Astérisque

Y. HELLEGOUARCH

R. PAYSANT-LE ROUX

Invariants arithmétiques des corps possédant une formule du produit; applications

Astérisque, tome 147-148 (1987), p. 291-300

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1987__147-148__291_0>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 147-148 (1987), p.291-300.

INVARIANTS ARITHMÉTIQUES DES CORPS POSSÉDANT UNE FORMULE DU PRODUIT ; APPLICATIONS

Y. HELLEGOUARCH, R. PAYSANT-LE ROUX

Sommaire :

On se propose de généraliser différentes notions de meilleures approximations (celle qui est liée à l'algorithme des fractions continues, celle d'E. Dubois, etc...) et de donner une forme plus générale au théorème de Lagrange.

Typiquement, on sera amené à faire correspondre à tout corps de nombres algébriques K deux graphes finis $\overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{C}}$ étant un sous-graphe de $\overline{\mathcal{E}}$.

Deux applications seront mentionnées : le rapport avec les "familles d'unités" et la détermination de courbes dont la jacobienne possède de la torsion.

I. NOTIONS THÉORIQUES

1) INTRODUCTION

Rappelons que si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre quadratique dont le développement en fraction continue, est périodique de période π :

$$\alpha = [\overline{a_o,\ldots,a_{\pi-1}}]$$

il lui correspond un π-uple de nombres quadratiques $\alpha_o = \alpha, \alpha_1,\ldots,\alpha_{\pi-1}$ définis par :

$$\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$$

En désignant par $<1,\alpha_i>$ le $\mathbf{Z}$-module engendré par 1 et α_i, on a :

$$<1,\alpha_{i+1}> = \alpha_{i+1}<1,\alpha_i>$$

ce qui entraîne que $\alpha_1\ldots\alpha_\pi$ est une unité de l'ordre $\mathcal{O}$ des stabilisateurs de $<1,\alpha_o>$.

D'autre part, si $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ est la suite des convergentes de α et si l'on pose $x_n := p_n - q_n\alpha$, on trouve que :

$$\alpha_{n+2} = -\frac{x_n}{x_{n+1}}$$

et, compte-tenu de ce qui précède, on voit que $x_{n+\pi}/x_n$ est une unité de $\mathcal{O}$.

Ce que l'on cherche à définir, est l'analogue des nombres x_n. On verra qu'à partir d'un corps de nombres K (analogue à $\mathbb{Q}(\alpha)$) et d'un ordre $\mathcal{O}$ de K, on peut définir canoniquement des nombres qui jouent le rôle des x_n.

2) GROUPE OPERANT SUR UN GRAPHE, GRAPHE QUOTIENT

Soit un graphe simple $\Gamma = (X,Y)$, non nécessairement fini, où Y est une partie de X^2, on dira qu'un groupe G opère sur Γ ssi :

i) G opère sur X par $(g,x) \longrightarrow g(x)$

ii) pour tout $g \in G$, et pour tout $(x,y) \in Y$, on a : $(g(x),g(y)) \in Y$

Soit $\overline{X}$ l'ensemble quotient $X/_G$, alors on peut définir une partie $\overline{Y}$ de $\overline{X}^2$ par la relation :

$$(\bar{x},\bar{y}) \in \overline{Y} \Longleftrightarrow \exists x \in \bar{x},\ \exists y \in \bar{y} \text{ tels que } (x,y) \in Y$$

Il est clair que $(\overline{X},\overline{Y})$ est un graphe simple et que ce graphe est connexe si (X,Y) est connexe.

<u>Définition</u>.- On dira que $\overline{\Gamma} := (\overline{X},\overline{Y})$ est le graphe quotient de Γ par G.

3) COMMAS, POINTS EXTRÉMAUX

Dans toute la suite, K désigne un corps admettant une formule du produit pour une famille V de valeurs absolues normalisées :

$$\forall x \in K^*, \quad \prod_{h \in V} |x|_h = 1$$

Rappelons que $\mathcal{E} = \{x \in K \ ; \ |x|_h = 1, \ \forall h \in V\}$ est soit le groupe des racines de l'unité de K, soit le groupe multiplicatif k^* des constantes non nulles de K.

Définition 2.- On dira que K est un "corps arithmétique" dans les deux cas suivants :

i) K est un corps de nombres algébriques

ii) K est un corps de fonctions algébriques à une variable dans lequel on se donne un anneau intégralement fermé A dont K est le corps des quotients et qui est tel que $k \subsetneqq A \subsetneqq K$.

Remarque.- Cette définition permet de parler des entiers de K.

Définition 3.- On dira qu'un sous-anneau unitaire $\mathcal{O} \subset K$ est un ordre de K si et seulement si :

i) $k \subset \mathcal{O} \subset A$

ii) le corps des quotients de $\mathcal{O}$ est K.

On désignera par S la partie de V formée de toutes les valeurs absolues $|\,|_i$ telles que :

$$\begin{cases} |\,|_i \text{ est archimédienne si } K \text{ est un corps de nombres} \\ |\,|_i \text{ n'est pas bornée sur } A \text{ si } K \text{ est un corps de fonctions algébriques} \end{cases}$$

Définition 4.- Soit $x \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, on dira que [1]

$$x \text{ est } \begin{cases} \text{un comma} \\ \text{un point extrémal} \\ \text{une face (ou une arête)} \end{cases} \text{ de } \mathcal{O} \text{ ssi}$$

$$\{y \in \mathcal{O} \setminus \{0\} \text{ et } |y|_i \leqslant |x|_i \ \ \forall i \in S\} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda x,\ \lambda \in \mathcal{T} \\ \forall i \in S,\ |y|_i = |x|_i \\ \exists i \in S,\ |y|_i = |x|_i \end{cases}$$

Théorème 1.- Si $\mathcal{U}$ est le groupe des unités de $\mathcal{O}$ on a :

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$$

où $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{E}, \mathcal{F}$) désigne l'ensemble des commas (resp. points extrémaux, faces) de $\mathcal{O}$.

Remarques

1) Si K est un corps de nombres on a $\mathcal{E} = \mathcal{F}'$, mais ceci n'est plus vrai si K est un corps de fonctions algébriques.

2) Si K contient une valeur absolue réelle ou de degré 1, alors $\mathcal{C} = \mathcal{E}$.

4) GRAPHES

Soient x et y $\in \mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{E}, \mathcal{F}'$) on dit que x et y sont "voisins" ssi [2] :

$$\{z \in \mathcal{O} \setminus \{0\} \ ; \forall i \in S, \ |z|_i < \sup\{|x|_i, |y|_i\}\} = \emptyset$$

et Y désignera (indistinctement) les couples de points voisins de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{E}, \mathcal{F}'$).

Alors $(\mathcal{C}, Y)$, $(\mathcal{E}, Y)$ et $(\mathcal{F}', Y)$ sont des graphes tels que :

$$(\mathcal{C}, Y) \subset (\mathcal{E}, Y) \subset (\mathcal{F}', Y)$$

Proposition 1.- $\mathcal{U}$ opère sur $(\mathcal{C}, Y)$, $(\mathcal{E}, Y)$ et $(\mathcal{F}', Y)$.

Définition 3.- Les graphes $(\overline{\mathcal{C}}, \overline{Y})$, $(\overline{\mathcal{E}}, \overline{Y})$, $(\overline{\mathcal{F}'}, \overline{Y})$ seront appelés les graphes des classes de commas, points extrémaux et faces de $\mathcal{O}$.

Théorème 2 (Théorème de Lagrange).- Lorsque K est un corps global (nombres algébriques, ou fonctions sur un corps de constantes k fini) ces trois graphes sont finis et connexes.
(La démonstration utilise le théorème 3).

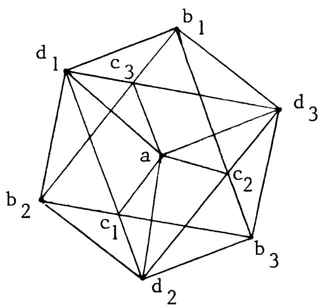
Exemples :

1) Si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d > 1$ sans facteurs carrés, $\mathcal{O}$ = anneaux des stabilisateurs de $<1, \sqrt{d}>$ et π = période du développement de $\sqrt{d}$ en fraction continue. Alors $\mathcal{C} = \mathcal{E} = \mathcal{F}'$ et $\overline{\Gamma} = (\overline{\mathcal{C}}, \overline{Y})$ est une chaîne de longueur π avec des boucles en chaque point.

2) On pose $\Delta = \sqrt[3]{X^3 - 6X + 6} \in \mathbb{Q}((\frac{1}{X}))$ et

$$\begin{cases} K = \mathbb{Q}(j, X, \Delta) \\ \mathcal{O} = A = \mathbb{Q}(j)[X, \Delta] \end{cases}$$

où j désigne une racine primitive cubique de l'unité dans $\mathbb{C}$, alors $\mathcal{C} = \mathcal{E} = \mathcal{F}'$ et $\overline{\Gamma}$ est :



(Les boucles en chaque point n'ont pas été représentées)

Point	Fonction de A	Partie à l'infini du diviseur
a	1	(0,0,0)
b_1	$X - \Delta$	(1,-1,-1)
b_2	$X - j^2\Delta$	(-1,1,-1)
b_3	$X - j\Delta$	(-1,-1,1)
c_3	$jX^2+2(1-j)+j^2X\Delta+\Delta^2$	(1,0,-2)
d_3	$j^2X^2+2(1-j^2)+jX\Delta+\Delta^2$	(1,-2,0)
c_1	$jX^2+2(1-j)+jX\Delta+j\Delta^2$	(-2,1,0)
d_1	$j^2X^2+2(1-j^2)+X\Delta+j\Delta^2$	(0,1,-2)
c_2	$jX^2+2(1-j)+X\Delta+j^2\Delta^2$	(0,-2,1)
d_2	$j^2X^2+2(1-j)+j^2X\Delta+j^2\Delta^2$	(-2,0,1)

II. APPLICATIONS

1) ALGORITHME

On prend pour corps K une extension finie de k(X) dans laquelle k est algébriquement fermé et pour A la fermeture intégrale de k[X] dans K. S sera l'ensemble des valeurs absolues $|\ |$ telles que $|X| > 1$ et on posera $s = \mathrm{Card}(S)$.

On va montrer que si $s \geqslant 2$, on peut construire des suites (x_n) de points extrémaux telles que $x_o = 1$. Ces suites se propagent dans une certaine "direction" (vocabulaire d'E. Dubois) sur une "branche" du graphe $(\mathcal{G},Y)$.

Pour fixer les idées, nous choisissons une injection $\{1,2,\dots,s\} \longrightarrow S$ et nous construisons, par récurrence, une suite appartenant à la direction d'indice 1.

Supposons $x_o,\dots,x_n$ construits, on pose:

$$D_{n+1} = \{x \in A \smallsetminus \{0\}\ ;\ |x|_i < |x_n|_i, \forall i \neq 1\}$$

On sait que $D_{n+1} \neq \emptyset$.

Posons :
$$\gamma_1 := \inf\{|x|_1\ ;\ x \in D_{n+1}\}$$
$$E_1 = \{x \in D_{n+1},\ |x|_1 = \gamma_1\}$$

γ_1 est atteint sur D_{n+1} car les valeurs absolues sont discrètes.

Il est clair que $E_1 \subset \mathcal{F}'$.

Posons : $\gamma_2 = \inf \{|x|_2 \; ; \; x \in E_1\}$

γ_2 est atteint sur E_1 pour la même raison que ci-dessus.

Soit $E_2 = \{x \in E_1 \; ; \; |x|_2 = \gamma_2\}$, etc...

Finalement, on choisit x_{n+1} dans E_s.
Il est clair que $x_{n+1} \in \mathcal{E}$. D'autre part $E_s \subset D_{n+1}$ donc :

$$|x_{n+1}|_i < |x_n|_i \quad \text{pour tout} \quad i \in S \setminus \{1\}$$

Si on avait $|x_{n+1}|_1 \leqslant |x_n|_1$, x_n ne serait pas extrémal, donc $|x_{n+1}|_1 > |x_n|_1$.
Finalement x_n et x_{n+1} sont voisins car :

$$|y|_i < \sup \{|x_n|_i, |x_{n+1}|_i\} \quad \text{pour tout} \quad i \in S$$

entraîne, en particulier, que $y \in D_{n+1}$, donc que $|y|_1 \geqslant \gamma_1$, ce qui est absurde.

2) DÉTERMINATION DE CORPS AYANT DES UNITÉS NON TRIVIALES

Cette détermination repose sur le résultat suivant :

Théorème 3.- On pose $K_o = k(X)$, S comme plus haut.

Si $x \in \mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{E}, \mathcal{F}$) sa norme $N_{K/K_o}(x)$ est un polynôme de $k[X]$ dont le degré est borné par une constante qui ne dépend que de K (et du fait que $x \in \mathcal{C}$, resp. $\mathcal{E}, \mathcal{F}$).

Exemple.- Si $x \in \mathcal{C}$, $\deg \left[N_{K/K_o}(x)\right] \leqslant g$ = genre de K.

Comme l'extension K/K_o peut dépendre d'un certain nombre de paramètres, la condition

$$\deg \left[N_{K/K_o}(x)\right] = 0$$

permet de fixer ces paramètres dans certains cas, voir ci-dessous II,4.

3) RAPPORT AVEC LA TORSION DE LA JACOBIENNE

On associe à chaque valeur absolue $|\;|_h$ de V une place P_h de K; on sait que le groupe $\mathcal{D}$ des diviseurs de K est le groupe abélien libre engendré par les P_h.

Les places P_i qui correspondent aux valeurs absolues $|\;|_i \in S$ engendrent un sous-groupe $\mathcal{M}$ que l'on appellera le groupe des diviseurs "à l'infini".

On désignera par $\mathcal{D}_o$ le sous-groupe des diviseurs de degré zéro et on posera $\mathcal{M}_o = \mathcal{D}_o \cap \mathcal{M}$ comme dans [3].

Théorème 4.- Soit $\mathcal{P}$ le groupe des diviseurs principaux de E, alors si l'on désigne par $\mathcal{G}$ le groupe $\mathcal{U}/\mathcal{E}$, on a $\mathcal{G} \cong \mathcal{M}_o \cap \mathcal{P}$.

Si l'on désigne par J le groupe $\mathcal{D}_o/\mathcal{P}$ (jacobienne de K) par J_∞ le sous-groupe $\mathcal{M}_o/\mathcal{M}_o \cap \mathcal{P}$ et par T le sous-groupe de torsion de J_∞, on a :

Corollaire.-

1) rang (J_∞/T) + rang $(\mathcal{G})$ = s-1

2) En particulier, si k est fini, rang $(\mathcal{G})$ = s-1.

Exemple : Dans le deuxième exemple ci-dessus : s = 3 et rang $(\mathcal{G})$ = 2, on en déduit que $J_\infty = T$.

Cas particulier

On suppose que $K = k(X,Y)$ avec $Y^p = D(X)$ où $D(X)$ est un polynôme unitaire de degré pm sans racine multiple.

On suppose aussi que p est premier, que p ≠ caractéristique de k et que k ne contient pas de racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité.

On prend pour A la fermeture intégrale de $k[X]$ dans K ; S est alors constitué de deux éléments $|\ |_1$ et $|\ |_2$ où $|\ |_1$ désigne la valeur absolue de degré 1 et $|\ |_2$ la valeur absolue de degré p-1.

Soit (x_n) la suite des points extrémaux $(\mathcal{E} = \mathcal{C})$ appartenant à la direction d'indice 2 et (x_{-n}) celle des points extrémaux appartenant à la direction d'indice 1. Le graphe $\Gamma = (\mathcal{C}, Y)$ que l'on obtient est une chaîne (avec boucles) de sommets x_n tels que :

$$\begin{cases} |x_{n+1}|_1 < |x_n|_1 \\ |x_{n+1}|_2 > |x_n|_2 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}$$

On dira que ce graphe est pseudo-périodique de période π ssi la suite des $\alpha_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ est telle que la suite $(\mathrm{div}(\alpha_n))$ est périodique de période π.

Si $x = U_o + U_1 Y + \ldots + U_{p-1} Y^{p-1}$, avec $U_i \in k[X]$ et si $\Delta = D(X)^{1/p} \in k((\frac{1}{X}))$, on a :

$$\begin{cases} |x|_1 = |U_o+U_1\Delta+\ldots+U_{p-1}\Delta^{p-1}| \\ |x|_2 = |\prod_{1\leqslant i\leqslant p-1} (U_o+U_1\zeta^i\Delta+\ldots+U_{p-1}\zeta^{(p-1)i}\Delta^{p-1})| \end{cases}$$

où ζ désigne une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité.

Un calcul simple montre que si $0 < |x|_1 < 1$, on a :

$$|x|_2 = |X|^{(p-1)\deg U(x)}$$

avec $\deg U(x) := \sup\{\deg U_o, \deg U_1\Delta,\ldots,\deg U_{p-1}\Delta^{p-1}\}$

Théorème 5.-

1) Les conditions suivantes sont équivalentes $\begin{cases} \text{i) } \mathcal{C}_{\mathcal{G}} \text{ est non trivial} \\ \text{ii) } \Gamma \text{ est pseudo-périodique} \\ \text{iii) } \overline{\Gamma} \text{ est fini} \\ \text{iv) } (p-1)P_1-P_2 \text{ est d'ordre fini sur } J_\infty \end{cases}$

2) Si, de plus, ℓ désigne l'ordre de $(p-1)P_1-P_2$ et π la pseudo-période de (x_n), on a :

$$\ell = \deg U(x_\pi)$$

3) Si $p \geqslant 3$, on a :

$$\begin{cases} \pi+m-1 \leqslant \ell \leqslant m + [\frac{pm}{2}]\,(\pi-1) & \text{si } m \leqslant p-1 \\ \pi+m-1 \leqslant \ell \leqslant m + \frac{(p+1)m}{2}\,(\pi-1) & \text{si } m > p-1 \end{cases}$$

Corollaire.- Si $p = 3$ et $m = 1$, on a $\ell = \pi$.

4) FAMILLES D'UNITÉS DES CORPS CUBIQUES DU TYPE $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{\alpha^3N^3+\beta N+\gamma})$

Une famille d'unités de corps cubiques purs sera ici la donnée d'un polynôme $\alpha^3X^3+\beta X+\gamma$ à cœfficients rationnels avec $\alpha \neq 0$ et $27\alpha^3\gamma^2+4\beta^3 \neq 0$ tel qu'il existe trois polynômes U_o, U_1 et U_2 à cœfficients rationnels vérifiant la propriété que le nombre $\varepsilon(N) = U_o(N)+U_1(N)\Delta+U_2(N)\Delta^2$, $\Delta^3 = \alpha^3N^3+\beta N+\gamma$, est une unité du corps cubique pur $\mathbb{Q}(\Delta(N))$ pour une infinité de N. Notre but est de déterminer toutes ces familles d'unités. On remarque que si $\varepsilon(N)$ est une suite de corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{\alpha^3N^3+\beta N+\gamma})$ pour une infinité de N alors le corps de fonctions $\mathbb{Q}(X,Y)$ où $Y^3 = X^3+aX+b$, $a = \frac{\beta}{\alpha}$, $b = \gamma$, possède une X-unité non triviale.

L'algorithme précédent, permet alors de trouver tous les couples $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tels que le corps de fonctions considéré admet une X-unité non triviale et d'en déterminer une X-unité fondamentale dans le cas où X^3+aX+b n'a pas de racine multiple. En effet, la cubique $Y^3 = X^3+aX+b$ mise sous forme de Weierstrass est de la forme $Z^2 = T^3-d$ où $d \in \mathbb{Q}^*$ et d'après Fueter [4] cette cubique a comme groupe de points de torsion sur $\mathbb{Q}$, $\{0\}$ ou $\mathbf{Z}/_{2\mathbf{Z}}$ ou $\mathbf{Z}/_{3\mathbf{Z}}$ ou $\mathbf{Z}/_{6\mathbf{Z}}$.

D'après le corollaire du théorème 5, il suffit alors de trouver les couples (a,b) tels que les points extrémaux x_1, x_2, x_3, x_6 soient des unités.

P. Toffin et B. Vallée, grâce à un calcul fait sur Mac Syma, ont trouvé les 6 premiers points extrémaux. Donnons les deux premiers :

$$x_1 = -X+\Delta, \quad \mathcal{N}(x_1) = aX+b$$

$$x_2 = -9b^2X^2-3ba^2X+a^4+(18b^2+3a^2)X+3ba^2\Delta+(-9b^2-3a^3)\Delta^2$$

$$\mathcal{N}(x_2) = (-9a^{10}b-135a^7b^3-729a^4b^5-1458ab^7)X+a^{12}-135a^6b^4-729a^3b^6-729b^8$$

On cherche alors les couples (a,b) tels que le cœfficient de X dans l'expression $\mathcal{N}(x_i)$ $(i = 1,2,3,6)$ s'annule. On en trouve uniquement pour $i = 1,2,3$ (voir tableau).

Nous allons donner le résultat sous forme de tableau, mais avant on doit se poser la question :

Etant donnés deux corps de fonctions $\mathbb{Q}(X,Y)$ et $\mathbb{Q}(X_1,Y_1)$ avec

$$\begin{cases} Y^3 = X^3+aX+b \\ Y_1^3 = X_1^3+a_1X_1+b_1 \end{cases}$$

à quelle condition a-t-on $\begin{cases} \mathbb{Q}[X] = \mathbb{Q}[X_1] \\ \mathbb{Q}(X,Y) = \mathbb{Q}(X_1,Y_1) \end{cases}$?

La réponse est oui si et seulement si il existe un $c \in \mathbb{Q}^*$ tel que : $a_1 = c^2a$, $b_1 = c^3b$.

Si cette condition est remplie, on dira que les deux polynômes X^3+aX+b et $X_1^3+a_1X_1+b_1$ sont équivalents.

<u>Théorème 6</u>.- A équivalence près, les seuls polynômes pour lesquels le corps de fonctions $\mathbb{Q}(X,Y)$, $Y^3 = D(X)$, $D(X) = X^3+aX+b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $27b^2+4a^3 \neq 0$, admet une unité non triviale, sont donnés par le tableau :

$D(X)$	$\varepsilon_o(X,Y)$: unité fondamentale de K	$\mathcal{N}$: norme	Graphe
X^3+b	$-X+Y$	b	
X^3+aX	$1+\frac{3XY}{a}-\frac{3Y^2}{a}$	1	
X^3-6X+6	$-X^2-2X+4+2Y+Y^2$	4	
X^3-9X+9	$\frac{X^3}{3}-3X+4+(-\frac{X^3}{3}-X+2)Y+Y^2$	1	

on peut, dans ce tableau, supposer b sans facteur cubique et a sans facteur carré.

En remarquant que si $\varepsilon(X,Y)$ est une X-unité de norme $c \in Q^*$ alors $\frac{\varepsilon^3}{c}$ est une unité de norme 1, on trouve dans chacun des cas, une unité fondamentale du sous-groupe $\mathcal{H}$ des X-unités de norme 1. Si $\varepsilon_1(X,Y)$ désigne une unité fondamentale de $\mathcal{H}$ il faut regarder s'il existe une infinité d'entiers N pour lesquels $\varepsilon_1(N,\Delta(N))$ soit un entier, ce que l'on vérifie aisément pour toutes les valeurs de (a,b) trouvées ici. Finalement, on obtient :

<u>Corollaire</u>.- Les seuls polynômes $\alpha^3X^3+\beta X+\gamma$, à cœfficients rationnels avec $\alpha \neq 0$ et $27\alpha^3\gamma^2+4\beta^2 \neq 0$ pour lesquels on puisse définir une famille d'unités sont ceux (une fois mis sous la forme $X'^3+aX'+b$, $a=\frac{\beta}{\gamma}$, $b=\gamma$) qui sont équivalents aux polynômes donnés par la 1ère colonne du tableau.

<u>RÉFÉRENCES</u>

[1] Y. HELLEGOUARCH, R. PAYSANT-LE ROUX.- "Commas, points extrémaux et arêtes des corps possédant une formule du produit". C.R.M. Ac. Sc. Canada, 1985.

[2] H. APPLEGATE, H. ONISHI.- "Periodic expansion of modules and its relation to units". Journ. of Number Theory 15, 283-294, 1982.

[3] R. PAYSANT-LE ROUX, D.L. Mc QUILLAN, Y. HELLEGOUARCH.- "Unités de certains sous-anneaux des corps de fonctions algébriques". C.R.M. Ac. Sc. Canada 1985.

[4] R. FUETER.- Über kubische diophantische Glichungen, Commentarie Mathematici Helvetici, Vol 2 (1930), p. 69

Y.HELLEGOUARCH, R.PAYSANT LE ROUX
Département de Mathématiques
Esplanade de la Paix
14032 CAEN CEDEX