^{\omega.(\mu' + \iota_H)(Y)}}{\prod_{\beta \in \Sigma'} (1 - e^{\omega.\beta(Y)})}.$$

où $\iota_H(Y) = 1/2 \sum_{\beta \in \Sigma'} \beta$.

D'après le théorème 2-1-1 de [B-1] , ${}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\varphi}}$ est une fonction localement sommable analytique sur $\tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$. On va la calculer sur l'ensemble des éléments α-réguliers de $\tilde{T}(\mathbb{R})$. Pour celà on utilise les résultats de [B-1]. On introduit le groupe $\tilde{G}(\mathbb{R}) \times \{1,\alpha\}$ que nous noterons ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})$. On prolonge $\Pi_{\tilde{\varphi}}$ en une représentation de ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})$,en faisant agir $1 \times \alpha$ par $A^{\tilde{G}}_{\tilde{\varphi}}$, qu'on notera aussi $\Pi_{\tilde{\varphi}}$. Cherchons les paramètres de Duflo [D] de cette représentation. On pose $\underline{q} = \{Y \in \underline{\tilde{g}} \; ; \; \alpha(Y) = -Y\}$ et $if_o = 2\eta^{-1}.(\mu + \mu_*)$ où f_o est une forme linéaire sur $\underline{t}_{\mathbb{R}}$ qu'on regarde comme une forme linéaire sur $\underline{\tilde{g}}_{\mathbb{R}}$ nulle sur $\underline{\tilde{t}}_{\mathbb{R}} \cap \underline{q} \oplus [\underline{\tilde{t}}_{\mathbb{R}} , \underline{\tilde{g}}_{\mathbb{R}}]$. On note ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)$ le centralisateur de f_o dans ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui est égal à $\tilde{T}(\mathbb{R}) \times \{1 ,\alpha\}$ puisque f_o est régulier , ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)^{\wedge}$ son revêtement d'ordre deux défini par Duflo [D] et ε l'elément non trivial du noyau de la projection de ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)^{\wedge}$ sur ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)$. On pose $\Sigma = \omega_o^{-1}.\Sigma_o$ et $\iota_{\Sigma} = 1/2 \sum_{\beta \in \Sigma} \beta$. On note $\underline{u}$ le sous-espace de $\underline{g}$ somme des sous-espaces radiciels correspondants aux racines β telles que $-\beta \in \Sigma$. Alors $\underline{\tilde{t}} \oplus \underline{\tilde{u}}$ est une polarisation en f_o totalement complexe et α-stable dans la terminologie de [D]. Soit $\rho_{\underline{\tilde{u}}}$ le caractère de ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)^{\wedge}$ associé à $\underline{\tilde{u}}$ [D]. On choisit un élément $\alpha^{\wedge}$ dans ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)^{\wedge}$ qui se projette sur $1 \times \alpha$. On pose

$$\tau_o(\alpha^{\wedge}) = \varepsilon(T,\eta) \; (-1)^{q_G + \dim \underline{u} + n(\omega_o)} \; \rho_{\underline{\tilde{u}}}(\alpha^{\wedge})^{-1},$$

où q_G est défini de la même façon que q_H.

Il existe un caractère τ_o de ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})(f_o)^{\wedge}$ de différentielle if_o tel que $\tau_o(\varepsilon) = -1$ et $\tau_o(\alpha^{\wedge})$ défini par la formule ci-dessus (voir [B-1] , p.75). On note $\Pi(f_o,\tau_o)$

la représentation de ${}^{\alpha}\tilde{G}(\mathbb{R})$ associée à (f_o,τ_o) par Duflo [D]. Alors un calcul facile utilisant la proposition de [B-2] (ou plutôt sa démonstration) montre que $\Pi_{\tilde{\gamma}}$ est équivalente à $\Pi(f_o,\tau_o)$. Comme T est anisotrope modulo le centre de G, on a $\Omega_o(G,T) = \Omega(G,T)$. Pour tout $\omega \in \Omega(G,T)$, on choisit un représentant g_ω de ω dans le normalisateur de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ dans $\tilde{G}(\mathbb{R})$ de telle sorte que $\alpha(g_\omega^{-1})g_\omega$ appartienne à $T(\mathbb{R})_o$. On choisit pour tout $\omega \in \Omega(G,T)$, un élément Y_ω de $\underline{t}_{\mathbb{R}}$ tel que $\exp.Y_\omega = \alpha(g_\omega^{-1})g_\omega$. Pour tout $Y \in \underline{t}_{\mathbb{R}}$ tel que $\exp.Y \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$, la proposition 6-1-2 de [B-1] et un calcul simple donnent :

(4-2-3) $\quad {}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\gamma}}(\exp.Y) =$

$$\varepsilon(T,\eta)\ (-1)^{q_G + n(\omega_o)} \sum_{\omega \in \Omega(G,T)} \frac{e^{(if_o - 2\iota_\Sigma)(Y_\omega + \omega^{-1}.Y)}}{\prod_{\beta \in \Sigma} (1 - e^{-\beta(2\omega^{-1}.Y)})} .$$

On va calculer le terme $c(\omega) = e^{(if_o - 2\iota_\Sigma)(Y_\omega)}$. Rappelons que $if_o = 2\,\eta^{-1}(\mu + \mu_*)$. Alors $(if_o - 2\iota_\Sigma)(Y_\omega) = (\eta^{-1}(\mu + \mu_*) - \iota_\Sigma)(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega)$. On écrit $\iota_\Sigma = \iota'_H + \iota_*$ où $\iota'_H = 1/2 \sum_{\substack{\beta \in \Sigma \\ \kappa_{T,\eta}(\beta^\vee) = 1}} \beta$ et $\iota_* = 1/2 \sum_{\substack{\beta \in \Sigma \\ \kappa_{T,\eta}(\beta^\vee) \neq 1}} \beta$. Alors on déduit du lemme(2-3-1) que $c(\omega) = \kappa_{T,\eta}(\omega)\ e^{(\eta^{-1}.\mu - \iota'_H)(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega)}$; le choix du système de racines positives diffère de celui utilisé dans le lemme(2-3-1), mais ceci n'a pas d'importance puisque $\exp(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega) = 1$. Le terme $e^{(\eta^{-1}.\mu - \iota'_H)(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega)}$ est égal à un , ceci se déduit aisément du fait que $\exp(Y_\omega + \sigma_T\bar{Y}_\omega) = 1$ et du fait que : $\exp(Y') \longmapsto e^{(\mu' - \iota_H)(Y')}$, $Y' \in \underline{t}'_{\mathbb{R}}$, est un caractère de $T'(\mathbb{R})_o$. Donc $c(\omega) = \kappa_{T,\eta}(\omega)$.

Des définitions de $n(\omega_o)$ et de $b_{T,\eta}$ on déduit :

$$\frac{e^{(\eta^{-1}.\mu_* - \iota_*)(2\omega^{-1}.Y)}}{\prod_{\substack{\beta \in \Sigma \\ \kappa_{T,\eta}(\beta^\vee) \neq 1}} (1 - e^{-\beta(2\omega^{-1}.Y)})} = (-1)^{n(\omega_o)}\ b_{T,\eta}(\exp.\omega^{-1}Y)\ {}'\Delta^{-1}_{T,\eta}(\exp.2\omega^{-1}Y).$$

Rappelons (voir [S-2],proposition 3-7-1) que $n(T) = q(G,H) + q_G - q_H$. On déduit alors de (4-2-2) , (4-2-3) et du lemme (3-3-1) que :

(4-2-4) $\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta_{\varphi}\, (\exp.Y) = {}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\varphi}}(\exp.Y)$, $Y \in \underline{t}_{\mathbb{R}}$ et $\exp.Y \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$.

On notera $\Theta = \mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta_{\varphi} - {}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\varphi}}$. Nous allons montrer que Θ est nulle. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des $Y \in \underline{g}_{\mathbb{R}}$ tels que la partie imaginaire de toute valeur propre de $\mathrm{ad}(Y)$ soit de module strictement inférieur à $\pi/2$ et $\mathcal{V} = \exp \mathcal{U}$. Alors un argument dû à Clozel ([C], p.108) montre qu'il suffit de prouver que la restriction de Θ à $\mathcal{V}$, qu'on notera Res.Θ , est nulle (pour la définition de la restriction de Θ voir ,par exemple , [C] ou [B-1]). Pour ceci on va se servir du théorème d'unicité de Harish-Chandra (voir , par exemple , [V] , II, p.68).

On définit la fonction D_G sur G par :

$\det(T + 1 - \mathrm{ad}(g)) = D_G(g)\, T^{r(G)} \bmod(T^{r(G)+1})$,

où r(G) est le rang de G.

On définit de la même façon D_H sur H et on défiinit la fonction ${}^{\alpha}D_{\tilde{G}}$ sur $\tilde{G}$ par

$\det(T + 1 - \alpha_{\circ}\mathrm{ad}(g)) = {}^{\alpha}D_{\tilde{G}}(g)\, T^{r(G)} \bmod(T^{r(G)+1})$

Pour $g \in G(\mathbb{R})$, on pose $\nu_{\alpha}(g) = \det(1 + \mathrm{ad}(g))_{\underline{q}}$. Alors on voit facilement que ${}^{\alpha}D_{\tilde{G}}(g) = \nu_{\alpha}(g)\, D_G(g)$ pour tout $g \in G(\mathbb{R})$. D'après le théorème 3-1-1 de [B-1] , il existe une constante C telle que :

(4-2-5) $$|{}^{\alpha}D_{\tilde{G}}(g)|^{1/2}\, |{}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\varphi}}(g)|^{1/2} \leq C \text{ ,pour tout } g \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}.$$

Rappelons le quasi-caractère χ de $H(\mathbb{R})$ introduit en 2-3. Alors il est facile de voir que $\chi^{-1}\Theta_{\varphi}$ est tempérée ; comme le caractère infinitésimal de Θ_{φ} est régulier il existe une constante C' telle que :

(4-2-6) $$|D_H(h)|^{1/2}\, |\chi^{-1}\Theta_{\varphi}(h)| \leq C' \text{ ,pour tout } h \in H(\mathbb{R})_{\mathrm{reg}}.$$

On déduit aisément de (4-2-6) et du lemme (3-3-1) qu'il existe une constante C" telle que :

(4-2-7) $$|{}^{\alpha}D_{\tilde{G}}(g)|^{1/2}\, |\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\, \Theta_{\varphi}\, (g)| \leq C'' \text{ ,pour tout } g \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}.$$

On pose $\theta = \nu_\alpha \mathrm{Res}.\Theta$. Alors on déduit de (4-2-5) et (4-2-7) ,qu'il existe une constante C"' telle que :

(4-2-8) $|D_G(g)|^{1/2} \, |\theta(g)| \leq C'''$,pour tout $g \in G(\mathbb{R})_{reg} \cap \mathcal{V}$.

(Remarquons que si $g \in G(\mathbb{R})_{reg} \cap \mathcal{V}$, alors g est α-régulier (voir [C])).

Soit τ le caractère de $Z(\underline{g})$ défini par : $z \longmapsto \tau_{\underline{g}/\underline{t}^*}(2(\mu + \mu_*))$. Alors on déduit du lemme (3-2-1) et du corollaire 2-4-12 de [B-1] que :

$z.\theta = \tau(z).\theta$ pour tout $z \in Z(\underline{g})$.

Comme $\eta^{-1}.(\mu + \mu_*)$ est régulier et elliptique [V] , ceci avec (4-2-8) et (4-2-4) permettent d'utiliser le théorème d'unicité de Harish-Chandra. Donc θ est nulle. Comme ν_α ne s'annule pas sur $G(\mathbb{R})_{reg} \cap \mathcal{V}$,Res.Θ est nulle sur $\mathcal{V}$. Donc Θ est nulle ; ceci termine la démonstration de la première étape.

<u>Deuxième étape</u>: Nous supposerons que T est anisotrope modulo le centre de G , mais nous supprimons l'hypothèse de régularité de $\mu + \mu_*$. Alors M = G , M' = H. $\sigma_{T,\eta} = \bar{\sigma}$ et $\bar{\sigma}.\beta = -\beta$ pour tout $\beta \in R(G,T^*)$. Rappelons le système de racines positives Σ dans R(G,T). On note V l'espace de la représentation de dimension finie de G de plus bas poids (relativement à Σ) $-2\iota_\Sigma$.On note Θ_V son caractère. On pose $\mathcal{P}_o^\Sigma = z^{(\mu + 2\iota_\Sigma)} \bar{z}^{(\bar{\sigma}.\mu - 2\iota_\Sigma)}$,$z \in \mathbb{C}^\times$. Alors il est facile de voir que $\mathcal{P}^\Sigma$ définie par :

$\mathcal{P}^\Sigma(z \times 1) = \mathcal{P}_o^\Sigma(z) \times z \times 1$, $z \in \mathbb{C}^\times$.

$\mathcal{P}^\Sigma(1 \times \sigma) = n_H \times 1 \times \sigma$.

est un homomorphisme admissible de W dans ${}^L H_s$ qui ne se factorise à travers aucun sous-groupe de Lévi propre. On note $\tilde{\mathcal{P}}^\Sigma = \tilde{\xi} \circ \mathcal{P}^\Sigma$. Comme $\eta^{-1}(\mu + \mu_*) + 2\iota_\Sigma$ est régulier , le théorème est démontré dans la première étape pour $\mathcal{P}^\Sigma$ et $\tilde{\mathcal{P}}^\Sigma$. On note $\mathcal{H}$ l'espace de $\Pi_{\tilde{\mathcal{P}}^\Sigma}$ et A_α l'opérateur involutif dans $\mathcal{H} \otimes V \otimes V$ défini par

$A_\alpha(h \otimes v \otimes w) = A^{\tilde{G}}_{\tilde{\mathcal{P}}^\Sigma}.h \otimes w \otimes v$,$h \in \mathcal{H}$,$v,w \in V$.

Notons ${}^\alpha\Theta$ le caractère tordu par A_α de la représentation de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{H} \otimes V \otimes V$. Alors on a

(4-2-9) ${}^{\alpha}\Theta(g) = {}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\mathfrak{P}}^{\Sigma}}(g)\ \Theta_V(g\alpha(g))$, $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$.

On fixe un sous-groupe compact maximal K de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ contenant $\tilde{T}_a(\mathbb{R})$ et stable par α. On note $\mathcal{H}^f$ le sous-espace des vecteurs K-finis de $\mathcal{H}$. Soit $Z(\tilde{\underline{g}})^{\alpha}$ la sous-algèbre des éléments fixés par α de $Z(\tilde{\underline{g}})$. Alors pour tout caractère τ de $Z(\tilde{\underline{g}})^{\alpha}$, on note $(\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V)_{\tau}$ le sous-espace de $\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V$ dans lequel le noyau de τ (dans $Z(\tilde{\underline{g}})^{\alpha}$) opère de façon localement nilpotente. Alors $\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V$ est somme finie de sous-espaces de cette forme , tous stables par K, $\tilde{\underline{g}}$ et A_{α}. Si on note ${}^{\alpha}\Theta_{\tau}$ le caractère tordu par la restriction de A_{α} de $(\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V)_{\tau}$, on a ${}^{\alpha}\Theta = \sum_{\tau} {}^{\alpha}\Theta_{\tau}$. On note $\tau_{\tilde{\mathfrak{P}}}$ le caractère de $Z(\tilde{\underline{g}})$ (ou sa restriction à $Z(\tilde{\underline{g}})^{\alpha}$) associé à $(\mu + \mu_*\ ,\ \mu + \mu_*)$ via l'isomorphisme $\gamma_{\tilde{\underline{g}}/\tilde{\underline{t}}^*}$. Alors il est bien connu que $(\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V)_{\tau_{\tilde{\mathfrak{P}}}}$ est isomorphe , en tant que $(\tilde{\underline{g}}\ ,\ K)$, à l'espace des vecteurs K-finis de la représentation $\Pi_{\tilde{\mathfrak{P}}}$. La démonstration de la proposition de [B-2] montre , qu'avec cet isomorphisme , la restriction de A_{α} à $(\mathcal{H}^f \otimes V \otimes V)_{\tau_{\tilde{\mathfrak{P}}}}$ s'identifie avec $A^{\tilde{G}}_{\tilde{\mathfrak{P}}}$. Donc

(4-2-10) $({}^{\alpha}\Theta)_{\tau_{\tilde{\mathfrak{P}}}} = {}^{\alpha}\Theta_{\tilde{\mathfrak{P}}}$.

La représentation V définit un caractère (virtuel) V' de H (ce résultat est implicite dans ([S-1],4-4-1),voir aussi ([A-J],proposition 6-4)) de la façon suivante. Les poids de T' dans V' sont les poids de T dans V qu'on transporte à T' via $i(m',\eta)$. Alors il est facile de voir que V' existe et que si on se donne deux tores $\bar{T}$ et $\bar{T}'$ définis sur $\mathbb{R}$ respectivement dans G et H et $\bar{i} = \bar{i}(\bar{h},\bar{\eta}) : \bar{T}' \longrightarrow \bar{T}$, alors $\Theta_V(\gamma) = \Theta_{V'}(\bar{i}^{-1}(\gamma))$, pour tout $\gamma \in \bar{T}$, où $\Theta_{V'}$ désigne le caractère de V'. On déduit alors du lemme (3-3-1) que

$\mathrm{Lift}^{\tilde{G}}_{H}(\Theta_{\mathfrak{P}^{\Sigma}}\ \Theta_{V'})(g) = \mathrm{Lift}^{\tilde{G}}_{H}\ \Theta_{\mathfrak{P}^{\Sigma}}(g)\ \Theta_V(g\alpha(g))$, $g \in \tilde{G}(\mathbb{R})_{\alpha\text{-reg}}$.

Utilisant la première étape de la démonstration du théorème et (4-2-9) , on obtient :

(4-2-11) $\quad \mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\,(\theta_{\varphi^\Sigma}\,\theta_{V'}) = {}^{\alpha}\theta.$

On décompose $\theta_{\varphi^\Sigma}\,\theta_{V'}$ en somme de distributions vecteurs propres de $Z(\underline{h})$. Soit τ_φ le caractère de $Z(\underline{h})$ associé à μ via l'isomorphisme $\gamma_{\underline{h}/\underline{t}_H}$. Il est bien connu que $(\theta_{\varphi^\Sigma}\,\theta_{V'})_{\tau_\varphi} = \theta_\varphi$. Compte tenu du lemme (3-2-1) et des formules (4-2-10) et (4-2-11) plus un argument standard , on déduit :

$$\mathrm{Lift}_H^{\tilde{G}}\,\theta_\varphi = {}^{\alpha}\theta_{\tilde{\varphi}},$$

ce qui termine la démonstration du théorème pour cette étape .

<u>Troixième étape</u>: On ne fait plus aucune hypothèse particulière. On note $\theta_\varphi^{M'}$ le caractère du L-paquet de représentations de M' associé à φ et ${}^{\alpha}\theta_{\tilde{\varphi}}^{\tilde{M}}$ le caractère tordu par $(-1)^{n(\omega_o)}\varepsilon^M(T,\eta)\,A_\alpha^{\tilde{M}}(x_{\tilde{\varphi}})$ de la représentation de $\tilde{M}$ associée à $\tilde{\varphi}$. Alors, compte tenu de (4-1-2) et utilisant les notations de 3-1 , on a ${}^{\alpha}\theta_{\tilde{\varphi}} = \tau_{\tilde{M}}^{\tilde{G}}\,({}^{\alpha}\theta_{\tilde{\varphi}}^{\tilde{M}})$ (voir [B-1] ,§-7). De même on a $\theta_\varphi = \tau_{M'}^{H}(\theta_\varphi^{M'})$. Le théorème découle alors des deux premières étapes et du lemme (3-1-1). Ceci termine la démonstration du théorème.

<u>REMARQUE</u>: Quand H = G , le théorème (4-2-1) est une reformulation du résultat principal de [C].

5-<u>TRANSFERT D'INTÉGRALES ORBITALES DE FONCTIONS K-FINIES</u>.

On reprend les notations de 2-3. On fixe K (resp. K_H) un sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}(\mathbb{R})$ (resp. $H(\mathbb{R})$). On note $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur $\tilde{G}(\mathbb{R})$ qui sont K-finies par translations à droite et à gauche. La notation $C_c^\infty(H(\mathbb{R}),K_H)$ a la signification évidente. Le but de ce paragraphe est de montrer :

(5-1) <u>THÉORÈME</u>: <u>Avec les notations de la proposition</u> (2-3-1) , <u>si f est dans</u> $C_c^\infty(\tilde{G}(\mathbb{R}),K)$ <u>on peut choisir</u> f_H <u>dans</u> $\underline{C_c^\infty(H(\mathbb{R}),K_H)}$.

<u>DÉMONSTRATION</u>: Ce théorème découle de la proposition (2-4-1) , du théorème (4-2-1) et du théorème de Paley-Wiener de [C-D]. Ce type d'argument a été utilisé par L. Clozel pour la démonstration d'un résultat analogue dans le cas de la L-indiscernabilité (voir [C-D] ,Appendice). Pour détailler l'argument dans la situation présente , nous commençons par introduire quelques notations. On fixe T'_j $(j=1...r)$ un ensemble de représentants,à conjugaison près sous $H(\mathbb{R})$,des tores maximaux définis sur $\mathbb{R}$ de H. On note $M'_j = M_{T'_j}$ et on fixe un sous-groupe parabolique P'_j de H défini sur $\mathbb{R}$ dont M'_j est une composante de Lévi; on note N'_j le radical unipotent de P'_j de sorte que $P'_j = M'_j N'_j$. Tout sous-groupe parabolique cuspidal de $H(\mathbb{R})$ est conjugué sous $H(\mathbb{R})$ à l'un des $P'_j(\mathbb{R})$. Rappelons qu'on a identifié ${}^LM'_j$ à un sous-groupe de ${}^LH_s$ (voir 2-5). Un homomorphisme admissible φ de W dans ${}^LM'_j$ est dit discret si $\varphi(W)$ n'est inclus dans aucun sous-groupe parabolique propre de ${}^LM'_j$; on dira que φ est une section discrète de ${}^LM'_j$. A conjugaison près par ${}^LH^\circ_s$, toute section de ${}^LH_s$ se factorise à travers une section discrète d'un unique ${}^LM'_j$ [L]. A chaque section φ de ${}^LH_s$ on associe un pseudo-L-paquet (on écrira PL-paquet) de représentations de $H(\mathbb{R})$ de la façon suivante. On prend une section discrète φ_j de ${}^LM'_j$ dans la même classe de conjugaison que φ , on note $\pi^{M'_j}_{\varphi_j}$ le L-paquet de représentations de carré intégrable modulo le centre de $M'_j(\mathbb{R})$ et on note $\pi_{\varphi_j} = \mathrm{Ind}^{H(\mathbb{R})}_{M'_j(\mathbb{R})N'_j(\mathbb{R})} \pi^{M'_j}_{\varphi_j}\otimes 1$; le PL-paquet associé à φ est l'ensemble des représentations de $H(\mathbb{R})$ qui interviennent dans π_{φ_j} . La classe de conjugaison sous $({}^LM'_j)^\circ$ de φ_j n'est pas uniquement déterminée par φ ; un autre choix de φ_j affectera les représentations π_{φ_j} mais pas le PL-paquet. On notera Θ_φ la somme des caractères des membres du PL-paquet associé à φ. Pour l'utilisation du théorème de Paley-Wiener on aura besoin d'une autre paramétrisation des PL-paquets . Si S est le groupe des points réels d'un groupe algébrique connexe $\underset{\sim}{S}$ défini sur $\mathbb{R}$, on note $S = {}^\circ SA_S$ sa décomposition de Langlands ; A_S est la composante neutre du groupe des points réels du plus grand tore déployé dans le centre de $\underset{\sim}{S}$. Pour simplifier on notera

$A'_j = A_{M'_j(\mathbb{R})}$. Si φ est une section discrète de ${}^LM'_j$, on notera $\delta_\varphi \otimes \lambda_\varphi$ le L-paquet de représentations de $M'_j(\mathbb{R})$ associé à φ, où δ_φ est une somme finie de représentations de la série discrète de ${}^\circ M'_j(\mathbb{R})$ et λ_φ est un quasi-caractère de A'_j. Si $\delta \otimes \lambda$ est la décomposition d'un L-paquet discret de $M'_j(\mathbb{R})$, on notera $\varphi(\delta,\lambda)$ la section discrète de ${}^LM'_j$ associée à ce L-paquet et $\pi_{\delta,\lambda}$ le PL-paquet associé à $\varphi(\delta,\lambda)$. On regardera souvent λ comme une forme linéaire sur la complexifiée de l'algèbre de Lie de A'_j.

Pour $1 \leq j \leq r$, on choisit $m'_j \in M'_j$ tel que $ad(m'_j).T'_j = T_H$ et on note $\sigma_j = \sigma_{T'_j,m'_j}$. On fixe $(T_j,\eta_j) \in \mathcal{T}_H(G)$ avec T_j standard tel que $\sigma_{T_j,\eta_j} = \sigma_j$. Alors l'application $i(m'_j,\eta_j)$: $T'_j \longmapsto T_j$ est définie sur $\mathbb{R}$. On note $M_j = M_{T_j}$ et on fixe un sous-groupe parabolique P_j de G défini sur $\mathbb{R}$ dont M_j est une composante de Lévi; on note N_j le radical unipotent de P_j de sorte que $P_j = M_jN_j$. On identifie , comme en 2-5 , ${}^LM_j$ avec un sous-groupe de ${}^LG$ et donc ${}^L\tilde{M}_j$ s'identifie de façon naturelle à un sous-groupe de ${}^L\tilde{G}$. L'image de ${}^LM'_j$ par $\tilde{\xi}$ est dans ${}^L\tilde{M}_j$ (voir 2-5). Si $\delta \otimes \lambda$ est un L-paquet de $M'_j(\mathbb{R})$, $\tilde{\varphi}(\delta,\lambda) = \tilde{\xi}_\circ \varphi(\delta,\lambda)$ est une section de ${}^L\tilde{M}_j$. Le L-paquet de $\tilde{M}_j(\mathbb{R})$ associé à $\tilde{\varphi}(\delta,\lambda)$ est une série principale tempérée modulo torsion par un quasi-caractère du centre de $\tilde{M}(\mathbb{R})$; nous allons décrire ses paramètres de Zelobenko en fonction de δ et λ. Pour alléger les notations nous omettons l'indice j . Soit $\underline{t}'$ l'algèbre de Lie de $T'(\mathbb{C})$. On décompose $\underline{t}'$ en somme de deux sous-espaces propres $\underline{t}'_+$ et $\underline{t}'_-$ correspondants aux valeurs propres ∓ 1 de $\sigma_{T'}$; ainsi $\underline{t}'_+$ (resp. $\underline{t}'_-$) s'identifie à la complexifiée de l'algèbre de Lie de A' (resp. $T'(\mathbb{R}) \cap {}^\circ M'(\mathbb{R})$). Alors λ s'identifie avec une forme linéaire sur $\underline{t}'_+$ qu'on regarde comme une forme linéaire sur $\underline{t}'$ en la prolongeant par 0 sur $\underline{t}'_-$. De même si μ_δ est le paramètre de harish-Chandra (relativement à $T'(\mathbb{R}) \cap {}^\circ M'(\mathbb{R})$) d'une composante de δ on regarde μ_δ comme forme linéaire sur $\underline{t}'$ nulle sur $\underline{t}'_+$. On décompose l'algèbre de Lie $\underline{t}$ de $T(\mathbb{C})$ de la même façon. Alors l'isomorphisme $i(m',\eta)$ induit un isomorphisme entre $\underline{t}'_{\mp}$ et $\underline{t}_{\mp}$. On transporte μ_δ et λ par cet isomorphisme sans changer les notations et on définit le caractère

$\tilde{x}_{\delta,\lambda}$ de $\tilde{T}(\mathbb{R}) = T(\mathbb{C})$ par :

$\exp(X) \longmapsto e^{(\mu_\delta + \lambda + \eta^{-1}.\mu_*)}$. Pour simplifier on note $\eta^{-1}.\mu_*$ simplement μ_*. Si $\tilde{T}_a$ (resp. $\tilde{T}_d$) désigne la composante anisotrope (resp. déployée) de $\tilde{T}$, on a $\tilde{T}(\mathbb{R}) = \tilde{T}_a(\mathbb{R})\tilde{T}_d(\mathbb{R})_\circ$; tout élément de $\tilde{T}_a(\mathbb{R})$ est de la forme $\exp(X), X \in \underline{t}$ et $\bar{X} = -X$, et tout élément de $\tilde{T}_d(\mathbb{R})$ est de la forme $\exp(Y)$, $Y \in \underline{t}$ et $\bar{Y} = Y$. Donc la restriction de $\tilde{x}_{\delta,\lambda}$ respectivement à $\tilde{T}_a(\mathbb{R})$ et $\tilde{T}_d(\mathbb{R})$ est:

$\exp(X) \longmapsto e^{(2\mu_\delta + \mu_* - \sigma_T.\mu_*)(X)}$

$\exp(Y) \longmapsto e^{(2\lambda + \mu_* + \sigma_T.\mu_*)(Y)}$

Le L-paquet de $\tilde{M}(\mathbb{R})$ associé à $\tilde{\mathcal{P}}(\delta,\lambda)$ est la série principale de paramètres de Zelobenko $(2\mu_\delta + \mu_* - \sigma_T.\mu_* , 2\lambda + \mu_* + \sigma_T.\mu_*)$, on la note $\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda}$. On écrit $\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda} = {}^\circ\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda} \otimes \tilde{\lambda}$ où ${}^\circ\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda}$ est la restriction à ${}^\circ\tilde{M}(\mathbb{R})$ et $\tilde{\lambda}$ est un quasi-caractère de $A_{\tilde{M}(\mathbb{R})}$. Alors on voit facilement que ${}^\circ\Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda}$ est la série principale unitaire de paramètres $(2\mu_\delta + \mu_* - \sigma_T.\mu_*,0)$ et $\tilde{\lambda}$ est le quasi-caractère:

$\exp(Y) \longmapsto e^{(2\lambda + \mu_* + \sigma_T.\mu_*)}$. Donc ces représentations sont réalisées dans un espace fixe ne dépendant pas de λ. On note $\Pi_{\delta,\lambda} = \mathrm{Ind}_{\tilde{M}(\mathbb{R})N(\mathbb{R})}^{\tilde{G}(\mathbb{R})} \Pi^{\tilde{M}}_{\delta,\lambda}\otimes 1$. Ces représentations sont alors réalisées dans un espace fixe ne dépendant pas de λ. Il est clair que l'opérateur , défini en 4-2 , qui entrelace $\Pi_{\delta,\lambda}$ et ${}^\alpha\Pi_{\delta,\lambda}$ pour les λ tels que $\tilde{\lambda}$ est unitaire ne dépend pas de λ ; on le note A_δ.

On va montrer que la fonction F: $(\delta,\lambda) \longmapsto \mathrm{tr}(\Pi_{\delta,\lambda}(f)_\circ A_\delta)$ vérifie les hypothèses (i),(ii) et (iii) du théorème A-1 de l'appendice de [C-D].

L'hypothèse (ii) dit que,pour δ fixé , la fonction: $\lambda \longmapsto F(\delta,\lambda)$ appartient à l'espace de Paley-Wiener de $\underline{t}^*_+$; ceci découle aisément de la description ci-dessus de F et du fait que si π est une représentation unitaire de ${}^\circ\tilde{M}(\mathbb{R})$ et si $\Pi(\nu) = \mathrm{Ind}_{\tilde{M}(\mathbb{R})\tilde{N}(\mathbb{R})}^{\tilde{G}(\mathbb{R})} \pi\otimes\nu\otimes 1$,où ν est un quasi-caractère de $A_{\tilde{M}(\mathbb{R})}$,alors les coefficients de $\Pi(f)$ sont ,comme fonctions de ν , dans l'espace de Paley-Wiener de la complxifiée de l'algèbre de Lie de $A_{\tilde{M}(\mathbb{R})}$ (voir,par exemple,[C-D] ,2-1).

Pour l'hypothèse (iii) on doit vérifier que si $\omega \in \Omega(H(\mathbb{R}),A')$ alors $F(\delta,\lambda) = F(\omega.\delta,\omega.\lambda)$. Fixons δ. Les PL-paquets $\pi_{\delta,\lambda}$ et $\pi_{\omega.\delta,\omega.\lambda}$ coincident pour tout λ. Pour les λ tels que $\tilde{\lambda}$ est unitaire , on a d'après le théorème 4-2 :

$\mathrm{tr}(\Pi_{\delta,\lambda}(f)\circ A_\delta) = \Theta_{\delta,\lambda}(f_H)$

$\mathrm{tr}(\Pi_{\omega.\delta,\omega.\lambda}(f)\circ A_{\omega.\delta}) = \Theta_{\delta,\lambda}(f_H)$

où f_H est la fonction associée à f par la proposition (2-4-1) ; donc pour ces λ on a $F(\delta,\lambda) = F(\omega.\delta,\omega.\lambda)$ et par analycité de $F(\delta\ ,.)$ on déduit l'égalité pour tout λ. Il nous reste à vérifier l'hypothèse (i), c'est à dire qu'il n'existe qu'un nombre fini de δ tels que $F(\delta,\lambda)$ est non nulle. Comme f est K-finie , il existe un nombre fini de représentations de K telles que si $\Pi_{\delta,\lambda}$ ne contient pas l'une d'elles on a $\Pi_{\delta,\lambda}(f) = 0$. Il est clair qu'on peut supposer que $\tilde{T}_a(\mathbb{R})$ est inclus dans K. D'après la réciprocité de Frobenius, pour que $\Pi_{\delta,\lambda}$ contienne une représentation de K il faut et il suffit que $2\mu_\delta + \mu_* - \sigma_T.\mu_*$ soit un poids de cette représentation. Donc il n'y a qu'un nombre fini de μ_δ tels que $\Pi_{\delta,\lambda}(f) \neq 0$. Comme $^\circ M'(\mathbb{R})$ a un nombre fini de composantes connexes, il n'y a qu'un nombre fini de δ ayant le même paramètre de Harish-Chandra. Donc F vérifie les hypothèses du théorème A-1 de [C-D]. Il existe,alors, d'après ce théorème, $f'_H \in C_c^\infty(H(\mathbb{R}),K_H)$ telle que $F(\delta,\lambda) = \Theta_{\delta,\lambda}(f'_H)$. Donc,d'après le théorème (4-2-1), $\Theta_\varphi(f_H - f'_H) = 0$ pour toute section φ de ${}^L H_s$ telle que $\tilde{\varphi}$ est bornée. Pour ces sections, il existe un quasi-caractère χ de $H(\mathbb{R})$ tel que $\Theta_\varphi.\chi^{-1}$est tempérée. Donc pour tout φ bornée on a $\Theta_\varphi(\chi f_H - \chi f'_H) = 0$. Donc ,d'après le lemme 5-3 de [S-4], les intégrales orbitales stables de χf_H et $\chi f'_H$ sur les éléments réguliers de $H(\mathbb{R})$ coincident et donc aussi celles de f_H et f'_H. Ceci termine la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

[A-J] J. Adams and J. Johnson , Endoscopic groups and packets of non-tempered representations, Compositio Math. 64 (1987), 271-309.

[Bor] A. Borel , Automorphic L-functions , Proc. Symp. Pure Math. 33,part 2 , Amer. Math Soc. (1977), 27-61.

[B-1] A. Bouaziz , Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes , J. of Funct. Anal. 70 , No. 1 (1987), 1-79.

[B-2] A. Bouaziz , Sur les représentations des groupes de Lie réductifs non connexes, Math. Ann. 268 (1984), 539-555.

[C] L. Clozel , Changement de base pour les représentations tempérées des groupes réductifs réels,Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 15 (1982), 45-115 .

[C-D] L. Clozel et P. Delorme , Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs, Invent. Math. 77 (1984), 427-453.

[D] M. Duflo , Constructions de représentations unitaires d'un groupe de Lie , "Cours d'été au C.I.M.E. Cortona (1980)", Liguori,Naples, 1982.

[K] R.E. Kottwitz , Rational conjugacy classes in reductive groups, Duke Math. J. 49 (1982), 785-806.

[L] R.P. Langlands , On the classification of irreducible representations of real algebraic groups , preprint (1973).

[S-1] D. Shelstad , Endoscopic groups and base change $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, Pac. J. of Math. 110 , No. 2 (1984), 397-416.

[S-2] D. Shelstad , L-indistinguishability for real groups, Math. Ann. 259 (1982), 385-430.

[S-3] D. Shelstad , Embeddings of L-groups , Canad. J. Math. 33 (1981), 513-558.

[S-4] D. Shelstad , Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$ Compositio Math. 39 (1979), 11-45.

[Spr] T.A. Springer , reductive groups , Proc. Sympos. Pure Math. 33 ,part 1, Amer. Math. Soc. (1979), 3-27.

[V] V.S. Varadarajan , Harmonic Anaysis on Real Reductive groups, Lectures notes in Math. 576, Springer-Verlag, Berlin/New York,(1977).

Abderrazak Bouaziz

Université Paris VII,U.A. 748 du C.N.R.S

U.F.R. de mathématiques

2,Place Jussieu

75251 PARIS Cedex 05 , France.