

# *Astérisque*

H. BLAINE JUN. LAWSON

**La classification des 2-sphères minimales dans  
l'espace projectif complexe**

*Astérisque*, tome 154-155 (1987), p. 131-149

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1987\\_\\_154-155\\_\\_131\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__154-155__131_0)

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA CLASSIFICATION DES 2-SPHÈRES MINIMALES  
DANS L'ESPACE PROJECTIF COMPLEXE

H. Blaine LAWSON, Jr.

Il y a en ce moment beaucoup d'intérêt chez les physiciens théoriciens pour les modèles dont la partie classique consiste en les applications  $f : S^2 \rightarrow X$  de la sphère de dimension 2 dans un espace riemannien compact donné  $X$ . Sur cet espace d'applications le lagrangien est l'énergie classique

$$L(f) = \int_{S^2} \|df\|^2$$

et les points critiques de cette fonctionnelle sont les applications harmoniques. Pour la sphère  $S^2$ , les applications harmoniques sont forcément minimales (voir [5] par exemple).

Le premier résultat dans ce domaine a été établi par E. Calabi [2], [3] qui a trouvé une classification des applications minimales de  $S^2$  dans une sphère euclidienne. C'était une classification en termes holomorphes dans l'esprit de Weierstrass (voir l'exposé I dans ce volume). A la suite de Calabi les physiciens A.M. Din et W.J. Zakrewski, V. Glaser et R. Stora, et aussi le mathématicien D. Burns ont commencé à étudier le cas d'applications minimales de  $S^2$  dans l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$  muni de la métrique canonique de Fubini-Study ([1],[6],[7],[8]). J. Eells et J.C. Wood ont fait encore d'autres progrès [9] [10]. (Voir aussi [5][13]). On présentera ici leur construction d'une façon un peu différente de ce qu'on trouve dans la littérature. On obtient encore une belle classification des applications minimales en termes holomorphes.

I. UN LEMME FONDAMENTAL.

Pour résumer, notre classification sera fondée sur le principe suivant.

LEMME 1. - Soient  $\pi : X \rightarrow Y$  une submersion riemannienne et  $\psi : M \rightarrow X$  une immersion horizontale (c'est-à-dire telle que  $\psi(M)$  est partout orthogonale aux fibres de  $\pi$ ).

Alors l'immersion  $\psi : M \rightarrow X$  est minimale si et seulement si l'immersion obtenue par projection  $\pi \circ \psi : M \rightarrow Y$  est minimale.

Démonstration. - Soient  $V$  et  $W$  deux champs de vecteurs sur  $Y$  et considérons leurs relèvements horizontaux  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{W}$  dans  $X$ . Les équations de B. O'Neill [12] impliquent que le relèvement de la dérivée covariante  $\nabla_V W$  est la partie horizontale de la dérivée covariante  $\tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}$  en haut, i.e. que

$$(2) \quad \widetilde{\nabla_V W} = [\tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}]^H .$$

Supposons que  $\tilde{V}$  et  $\tilde{W}$  sont des champs de vecteurs sur la variété immergée horizontalement  $\psi(M)$ . La seconde forme fondamentale  $\tilde{B}$  de  $\psi(M)$  s'écrit

$$(3) \quad \tilde{B}_{\tilde{V}, \tilde{W}} = [\tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W}]^N$$

où  $\tilde{\nabla}$  désigne toujours la dérivée covariante de l'espace ambiant  $X$  et  $[\cdot]^N$  la projection normale à  $\psi(M)$ . Soient  $V, W$  les champs de vecteurs sur  $\pi\psi(M)$  obtenus par projection de  $\tilde{V}, \tilde{W}$  respectivement et considérons la seconde forme fondamentale  $B$  de  $\pi\psi(M)$ . D'après (2) et (3), on trouve que le relèvement horizontal de  $B_{V, W}$  est

$$(4) \quad \widetilde{B_{V, W}} = [\tilde{B}_{\tilde{V}, \tilde{W}}]^H .$$

En prenant la trace, on en déduit que

$$\widetilde{\text{tr} B} = [\text{tr} \tilde{B}]^H .$$

Evidemment, si  $\psi$  est minimale alors  $\pi \circ \psi$  est aussi minimale.

Pour la réciproque, on remarque que la courbure moyenne  $\tilde{H} \equiv \text{tr} \tilde{B}$  de  $\psi(M)$  est forcément horizontale selon la formule de la variation première de l'aire, parce que les variations verticales ne changent pas du tout le volume. (On pourrait aussi utiliser le fait que pour un champs horizontal  $\tilde{V}$ , la projection verticale de la dérivée covariante  $\tilde{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{V}$  est nulle, cf. [12].) ■

## II. LES ESPACES ISOTROPES OSCULATEURS ET LE RELÈVEMENT HOLOMORPHE.

Soit  $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^n$  une immersion minimale conforme, et  $z = x + iy$  une coordonnée locale holomorphe sur un ouvert  $U$  de  $S^2$ . Afin de simplifier les notations, supposons que  $\psi|_U$  est un plongement et identifions  $U$  avec l'image  $\psi(U)$ . Notons  $X$  et  $Y$  les champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$  tangents à  $U$  et considérons les champs

$$(5) \quad Z = X - iY \quad \text{et} \quad \bar{Z} = X + iY$$

de type (1,0) et (0,1) respectivement. L'observation suivante est importante pour tout ce qui suit.

PROPOSITION 6. - L'équation des surfaces minimales est équivalente à l'équation

$$(6) \quad \nabla_Z \bar{Z} = 0 = \nabla_{\bar{Z}} Z$$

où  $\nabla$  désigne la dérivée covariante ambiante

Démonstration. - Puisque  $[X, Y] = 0$ , on voit que  $\nabla_Z \bar{Z} = \nabla_Z Z + [Z, \bar{Z}] = \nabla_Z Z$  et donc les deux équations de (6) sont équivalentes. Le repère  $\{X, Y\}$  est un repère conforme, i.e.

$$(7) \quad |X|^2 = |Y|^2 \quad \text{et} \quad \langle X, Y \rangle = 0.$$

(puisque la coordonnée locale  $z = x + iy$  est holomorphe dans la structure conforme induite par l'immersion). Cela implique que

$$\nabla_X^T X + \nabla_Y^T Y = \nabla_X^T X + \nabla_{J_0 X}^T (J_0 X) = 0$$

où  $\nabla^T$  est la connexion de Levi-Civita de la surface  $S^2$  et où  $J_0$  désigne la rotation d'angle  $\pi/2$  dans les espaces tangents de  $S^2$ . Or avec cette équation on calcule que

$$\begin{aligned} \nabla_Z \bar{Z} &= \nabla_{X-iY} (X+iY) \\ &= \nabla_X X + \nabla_Y Y + i(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= (\nabla_X X + \nabla_Y Y)^T + (\nabla_X X + \nabla_Y Y)^N + i[X, Y] \\ &= \nabla_X^T X + \nabla_Y^T Y + B_{X,X} + B_{Y,Y} \\ &= |X|^2 H \end{aligned}$$

où  $H = \text{trace}(B)$  est la courbure moyenne de l'immersion. ■

Notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  l'extension bilinéaire complexe de la métrique riemannienne de  $\mathbb{C}P^n$  ( $\langle V, V \rangle$  est alors une forme quadratique complexe sur  $T\mathbb{C}P^n \otimes \mathbb{C}$ ). Désignons par  $J$  la structure presque-complexe de  $\mathbb{C}P^n$ . Or pour une immersion conforme et minimale, nous avons les trois équations fondamentales :

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{\nabla}_Z Z = 0 \\ \langle Z, Z \rangle = 0 \\ \langle JZ, Z \rangle = 0 \end{cases}$$

ainsi que leurs complexes conjuguées qu'on laissera toujours implicites.

La seconde équation est une conséquence directe de (7) parce que

$$\langle Z, Z \rangle = |X|^2 - |Y|^2 - 2i \langle X, Y \rangle .$$

La troisième équation n'est rien que la complexification de l'équation réelle

$$\langle JX, X \rangle = 0 . \text{ En dérivant ces équations par rapport à } Z , \text{ on trouve que}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \langle \nabla_Z Z, Z \rangle = 0 & \text{et} \\ \langle J \nabla_Z Z, Z \rangle = 0 - \langle JZ, \nabla_Z Z \rangle . \end{cases}$$

LEMME 10. - Nous avons  $\langle J \nabla_Z Z, Z \rangle = 0 .$

Démonstration. - Considérons la forme cubique

$$\psi \equiv \langle JZ , \nabla_Z Z \rangle dz^3$$

qui est une section locale du fibré  $K^3$ , la puissance troisième du fibré cotangent holomorphe  $K$  de  $S^2$ . On établira les deux assertions suivantes :

(i)  $\psi$  est une section globalement bien définie du fibré  $K^3$  ;

(ii)  $\psi$  est une section holomorphe.

Comme il n'y a pas de section holomorphe (non nulle) du fibré  $K^m$  pour  $m > 0$ , on aura donc établi que  $\psi \equiv 0$ .

Pour la partie (i), supposons que  $w = w(z)$  est un changement de coordonnées holomorphes locales sur  $S^2$ . Ecrivons  $w = u + iv$  et posons  $W \equiv \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v}$  ; Nous savons alors que  $Z = (\frac{dw}{dz}) W$  et donc nous trouvons que

$$\begin{aligned} \langle JZ, \nabla_Z Z \rangle &= \left(\frac{dw}{dz}\right)^3 \langle JW, \nabla_W W \rangle + \frac{dw}{dz} \frac{d^2 w}{dz^2} \langle JW, W \rangle \\ &= \left(\frac{dw}{dz}\right)^3 \langle JW, \nabla_W W \rangle \end{aligned}$$

qui est précisément la condition d'invariance cherchée.

Pour la partie (ii), on utilise (8) en calculant

$$(11) \quad \bar{Z} \langle JZ, \nabla_Z Z \rangle = \langle J \bar{\nabla}_Z Z, \nabla_Z Z \rangle + \langle JZ, \nabla_Z \bar{\nabla}_Z Z \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle JZ, R_{\bar{Z}, Z} Z \rangle + \langle JZ, \nabla_Z \nabla_{\bar{Z}} Z \rangle \\
 &= \langle JZ, R_{\bar{Z}, Z} Z \rangle
 \end{aligned}$$

où  $R$  est le tenseur de courbure de  $\mathbb{C}P^n$  qui s'écrit

$$(12) \quad R_{\bar{Z}, Z} W = - \{ \langle \bar{Z}, W \rangle Z - \langle Z, W \rangle \bar{Z} + \langle \bar{Z}, W \rangle JZ - \langle JZ, W \rangle \bar{Z} + 2 \langle \bar{Z}, Z \rangle JW \}$$

et où  $Z$  et  $W$  sont des vecteurs tangents complexes. Les équations ( 8 ) impliquent que

$$\langle R_{\bar{Z}, Z} Z, JZ \rangle = 0$$

et, en combinant avec (11), le fait que la forme  $\psi$  est holomorphe. ■

LEMME 12 .  $\langle \nabla_Z Z, \nabla_Z Z \rangle = 0 = \langle \nabla_Z \nabla_Z Z, \nabla_Z Z \rangle$  .

Démonstration.- La seconde équation est une conséquence directe de la première. Pour la première, on considère la forme quartique

$$\phi \equiv \langle \nabla_Z Z, \nabla_Z Z \rangle dz^4 .$$

Sous un changement de coordonnées holomorphes locales  $w = w(z)$ , comme nous avons fait précédemment, nous trouvons que

$$\langle \nabla_Z Z, \nabla_Z Z \rangle = \left( \frac{dw}{dz} \right)^4 \langle \nabla_W W, \nabla_W W \rangle$$

grâce aux équations ( 8 ) et ( 9 ).

La section  $\phi$  de  $K^4$  est donc bien définie globalement.

La démonstration sera achevée quand nous aurons établi que  $\phi$  est holomorphe. Nous calculons

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \bar{Z} \langle \nabla_Z Z, \nabla_Z Z \rangle &= \langle \nabla_{\bar{Z}} \nabla_Z Z, \nabla_Z Z \rangle \\
 &= \langle R_{\bar{Z}, Z} Z, \nabla_Z Z \rangle \\
 &= - \langle \{ \langle \bar{Z}, Z \rangle Z + \langle \bar{Z}, Z \rangle JZ + 2 \langle \bar{Z}, Z \rangle JZ \}, \nabla_Z Z \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

grâce aux équations ( 8 ), ( 9 ) et (11). ■

On continue de la même façon. On suppose par récurrence que pour un entier  $\nu$ ,

$$(I_{\nu}) \quad \begin{cases} \langle J\nabla_Z^k Z, \nabla_Z^i Z \rangle = 0 & \text{pour } 0 \leq k+i \leq 2\nu-2 \\ \langle \nabla_Z^k Z, \nabla_Z^i Z \rangle = 0 & \text{pour } 0 \leq k+i \leq 2\nu-1 \end{cases}$$

où

$$\nabla_Z^k \equiv \underbrace{\nabla_Z \nabla_Z \dots \nabla_Z}_{k \text{ fois}} .$$

On considère les formes

$$\begin{cases} \psi_{\nu} \equiv \langle J\nabla_Z^{\nu-1} Z, \nabla_Z^{\nu} Z \rangle dz^{2\nu-1} \\ \phi_{\nu} \equiv \langle \nabla_Z^{\nu} Z, \nabla_Z^{\nu} Z \rangle dz^{2\nu} \end{cases}$$

et on démontre comme nous l'avons montré auparavant, que  $\psi_{\nu}$  et  $\phi_{\nu}$  sont des sections de  $K^{2\nu-1}$  et  $K^{2\nu}$  respectivement) qui sont bien définies globalement et holomorphes.

On conclut donc que  $\psi_{\nu} = 0$  et  $\phi_{\nu} = 0$ . En considérant les dérivées de ces équations, on établit le système d'équations  $(I_{\nu+1})$ . On a donc vérifié la proposition suivante.

PROPOSITION 13 . - Pour tous les entiers  $k \geq 0$  et  $i \geq 0$ , on a

$$\langle J\nabla_Z^k Z, \nabla_Z^i Z \rangle = 0$$

et

$$\langle \nabla_Z^k Z, \nabla_Z^i Z \rangle = 0 .$$

REMARQUE 14 . - Tout ce que nous avons démontré jusqu'à présent reste vrai aussi pour les surfaces minimales ramifiées. Il n'y a rien à changer aux démonstrations. Au-dessus de la surface minimale  $S^2$  la Proposition 13 nous donne une famille de sous-espaces vectoriels complexes définis par

$$V = \text{span}_{\mathbb{C}} \{ \nabla_Z^k \bar{Z}, J\nabla_Z^i \bar{Z} \}_{k, i \geq 0} .$$

qui sont isotropes, c'est-à-dire tels que  $\langle V, V' \rangle = 0$  pour tout  $V, V' \in V$ . Evidemment  $V$  est une distribution J-invariante. De plus, la somme directe  $V \oplus V$  contient toutes les dérivées de l'application  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . Pour démontrer cela, il suffit de considérer les dérivées mixtes  $\nabla_Z \nabla_Z^k \bar{Z}$ . Puisque  $\nabla_Z \bar{Z} = 0$ , cette dérivée s'écrit comme  $\nabla_Z \nabla_Z^k \bar{Z} = \sum \nabla_Z^i \circ R_{Z, \bar{Z}} \circ \nabla_Z^{k-i-1} \bar{Z}$  qui est, d'après (12) et l'isotropie de  $V$ , un élément de  $V$ .

On suppose que l'image de l'application  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  n'est contenue dans aucun sous-espace linéaire projectif complexe propre de  $\mathbb{C}P^n$ . Puisque  $V \oplus V$  contient tous les "jets" de l'application, on peut démontrer facilement que  $V$  détermine une décomposition

$$(15) \quad \mathbb{C}P^n \otimes \mathbb{C} \Big|_{S^2} = \mathcal{V} \oplus \overline{\mathcal{V}}$$

qui est, grâce à l'isotropie de  $\mathcal{V}$ , une décomposition orthogonale pour la métrique hermitienne  $(V,W) \equiv \langle V, \overline{W} \rangle$ .

Rappelons-nous la décomposition classique

$$(16) \quad \mathbb{C}P^n \otimes \mathbb{C} \Big|_{S^2} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$$

où  $T^{1,0} = \{V : JV = iV\}$  et  $T^{0,1} = \overline{T^{1,0}}$ . Puisque  $JV = V$  et  $J\overline{V} = \overline{V}$ , ces deux décompositions sont compatibles.

Considérons les champs de vecteurs locaux

$$(17) \quad V_k \equiv (I-iJ)\sqrt{Z}^{k-1}\overline{Z} = \sqrt{Z}^{k-1}(I-iJ)\overline{Z}$$

pour  $k = 1, 2, 3, \dots$  et observons que

$$V_k \in \mathcal{V} \cap T^{1,0} \quad \text{pour tout } k.$$

De la même façon, définissons les champs de vecteurs

$$(18) \quad W_k \equiv (I-iJ)\sqrt{Z}^{k-1}Z = \sqrt{Z}^{k-1}(I-iJ)Z \quad \text{où}$$

$$W_k \in \overline{\mathcal{V}} \cap T^{1,0} \quad \text{pour tout } k.$$

Nous notons  $m$  et  $\overline{m}$  les entiers les plus petits tels que

$$V_1 \wedge \dots \wedge V_{m+1} \equiv 0 \quad \text{et} \quad W_1 \wedge \dots \wedge W_{\overline{m}+1} \equiv 0.$$

(On prend ici le produit extérieur complexe.) Une immersion minimale dans  $\mathbb{C}P^n$  est forcément analytique réelle. Alors les entiers  $m$  et  $\overline{m}$  sont toujours les mêmes pour tout choix de coordonnées locales sur  $S^2$ . De plus les produits extérieurs  $V_1 \wedge \dots \wedge V_m$  et  $W_1 \wedge \dots \wedge W_{\overline{m}}$  sont génériquement non-nuls. La compatibilité des deux décompositions (15) et (16) nous donne la décomposition orthogonale hermitienne

$$T^{1,0} \Big|_{S^2} = (\mathcal{V} \cap T^{1,0}) \oplus (\overline{\mathcal{V}} \cap T^{1,0}).$$

Génériquement  $\{V_1, \dots, V_m\}$  est une base de  $\mathcal{V} \cap T^{1,0}$  et  $\{W_1, \dots, W_{\overline{m}}\}$  une base de  $\overline{\mathcal{V}} \cap T^{1,0}$ . En particulier,  $n = m + \overline{m}$ .

Considérons maintenant la grassmannienne  $G_{m,n} \subset \mathbb{C}P^{\binom{n+1}{m+1}}$  des sous-espaces linéaires de dimension  $m$  dans  $\mathbb{C}P^n$  qui est définie par le plongement de Plücker



$$G_{m,n} \equiv \{[v_0 \wedge \dots \wedge v_m] \in P(\wedge^{m+1} \mathbb{C}^{n+1}) : v_0, \dots, v_m \in \mathbb{C}^{n+1} \text{ et } v_0 \wedge \dots \wedge v_m \neq 0\}$$

Utilisant l'identification canonique  $T_Z^{1,0} \simeq T_Z \mathbb{P}^n$ , on peut définir les applications

$$P : U \rightarrow G_{m,n} \quad \text{et} \quad Q : U \rightarrow G_{n-m,n}$$

par

$$P(Z) \equiv [V_Z \cap T^{1,0}] \quad \text{et} \quad Q(Z) \equiv [\bar{V}_Z \cap T^{1,0}]$$

où  $[V_Z \cap T^{1,0}]$  désigne le sous-espace linéaire projectif tangent au  $V_Z \cap T^{1,0}$ . Pour l'instant ces applications ne sont bien définies qu'aux points génériques où  $V_1 \wedge \dots \wedge V_m \neq 0$  et  $\bar{W}_1 \wedge \dots \wedge \bar{W}_{n-m} \neq 0$ .

PROPOSITION 19 . - L'application P est holomorphe et s'étend holomorphiquement en tout point de U. Sa cousine Q est antiholomorphe et s'étend antiholomorphiquement. Les deux applications P et Q restent invariantes après un changement de coordonnées holomorphes locales et elles sont donc bien définies globalement sur  $S^2$ .

Démonstration. On passe aux coordonnées homogènes. Soit  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  la projection canonique et prenons un relèvement local de l'application  $\psi : U \rightarrow S^2$ , i.e. une application  $\tilde{\psi} : U \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  telle que  $\pi \circ \tilde{\psi} = \psi$ . Soit  $\nabla$  la connexion canonique de l'espace euclidien  $\mathbb{C}^{n+1}$ . On voit directement que

$$\pi_* \nabla_{\bar{Z}} \tilde{\psi} = \bar{Z} \quad \text{et} \quad \pi_* \nabla_Z V_0 = Z,$$

et de plus que

$$(20) \quad \begin{cases} \pi_* \nabla_{\bar{Z}}^k \tilde{\psi} \equiv \nabla_{\bar{Z}}^{k-1} \bar{Z} \pmod{\nabla_{\bar{Z}}^{k-2} \bar{Z}, \dots, \bar{Z}} \\ \pi_* \nabla_Z^k \tilde{\psi} \equiv \nabla_Z^{k-1} Z \pmod{\nabla_Z^{k-2} Z, \dots, Z}. \end{cases}$$

Puisque  $\pi$  est holomorphe, l'application  $\pi_*$  est J-linéaire en tout point. On utilise ici la présentation  $\mathbb{C}^{n+1} \simeq (\mathbb{R}^{2n+2}, J)$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$  comme un espace vectoriel réel muni d'une structure quasi-complexe J. On passe à la complexification  $\mathbb{C}^{n+1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{R}^{2n+2} \otimes \mathbb{C}$  dans laquelle nous définissons les applications

$$\tilde{V}_k \equiv (I-iJ) \nabla_{\bar{Z}}^k \tilde{\psi} \quad \text{et} \quad \tilde{W}_k \equiv (I-iJ) \nabla_Z^k \tilde{\psi} \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

Les conditions (20) impliquent que

$$(21) \quad \begin{cases} \pi_* (\tilde{V}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{V}_k) = V_1 \wedge \dots \wedge V_k \\ \pi_* (\tilde{W}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{W}_k) = W_1 \wedge \dots \wedge W_k \end{cases}$$

pour tout  $p \geq 1$ . Il suit alors directement des définitions de  $m$  et  $\bar{m}$  que

$$(22) \quad \begin{cases} \nabla_Z (\tilde{V}_0 \wedge \dots \wedge \tilde{V}_n) = a \tilde{V}_0 \wedge \dots \wedge \tilde{V}_m \\ \nabla_Z (\tilde{W}_0 \wedge \dots \wedge \tilde{W}_{n-m}) = b \tilde{W}_0 \wedge \dots \wedge \tilde{W}_{n-m} \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions  $C^\infty$  définies dans l'ouvert  $U$ .

Les vecteurs  $\tilde{V}_i$  et  $\tilde{W}_j$  habitent toujours dans le sous-espace  $(I-iJ) (\mathbb{C}^{2n+2}) = (\mathbb{C}^{n+1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^{1,0} \simeq \mathbb{C}^{n+1}$  et on voit facilement que les applications  $P$  et  $Q$  sont données par

$$P = [\tilde{V}_0 \wedge \dots \wedge \tilde{V}_m] \quad \text{et} \quad Q = [\tilde{W}_0 \wedge \dots \wedge \tilde{W}_{n-m}] .$$

Les équations (22) impliquent immédiatement que  $P$  est holomorphe et  $Q$  anti-holomorphe. On démontre comme dans l'exposé VI que les zéros de  $\tilde{V}_0 \wedge \dots \wedge \tilde{V}_m$  sont isolés et que l'application  $[\tilde{V}_0 \wedge \dots \wedge \tilde{V}_m]$  s'étend holomorphiquement.

L'invariance de  $P$  et  $Q$  par changement de coordonnées locales est évidente. ■

Observons maintenant que l'application originale  $\psi$  peut être récupérée à partir de  $P$  et de  $Q$ . Si on considère  $P(Z)$  et  $Q(Z)$  comme sous-espaces linéaires de  $\mathbb{C}P^n$ , alors le point  $\psi(Z)$  est exactement l'intersection

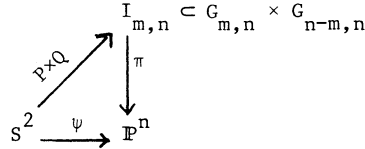
$$\psi(Z) = P(Z) \cap Q(Z) .$$

Puisque  $V_Z \perp \bar{V}_Z$ , cette intersection est orthogonale hermitienne. On est ainsi amené à considérer la variété

$$(23) \quad I_{m,n} \equiv \{(P,Q) \in G_{m,n} \times G_{n-m,n} : P \perp Q\}$$

sur laquelle l'application  $\pi : I_{m,n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$  définie par  $\pi(P,Q) \equiv P \cap Q$  est une submersion riemannienne ( $GL_{n+1}$ -équivariante).

**THÉOREME 24** . - Soit  $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  une immersion minimale ramifiée. Il existe alors un entier  $m \geq 0$  et un relèvement horizontal



dont le premier facteur est holomorphe et le second antiholomorphe pour la structure conforme induite par  $\psi$ .

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'application  $P \times Q : S^2 \rightarrow I_{m,n}$  est horizontale, i.e. orthogonale aux fibres de  $\pi : I_{m,n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . Or il est évident que  $I_{m,n}$  s'identifie à la variété  $\tilde{I}_{m,n} \equiv \{(p,P) \in \mathbb{C}P^n \times G_{m,n} : p \in P\}$  où la projection s'écrit  $\pi(p,P) = p$ . (A  $(P,Q) \in I_{m,n}$  on associe la paire  $(P \cap Q, P) \in I_{m,n}$ .) La fibre au-dessus de  $p \in \mathbb{C}P^n$  consiste en tous les plans  $P \in G_{m,n}$  qui contiennent le point  $p$ .

En l'élément  $\xi = (p,P)$  de  $I_{m,n}$  l'espace tangent  $T_{\xi} \tilde{I}_{m,n} \subset T_p \mathbb{C}P^n \times T_P G_{m,n}$  s'exprime de la façon suivante : pour un sous-espace projectif  $P \subset \mathbb{C}P^n$  de dimension  $k$ , on notera  $\hat{P} \subset \mathbb{C}P^{n+1}$  le sous-espace linéaire de dimension  $k + 1$  associé. On a alors l'identification canonique

$$(25) \quad T_p \mathbb{C}P^n \times T_P G_{m,n} \cong \text{Hom}(\hat{p}, \hat{p}^\perp) \oplus \text{Hom}(\hat{P}, \hat{P}^\perp)$$

Par rapport à cette identification, le sous-espace  $T_{\xi} \tilde{I}_{m,n}$  se décompose orthogonalement en

$$T_{(p,P)} \tilde{I}_{m,n} = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$$

où

$$\begin{aligned}
 A_1 &\equiv \{(S,0) : \text{Im } S \subset \hat{p}\}, \\
 A_2 &\equiv \{(S,T) : \text{Im } S \subset \hat{P}^\perp \text{ et } T|_P = S\}, \\
 A_3 &\equiv \{(0,T) : T|_P = 0\}.
 \end{aligned}$$

Le sous-espace  $A_1 \oplus A_2$  est la partie horizontale et  $A_3$  la partie verticale pour la submersion  $\pi$ .

Or en coordonnées homogènes notre relèvement  $\psi : S^2 \rightarrow I_{m,n}$  s'écrit

$$\psi = ([\tilde{\psi}], [\tilde{\psi} \wedge \nabla_{\tilde{Z}} \tilde{\psi} \wedge \dots \wedge \nabla_{\tilde{Z}}^m \tilde{\psi}]) = ([\tilde{V}_0], [\tilde{V}_0 \wedge \tilde{V}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{V}_m])$$

où on a pris la notation utilisée auparavant. A partir de là, on vérifie facilement que

$$\nabla_{\bar{Z}} \Psi = \Psi_*(Z) \in A_1 \quad \text{et} \quad \nabla_Z \Psi = \Psi_*(Z) \in A_2 \quad .$$

Le relèvement est donc horizontal. ■

Comme nous l'avons déjà vu, la variété  $I_{m,n}$  peut se représenter de plusieurs façons différentes. La présentation la plus agréable et la plus jolie est celle d'une variété de drapeaux. Pour  $0 \leq m \leq n$ , introduisons la variété

$$(26) \quad F_{m,n} \equiv \{(Q,P) \in G_{m-1,n} \times G_{m,n} : Q \subset P\}$$

où par convention  $F_{0,n} \equiv \mathbb{C}P^n$ . Rappelons-nous qu'il existe une isométrie antiholomorphe canonique

$$(\cdot)^* : G_{n-k} \xrightarrow{\approx} G_{k-1,n}$$

qui associe à un sous-espace projectif  $Q$  le sous-espace polaire  $Q^*$ . En termes de coordonnées homogènes on prend le sous-espace linéaire orthogonal, i.e.  $\hat{Q}^* = \hat{Q}^\perp$ . Utilisant cette isométrie antiholomorphe, nous définissons un isomorphisme de submersions riemanniennes

$$\begin{array}{ccc} I_{m,n} & \xrightarrow{\Xi} & F_{m,n} \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi \\ & \mathbb{C}P^n & \end{array}$$

La flèche horizontale est définie par

$$\Phi(P,Q) = (Q^*, P) \quad ,$$

et la projection  $\pi \circ (\Xi)^{-1}$  associe à la paire  $(Q,P)$  le point polaire de  $Q$  dans  $P$  (en coordonnées homogènes,  $\pi(Q,P) = \hat{P} \cap \hat{Q}^\perp$ .)

Nous pouvons réécrire le résultat principal maintenant.

THÉORÈME 27 . - Soit  $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  une immersion minimale ramifiée. Alors il existe un entier  $m \geq 0$  et un relèvement horizontal holomorphe

$$\begin{array}{ccc} & & F_{m,n} \\ & \nearrow \psi & \downarrow \pi \\ S^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}P^n \end{array}$$

où  $F_{m,n}$  est la variété de drapeaux définie auparavant.

REMARQUE 28 . - Si  $\psi$  est elle-même holomorphe, alors  $m = 0$  et  $F_{0,n} = \mathbb{C}P^n$  et  $\pi = \text{Id}$ .  
Si  $\psi$  est antiholomorphe, alors  $m = n$  et  $F_{n,n} = \mathbb{C}P^n$  et  $\pi = (\cdot)^*$ .

REMARQUE 29 .- Si  $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^n = S^n/Z_2$  est une immersion minimale dans l'espace projectif réel muni de la métrique à courbure sectionnelle constante, on peut considérer le plongement

$$\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$$

qui est isométrique et totalement géodésique. La composition  $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  est toujours minimale et la théorie présentée ici s'applique. Si l'on reprend le raisonnement précédent dans ce cas spécial on trouve facilement qu'il faut que  $n$  soit pair et que

$$m = \frac{n}{2} .$$

De plus, on voit que l'image du relèvement  $\Psi$  est contenue dans la sous-variété  $I_m^\circ \subset F_{m,2m}$  qui consiste en tous les sous-espaces de dimension  $m$  dans  $\mathbb{C}P^{2m}$  qui sont isotropes (pour la structure réelle de  $\mathbb{R}P^n$  donnée). Observez qu'à un sous-espace isotrope  $W \subset \mathbb{C}^{2m+1} = \mathbb{R}^{2m+1} \otimes \mathbb{C}$  de dimension  $m+1$ , on associe canoniquement le sous-espace conjugué  $\bar{W}$ . La paire  $((\bar{W})^\perp \cap W, W)$  nous donne le plongement  $I_m^\circ \hookrightarrow F_{m,2m}$ .  
On retrouve ainsi complètement la théorie classique de Calabi [ 2 ], [ 3 ]. (Voir [ 7 ] .)

### III. LA CLASSIFICATION.

Des résultats établis dans le II on peut tirer une classification très belle et très simple de toutes les immersions minimales (ou harmoniques) de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}P^n$ . Elles sont toutes construites à partir des courbes holomorphes rationnelles de la façon suivante.

Soient  $\Sigma$  une surface de Riemann et  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}P^n$  une application holomorphe pleine (c'est-à-dire dont l'image  $\phi(\Sigma)$  n'est contenue dans aucun sous-espace linéaire propre). Pour chaque entier  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$  nous avons la courbe holomorphe associée

$$(30) \quad \phi_m : \Sigma \rightarrow G_{m,n} \subset \mathbb{P}(\wedge^{m+1} \mathbb{C}^{n+1})$$

définie de la façon suivante :

Si  $\varphi(Z) = (\varphi_0(Z), \varphi_1(Z), \dots, \varphi_n(Z))$  (où  $Z \in U \subset \Sigma$ ) est une représentation holomorphe locale de  $\phi$  en coordonnées homogènes de  $\mathbb{C}P^n$ , alors l'application  $\phi_m$  est donnée par

$$(31) \quad \phi_m(Z) \equiv [\varphi(Z) \wedge \varphi'(Z) \wedge \dots \wedge \varphi^{(m)}(Z)]$$

pour  $Z \in U$ . Cette définition est indépendante du choix de la représentation locale  $\varphi(Z)$ . En un point (nécessairement isolé)  $Z_0$  où  $\varphi(Z) \wedge \dots \wedge \varphi^{(m)}(Z)$  s'annule, on peut multiplier localement par le facteur  $(Z-Z_0)^k$  tel que  $(Z-Z_0)\varphi(Z) \wedge \dots \wedge \varphi^{(m)}(Z)$  soit fini et non-nul au point  $Z_0$ . Ce facteur ne change pas la classe projective du vecteur  $[\varphi(Z) \wedge \dots \wedge \varphi^{(m)}(Z)]$  et évidemment nous donne une extension holomorphe de notre application au point  $Z_0$ . Les applications  $\phi_m$  sont donc bien définies et holomorphes sur  $\Sigma$  pour  $0 \leq m \leq n$ .

Il est évident que  $\phi_0 = \phi$ . Plus généralement, pour chaque  $m \geq 0$ , l'image  $\phi_m(Z) \in G_{m,n}$  représente le  $m$ -plan osculateur à la courbe  $\phi$  au point  $Z \in \Sigma$ . Pour cette raison, l'application  $\phi_m$  est quelquefois appelée la  $m^{\text{ème}}$  courbe osculatrice à  $\phi$ .

Supposons que  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}P^n$  soit une courbe holomorphe et pleine. A cette courbe nous pouvons associer les applications holomorphes

$$(32) \quad \hat{\phi}_m : \Sigma \rightarrow F_{m,n} \quad 0 \leq m \leq n$$

où par définition

$$(33) \quad \hat{\phi}_m(Z) = (\phi_{m-1}(Z), \phi_m(Z)).$$

(Dans le cas spécial où  $m = 0$ , nous prenons  $\hat{\phi}_0 = \phi$ .)

THÉORÈME 34 . - Pour chaque entier  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$ , l'application  $\hat{\phi}_m : \Sigma \rightarrow F_{m,n}$  est horizontale pour la submersion riemannienne  $\pi : F_{m,n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . Par contre, si  $\psi : \Sigma \rightarrow F_{m,n}$  est une application holomorphe et horizontale, il existe alors une application holomorphe  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}P^n$  telle que  $\psi = \hat{\phi}_m$ .

Démonstration. - D'abord il faut identifier les sous-espaces horizontaux de  $TF_{m,n}$ . On utilise le plongement  $F_{m,n} \subset G_{m-1,n} \times G_{m,n}$  donné par (26) et l'identification

$$(35) \quad T_Q G_{m-1,n} \times T_P G_{m,n} \cong \text{Hom}(\hat{Q}, \hat{Q}^\perp) \oplus \text{Hom}(\hat{P}, \hat{P}^\perp)$$

(en suivant les notations de II.) Avec cette identification on peut écrire

$$T_{(Q,P)} F_{m,n} = \{(S, T) : T|_{\hat{Q}} = \hat{P}^\perp \circ S\}$$

où on désigne par  $\hat{P}^\perp$  aussi la projection orthogonale sur  $\hat{P}^\perp$ . Le sous-espace vertical  $V$  pour la projection  $\pi(Q, P) = \hat{P} \cap (\hat{Q})^\perp$  s'écrit de la façon suivante. Soit  $\mathcal{L} \equiv \hat{Q}^\perp \cap P = \pi(Q, P)$ .

$$V = \{(S, T) : T|_{\ell} = 0 \text{ et } T|_{\hat{Q}} = S\} .$$

Le sous-espace horizontal  $H$  s'écrit alors

$$(36) \quad \begin{aligned} H &= \{(S, T) : T|_{\hat{Q}} = 0 \text{ et } \text{Im } S \subset \hat{P}\} \\ &\cong \text{Hom}(\hat{Q}, \ell) \oplus \text{Hom}(\ell, \hat{P}^{\perp}) . \end{aligned}$$

On voit facilement que la dérivée de l'application

$$\phi_m = ([\varphi \wedge \varphi' \wedge \dots \wedge \varphi^{(m-1)}] , [\varphi \wedge \varphi' \wedge \dots \wedge \varphi^{(m)}])$$

est toujours du type (36), donc est horizontale.

Pour la réciproque, supposons que  $\psi(Z) = \{(Q(Z), P(Z)), |Z| < 1\}$ , est une courbe holomorphe et horizontale dans  $F_{m,n}$ . On peut représenter la partie  $Q(Z)$  holomorphiquement par

$$(37) \quad Q(Z) = [V_0(Z) \wedge \dots \wedge V_{m-1}(Z)]$$

où  $V_j(Z)$  est une fonction holomorphe à valeur dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  définie dans un voisinage de 0 pour  $j = 0, \dots, m$ .

Supposons que nous sommes hors de l'ensemble des points isolés où  $Q' = 0$ . Après une permutation convenable des indices  $\{0, \dots, m-1\}$ , nous pouvons supposer que

$$V'_{m-1}(0) \neq 0 \pmod{V_0(0), \dots, V_m(0)} .$$

Ceci persiste dans un voisinage  $U$  de 0. L'hypothèse d'horizontalité et l'identification (36) nous disent alors que dans ce voisinage  $U$  nous avons

$$(38) \quad P(Z) = [V_0(Z) \wedge \dots \wedge V_{m-1}(Z) \wedge V'_{m-1}(Z)]$$

et, de plus, qu'il y a des fonctions holomorphes  $a_j(Z)$  telles que

$$V'_j(Z) \equiv A_j(Z) V'_{m-1}(Z) \pmod{V_0(Z), \dots, V_{m-1}(Z)}$$

$j = 0, \dots, m-2$ . En remplaçant  $V_j(Z)$  par  $V_j(Z) - A_j(Z) V'_{m-1}(Z)$  pour  $j = 0, \dots, m-2$ , nous obtenons une nouvelle base telle que

$$V'_j(Z) \equiv 0 \pmod{V_0(Z), \dots, V_{m-1}(Z)}$$

pour  $j = 0, \dots, m-2$ . Le sous-espace

$$R(Z) \equiv [V_0(Z) \wedge \dots \wedge V_{m-2}(Z)]$$

représente le noyau de la dérivée  $Q'(Z)$  considérée comme application linéaire  $\hat{Q}(Z) \rightarrow \hat{Q}(Z)^\perp$ . (Rappelons que le rang de  $Q'(Z)$  est 1.) La définition de  $R(Z)$  ne dépend donc que de l'application  $Q$ . Par ailleurs  $R$  est évidemment holomorphe. La paire  $(R, Q)$  nous fournit une application

$$(R, Q) : U \rightarrow F_{m-1, n}$$

qui est holomorphe et horizontale. On voit sans difficulté que cette application s'étend holomorphiquement aux points isolés où  $Q' = 0$ .

Si on répète la construction  $(m-1)$ - fois, on obtient à la dernière étape une application holomorphe

$$\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}P^n .$$

L'équation (38) que nous avons à chaque étape implique que les composantes de notre application originale  $\psi = (Q, P)$  sont de la forme

$$\begin{cases} Q(Z) = [\varphi(Z) \wedge \varphi'(Z) \wedge \dots \wedge \varphi^{(m-1)}(Z)] \\ P(Z) = [\varphi(Z) \wedge \varphi'(Z) \wedge \dots \wedge \varphi^{(m)}(Z)] \end{cases}$$

où  $\varphi(Z)$  désigne une représentation locale de  $\phi$  en coordonnées homogènes de  $\mathbb{C}P^n$  nous avons donc construit une courbe holomorphe  $\phi$  telle que  $\psi = \hat{\phi}_m$ . ■

Tout cela nous fournit une belle représentation de toutes les immersions minimales ramifiées de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}P^n$  (ou, ce qui est la même chose, de toutes les applications harmoniques non-constantes de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}P^n$ ). Pour que ce soit tout à fait clair, considérons la variété

$$\mathbb{F}_n \equiv \{(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}) \in G_{0, n} \times G_{1, n} \times \dots \times G_{n-1, n} : P_{j-1} \subset P_j \ \forall_j\}$$

formée des drapeaux maximaux de  $\mathbb{C}P^n$  qui, comme espace homogène s'écrit,

$$\mathbb{F}_n = U_{n+1} / \underbrace{U_1 \times \dots \times U_1}_{(n+1)\text{-fois}} .$$

Nous avons déjà démontré que chaque courbe holomorphe pleine  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}P^n$  détermine une application holomorphe associée  $\hat{\phi} : \Sigma \rightarrow \mathbb{F}_n$  définie par

$$\hat{\phi}(Z) = (\phi_0(Z), \phi_1(Z), \dots, \phi_{n-1}(Z))$$

où  $\phi_m(Z)$  est le  $m^{\text{ème}}$  courbe osculatrice. On appelle  $\hat{\phi}(Z)$  le drapeau de Frenet associé à la courbe  $\phi$  au point  $Z$ .



Observons qu'il y a une submersion holomorphe  $\pi_0 : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{C}P^n$  définie par  $\pi_0(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}) \equiv P_0$ . Evidemment  $\hat{\phi}$  est un relèvement de  $\phi$ .

En utilisant la métrique hermitienne de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , on peut réécrire de façon unique chaque drapeau  $(P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$  comme une décomposition orthogonale de  $\mathbb{C}^{n+1}$  en droites complexes soit

$$\mathbb{C}^{n+1} = \ell_0 \oplus \ell_1 \oplus \dots \oplus \ell_n$$

où

$$\ell_j = \hat{P}_j \cap (\hat{P}_{j-1})^\perp, \quad j \geq 0.$$

Dans cet esprit on réécrit la courbe de Frenet  $\hat{\phi}$  d'une courbe holomorphe  $\phi$  comme

$$\hat{\phi}(Z) \cong \ell_0(Z) \oplus \ell_1(Z) \oplus \dots \oplus \ell_n(Z).$$

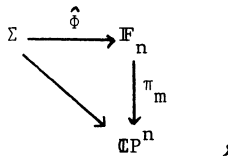
La droite  $\ell_m(Z)$  s'appelle la m<sup>ème</sup> droite normale à  $\phi$ . Evidemment il y a une famille de submersions

$$\pi_m : \mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{C}P^n, \quad 0 \leq m \leq n,$$

où par définition

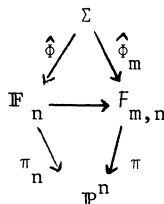
$$\pi_m(\ell_0 \oplus \dots \oplus \ell_n) \equiv \ell_m.$$

Comme submersions riemanniennes elles sont complètement équivalentes. On applique les isométries données par permutation des facteurs  $\ell_0 \oplus \dots \oplus \ell_n$ . Un fait intéressant est que ces isométries ne sont pas holomorphes en général. Nous pouvons néanmoins considérer les compositions



$0 \leq m \leq n$ , qui au point  $Z$  associent la m<sup>ème</sup> droite normale à la courbe en ce point. Cette composition s'étend à  $F_{m,n}$

( 39 )



et nous savons que  $\pi \circ \hat{\phi}_m = \pi_m \circ \hat{\phi}$  est minimale.

La chose encore plus importante est que les Théorèmes 27 et 34 impliquent directement la réciproque, à savoir : Soit  $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  une immersion minimale pleine. Il existe alors une application holomorphe  $\phi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  et un entier  $m, 0 \leq m \leq n$ , tels que

$$\psi = \pi \circ \hat{\phi}_m = \pi_m \circ \hat{\phi} .$$

Autrement dit, nous avons démontré le résultat suivant.

THÉORÈME DE CLASSIFICATION 40. Toute application harmonique pleine de  $S^2$  dans  $\mathbb{C}P^n$  peut s'écrire (pour un entier  $m, 0 \leq m \leq n$ ) comme la courbe des  $m^{\text{ème}}$  droites normales à une courbe holomorphe rationnelle dans  $\mathbb{C}P^n$ .

Plus précisément, supposons que  $\psi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  est harmonique et pleine. Il existe alors une application holomorphe  $\phi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}P^n$  et un entier  $m, 0 \leq m \leq n$ , tels que

$$\psi(Z) = \ell_m(Z)$$

où  $\ell_m(Z) = \hat{\phi}_m(Z) \cap (\hat{\phi}_{m-1}(Z))^\perp = \pi_m \circ \hat{\phi}(Z)$  est le  $m^{\text{ème}}$  droite normale à la courbe  $\phi$  au point  $Z$ .

De beaux exemples sont fournis par les courbes rationnelles normales de courbure constante. Les applications de  $\mathbb{C}P^1$  dans  $\mathbb{C}P^n$  s'expriment en coordonnées homogènes de la façon suivante

$$(41) [Z_0, Z_1] \longmapsto [Z_0^n, \sqrt{n} Z_0^{n-1} Z_1, \dots, \sqrt{\binom{n}{k}} Z_0^{n-k} Z_1^k, \dots, Z_1^n] .$$

J. Eells et J.C. Wood ont observé que la courbe de drapeaux de Frenet d'une courbe holomorphe fournit des applications harmoniques dans toutes les variétés grassmanniennes complexes par composition

$$\Sigma \xrightarrow{\hat{\phi}} \mathbb{F}_n \xrightarrow{\pi} G_{m,n} .$$

Il y a plusieurs submersions  $\pi : \mathbb{F}_n \rightarrow G_{m,n}$  qu'on peut mettre ici. On peut sélectionner n'importe quel sous-ensemble  $\{i_0, \dots, i_m\}$  de  $\{0, 1, \dots, n\}$  et définir

$$\pi(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n) \equiv \ell_{i_0} \oplus \dots \oplus \ell_{i_m} .$$

En général, cette construction ne fournit pas la famille de toutes les applications

harmoniques de  $S^2$  dans  $G_{m,n}$ . Récemment on a, néanmoins, fait beaucoup de progrès sur le problème de la classification de ces applications harmoniques (pour cela, on se reportera à la littérature).

Une démonstration assez différente de cette classification a été trouvée par Chern et Wolfson [5]. Par leurs méthodes on peut réaliser certaines généralisations de la construction aux surfaces de genre non nul [13].

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] D. BURNS, Harmonic maps from  $\mathbb{C}P^1$  to  $\mathbb{C}P^n$ , in Harmonic maps Symposium, New-Orleans (1980), Lect. Notes in Math 949 Springer (1982), 48-55.
- [2] E. CALABI, Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima, in Topics in complex manifolds (Ed. H. Rossi), Les presses de l'Université de Montréal (1967), 59-81.
- [3] E. CALABI, Minimal immersions of surfaces in euclidean spheres, J. Differential Geom. 1 (1967), 111-125.
- [4] S.S. CHERN, S.I. GOLDBERG, On the volume decreasing property of a classe of real harmonic mappings, Amer. J. Math. 97 (1975), 133-147.
- [5] S.S. CHERN, J. WOLFSON, Minimal surface by moving frames, Amer. J. Math. 105 (1983), 59-83.
- [6] A.M. DIN, W.J. ZAKREWSKI, General classical solutions in the  $\mathbb{C}P^{n-1}$  model, Nucl. Phy. B 174 (1980) 397-406.
- [7] A.M. DIN, W.J. ZAKREWSKI, Properties of the general classical  $\mathbb{C}P^{n-1}$  model, Phys. Letters 95 B (1980) 419-422.
- [8] V. GLASER, R. STORA, Regular solutions of the  $\mathbb{C}P^n$  models and further generalization, CERN preprint. 1980.
- [9] J. EELLS, J.C. WOOD, The existence and construction of certain harmonic maps, Symp. Math. Ist. Naz. Alta Mat. Roma 26 (1982), 123-138.

*2-SPHÈRES MINIMALES DANS LE PROJECTIF COMPLEXE*

- [10] J. EELLS, J.C. WOOD Harmonic maps from surfaces to complex projective spaces, *Adv. Math* 49 (1983), 217-263.
- [11] H.B. LAWSON Jr., Surfaces minimales et la construction de Calabi-Penrose, in *Séminaire Bourbaki n°624*, 1983/84, Astérisque 121-122, Soc. Math. France, 1985, pp.197-212.
- [12] B. ONEILL, The fundamental equations of a submersion, *Mich. Math. J.* 13 (1966), 459-469.
- [13] J. WOLFSON On minimal surfaces in a Kähler manifold of constant holomorphic sectional curvature, *Trans. A.M.S.* 290 (1985), 627-646.

H.B. LAWSON Jr.  
Department of Mathematics  
S.U.N.Y.  
STONY BROOK N. Y. 11794  
(U.S.A.)