Astérisque

BERNARD MALGRANGE

L. Schwartz et la théorie des distributions

Astérisque, tome 131 (1985), p. 25-33

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__25_0>

L. SCHWARTZ ET LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

par
B. MALGRANGE

Je me permettrai de commencer, moi aussi, par quelques souvenirs personnels. Je crois bien avoir entendu parler pour la première fois de la théorie des distributions par Serre en 1948, à la fin de ma première année à l'Ecole Normale Supérieure. Serre, qui était, lui, en 3ème année, passait beaucoup de temps à discuter avec ses conscrits, et à faire leur éducation. Un jour, il me parla avec enthousiasme d'une récente théorie d'un certain Laurent Schwartz, dans laquelle on pouvait dériver indéfiniment toutes les fonctions continues, et il m'en montra le résumé paru deux ans auparavant aux Annales de Grenoble sous le titre "Généralisation de la notion fonction, de dérivation, de Transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques" .

Bien sûr, cela me parut étrange ; mais l'autorité de Serre me fit accepter l'idée que ça pouvait être quelque chose d'intéressant. Toutefois, pour différentes raisons, je n'approfondis pas le sujet sur le moment.

Une de ces raisons, c'était que l'article en question était alors le seul document disponible sur cette théorie; il devait être suivi un peu plus tard d'un autre résumé sur la transformation de Fourier, paru dans la même revue, et aussi d'un article destiné aux physiciens, et particulièrment aux électriciens, paru dans les Annales des Télécommunications.

Je fis la connaissance de Schwartz un peu plus tard, d'abord à l'occasion d'un congrès Bourbaki qui se tenait à l'Ecole Normale, puis, de façon plus suivie à Nancy où je passais une partie de ma deuxième année d'Ecole. A cette époque, il travaillait à son livre que ses amis le pressaient de terminer; il le promettait invariablement pour le mois suivant ; cela prit en fait plus de temps que prévu, et il en sortit finalement les deux tomes bien connus, le premier paru en 1950 et le second en 1951 ; en ce qui me concerne, c'est seulement après cette parution que je commençai à apprendre sérieusement les distributions.

Le succès immédiat de cette théorie fut considérable, avec peut-être certaines inégalités ; elle fut adoptée avec enthousiasme par des géomètres tels que G. de Rham et A. Weil ; plus inégalement au début par les analystes, à l'exception des russes, en particulier de Gelfand; il est vrai qu'ils y étaient peut-être mieux préparés que d'autres, du fait que Sobolev avait développé antérieurement des idées très proches dans le contexte des équations aux dérivées partielles - fait que d'ailleurs, Schwartz ignorait. Grand succès aussi chez les physiciens, mais succès quelquefois un peu ambigu ; je me rappelle avoir vu Schwartz revenir assez mécontent d'une conférence ou l'auteur expliquait que la fonction $1/x$, étant impaire, s'annulait à l'origine, avec un commentaire du genre suivant "ça peut paraître bizarre, mais ça peut se justifier grâce à la théorie des distributions". Des exemples de ce type n'étaient pas si rares, et bien des gens limitaient leurs connaissances de la théorie des distributions à la phrase rituelle "d'après Schwartz, ça a un sens" , un peu à la manière dont beaucoup d'étudiants se débarassent d'une intégrale par un "d'après Lebesgue ça converge".

Ce dont je peux témoigner, c'est que cette théorie n'était pas si facile à apprendre pour des chercheurs débutants, peut-être moins à cause des difficultés techniques que d'un mode de pensée auquel nous n'étions pas habitués ; il nous a fallu beaucoup d'aide de Schwartz pour y arriver; je me souviens de discussions avec Lions, lorsque nous commencions à travailler avec lui : "quel drôle de type, avec ses fonctions indéfiniment dérivables à support compact, et ses distributions dontl'ordre augmente indéfiniment quand on s'en va à l'infini ; il est fou de prétendre que sa théorie est élémentaire, et de vouloir l'enseigner aux étudiants de Physique".

Incidemment, je pense maintenant que Schwartz avait raison de présenter sa théorie comme élémentaire; il est plus facile, plus formateur, et plus utile d'apprendre d'abord à dériver des fonctions admettant des discontinuités, et à calculer des parties finies d'intégrales et leurs transformées de Fourier, plutôt que de commencer par les démonstrations détaillées de la théorie de l'intégration. En tout cas, ce qui me parait certain, c'est que cela devrait faire partie de la formation de tout mathématicien ; je suis surpris, par exemple, de voir de brillants jeunes algébristes perdre pied devant une valeur principale ou un complexe de courants, et de constater que ce n'est pas tout-à-fait aussi rare qu'on pourrait le croire.

Qu'apportait la théorie des distributions au moment de son apparition ? Le résumé de 1945 auquel je faisais allusion tout à l'heure le montre nettement : un point de vue systématique et unifié sur la dérivation, la convolution, l'intégrale de Fourier, dans lequel ces opérations sont possibles sous des hypothèses générales simples et claires, avec toutes les propriétés essentielles qu'on est en droit d'en attendre. L'article des Télécommunications de 1948 montre plus particulièrement comment la transformation de Laplace et le calcul symbolique de Heaviside rentrent eux aussi dans ce cadre.

Permettez-moi quelques citations de ces articles :

"On peut chercher une distribution S vérifiant, A et B étant deux distributions données

$$\frac{\partial S}{\partial x} = A \ , \ \frac{\partial S}{\partial y} = B \ .$$

S'il y a une solution, elle est définie à une fonction constante près. Mais il y a une condition de compatibilité

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad . \tag{11}$$

Ce résultat est remarquable. Si A et B sont des fonctions continues, (11) est la condition usuelle pour qu'elles soient les dérivées partielles d'une fonction continue $S(x,y)$; mais cette condition, habituellement, n'a de sens que si A et B sont dérivables, ce qui n'a aucune raison d'être dans le problème posé... Même en restant dans le cadre de A , B , S , fonctions continues, la condition (11) rend obligatoire le langage des distributions" .
"Si (T) est une fonction continue et deux fois dérivable, le fait pour T d'être surharmonique est équivalent à l'inéquation (16) $\Delta\ T \leq 0$.
La définition donnée (des fonctions sous-harmoniques) est plus générales puisque valable pour des fonctions non dérivables. Mais, dans l'espace des distributions, tout est dérivable; on montre que les distributions solutions de (16) sont justement les fonctions "presque surharmoniques", c'est à dire égales presque partout aux fonctions surharmoniques, ce qui réhabilite le Laplacien."
En voici une dernière ,qui concerne le calcul symbolique
"...Ainsi $\delta'[\exp(-px)] = p$, donc $\delta' \supset p$, ce qui est une formule bien connue mais que les symbolistes n'utilisent d'habitude qu'avec la conscience peu tranquille."
Dans l'introduction de l'article de 45, Schwartz prévoyait les domaines où sa théorie devrait s'appliquer de façon féconde" électricité et physique mathématique, transformations de Fourier et de Laplace, équations et inéquations aux dérivées partielles, étude théorique des variétés et formes différentielles". Aujourd'hui, il est on ne peut plus clair que la prévision était juste.
Entrons un peu dans le détail, en commençant, si vous le voulez bien par l'analyse harmonique, puisque c'est sur ce sujet que portent ses premiers travaux : études des sommes d'exponentielles réelles et imaginaires, théorie des fonctions moyenne-périodiques. Ces travaux sont antérieurs à la théorie des distributions, ou contemporains à ses tout débuts, et n'ont donc guère pu être influencés par elle ; ici, il faudrait plutôt parler d'influence en sens contraire : dès le début de la thèse de Schwartz, apparait, à propos du théorème de Müntz, l'idée de démontrer un théorème d'approximation en le remplaçant, via le théoreme de Hahn-Banach, par l'énoncé dual ; ce genre d'idées, nouveau à l'époque, jouera ensuite un rôle fondamental,

aussi bien dans la définition des distributions que dans leurs applications. Je me souviens à ce propos de ma stupéfaction le jour où Schwartz m'expliqua comment on pouvait , par ce genre de procédé, réduire à une inégalité la démonstration de l'existence éventuelle d'une solution élémentaire d'une équation aux dérivées partielles; dans le contexte des distributions, la méthode des majorations a priori, connue bien sûr depuis longtemps, prenait une allure remarquablement simple et naturelle.

Un autre travail de Schwartz en analyse harmonique est, lui, directement inspiré par les distributions ; je veux parler du contre-exemple à la synthèse harmonique dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, pour $n \geq 3$:

Soit μ la masse unité, répartie uniformément sur la sphère de rayon 1 , et prenons pour f la transformée de Fourier de $\frac{\partial \mu}{\partial x_n}$; pour $n \geq 3$, on constate que f est bornée ; d'autre part $\frac{\partial \mu}{\partial x_n}$ n'est visiblement pas limite faible, dans S', de mesures portées par son support ; donc a fortiori, f n'est pas limite faible dans L^∞ de combinaisons linéaires d'exponentielles appartenant à son spectre ! Ce résultat, d'une remarquable simplicité, fit sensation à l'époque ; il fallut attendre assez longtemps avant que Malliavin n'arrive à établir le même résultat, techniquement bien plus difficile, pour $n = 1$; je rappelle aussi qu'ultérieurement, Varopoulos a donné une méthode qui réduit le cas $n = 1$ au cas de Schwartz, $n \geq 3$.

Par contre, Schwartz démontrait que dans l'espace S' , la synthèse harmonique est vraie : tout sous espace fermé, invariant par translation, est engendré par les exponentielles-polynomes qu'il contient. Par dualité, ce résultat se réduit à un théorème sur les idéaux de fonctions indéfiniment dérivables, établi par Whitney je crois à la demande de Schwartz. Le problème analogue sans condition de croissance, c'est à dire pour l'espace des fonctions C^∞ ou pour l'espace des distributions a une réponse positive en dimension un ; c'est précisément le résultat principal de l'article de Schwartz sur les fonctions moyenne périodiques auquel je faisais allusion tout à l'heure. Par contre, comme on le sait, Gurevitch a démontré assez récemment que le même résultat n'était plus exact en dimension supérieure.

J'aurais aimé aussi commenter un peu l'apport de la théorie des distributions à l'analyse harmonique non commutative, illustré notamment par leur utilisation dans les travaux de Harish-Chandra et ceux de Bruhat ; on me pardonnera de ne pas le faire, vu mon incompétence, et de passer a un autre sujet : les équations aux dérivées partielles.

Dans le traité de Schwartz, aucun chapitre ne semble leur être explicitement consacré ; mais elles sont partout, dans les exemples, dans les méthodes développées, dans les problèmes posés.

Les principaux exemples de "vraies" distributions, celles qui ne se réduisent pas à des fonctions intégrables ni même à des mesures sont tirés de la théorie des équations aux dérivées partielles : les parties principales d'Hadamard, introduites pour résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques du second ordre; leur identification à des distributions en rend le maniement plus aisé et plus systématique ; ou encore les couches multiples, utilisés couramment par les physiciens en théorie du potentiel. La formule intégrale de Cauchy et la formule de Poisson sont exprimées par le fait que $1/r$ et $1/z$ sont respectivement, à des constantes près, solution élémentaire de l'équation de Laplace et de l'équation de Cauchy Riemann. A cette occasion, Schwartz clarifie la notion de solution élémentaire en la définissant comme une solution d'une équation ayant la mesure de Dirac δ pour second membre; il étend cette notion en celle de noyau élémentaire.

Posant le problème de l'existence d'une solution élémentaire hors des quelques cas connus à l'époque, il est amené, pour une équation à coefficients constants, à chercher à en obtenir une qui soit tempérée : via la transformation de Fourier, cela le conduit au problème de la division des distributions, naturel dans ce contexte, mais qui n'aurait guère pu être posé sans la théorie des distributions.

A vrai dire, cette dernière assertion n'est pas absolument exacte ; en effet, via la dualité fonctions C^∞-distributions, et le théorème de Whitney auquel j'ai fait allusion plus haut, le problème peut être posé ainsi : prouver qu'une fonction C^∞ est divisible par un polynome (ou, plus généralement, une fonction analytique) si, en chaque point, sa série de Taylor formelle l'est ; mais il me semble pas que ce problème ait sérieusement attiré l'attention avant d'être clairement posé par Schwartz, sauf dans des cas très particuliers.

Des essais infructueux avaient fini par rendre quelques personnes sceptiques, jusqu'à ce que le résultat soit démontré en 1958, indépendamment par Hörmander et Łojasiewicz (pour la petite histoire: je crois bien que Hörmander était lui aussi sceptique, et qu'il a trouvé la démonstration en cherchant un contre-exemple).

En même temps qu'il précisait la notion de solution et de noyau élémentaire, Schwartz montrait comment les propriétés de régularité des solutions d'une équation pouvaient se lire sur le noyau en question : ainsi, comme $\frac{1}{r}$ ou $\frac{1}{z}$ sont analytiques en dehors de l'origine, toutes les distributions harmoniques, ou holomorphes, sont des fonctions analytiques ; comme la solution élémentaire de l'équation de la chaleur est C^∞ en dehors de l'origine, toutes les solutions de l'équation de la chaleur homogène seront C^∞ ; cela conduit Schwartz à introduire, au début avec une terminologie un peu différente, les notions d'opérateur différentiel hypoelliptique ou analytique-hypoelliptique, suivant que l'une ou l'autre des propriétés précédentes sera satisfaite.

Toutes ces idées et quelques autres développés par Schwartz arrivaient au bon moment, où notamment les méthodes développées par Petrovsky, Leray, et Gårding dans les équations hyperboliques avaient atteint un degré de généralité qui s'imposait comme modèle d'une étude beaucoup plus systématique qu'on ne l'avait fait auparavant. Le résultat en a été une impulsion considérable de la théorie des équations aux dérivées partielles; qu'il me suffise, à titre d'exemple de citer les travaux de Hörmander et de Nirenberg-Trèves sur les équations résolubles et non résolubles, ceux d'Ehrenpreis sur les équations à coefficients constants, et ceux de Lions sur les problèmes aux limites. Je renonce à parler de tous ceux qui ont suivi, il faudrait beaucoup trop de temps.

Un problème qui se pose ici naturellement est celui de la restriction d'une distribution à une sous-variété, ou encore celui du produit de deux distributions qui se ramène immédiatement au précédent par le truc habituel de l'application diagonale. Cette question se pose, par exemple, à propos du problème de Cauchy, ou encore à propos des distributions qui interviennent en théorie quantique des champs. De telles opérations ne sont pas possibles en général, comme Schwartz l'a montré, du moins si l'on veut conserver les propriétés usuelles du produit et de la dérivation.

Un premier cas a été traité par Schwartz, avec la notion de distribution semi-régulière : si T est semi-régulière, disons en x_n, c'est à dire $\mathcal{C}^\infty$ en x_n à valeurs distributions des autres variables, on pourra définir sa restriction aux hypersurfaces x_n = constante. Un résultat plus raffiné, qui fait intervenir ce qu'on appelle maintenant l'analyse microlocale, est dû à Hörmander: si le microsupport au sens $\mathcal{C}^\infty$, ou "wave front set" de T ne rencontre pas le conormal à une sous-variété Y hors de la section nulle, alors on peut définir de façon naturelle la restriction de T à Y. Le même résultat a été établi par Sato dans le contexte des hyperfonctions et du microsupport analytique à la Sato.

Dans le cas où Y est une sous-variété analytique réelle, une autre approche de cette question a été développée plus récemment ; elle repose sur une idée, due je crois initialement à Gelfand et Sato, qui consiste d'une façon générale à remplacer l'étude d'une distribution donnée T par celle du système différentiel qu'elle satisfait; par exemple, que T ait ou non une restriction, on peut toujours définir la restriction de ce système différentiel à Y comme étant, en gros, le système induit sur Y. On est amené à considérer aussi les foncteurs dérivés, ou "restrictions d'ordre supérieur".

On obtiendra des résultats intéressants si l'on suppose que le système différentiel défini par T est holonome, c'est à dire de dimension minimale (en gros, le nombre d'équations indépendantes est égal à la dimension de la variété). En effet, dans ce cas, les systèmes obtenus par restriction seront encore holonomes, et en particulier cohérents ; ce résultat a été établi par Bernstein dans le cas algébrique, et étendu par Kashiwara au cas analytique ; on a même mieux : si le système initial est à singularité régulières, ce qui est souvent le cas dans les exemples, la restriction, et aussi les restrictions d'ordre supérieur, le seront aussi d'après Kashiwara-Kawai ; enfin, sous la même hypothèse, un résultat récent de Kashiwara, affirme que toutes les solutions hyperfonctions de ces systèmes seront des distributions.

Le problème principal qui se pose alors consiste à étudier les propriétés du système restreint, en particulier sa variété caractéristique ; c'est une question difficile, qui présente un grand intérêt pour l'étude des singularités en géométrie algébrique ou analytique et peut être aussi pour la théorie des champs. Cette question et des questions voisines font actuellement l'objet de nombreux travaux ; des résultats importants ont été annoncé récemment ; je préfère attendre un peu pour en parler.

Je me suis étendu assez longuement sur la théorie des équations aux dérivées partielles qui est sans doute le domaine où la théorie des distributions a exercé la plus grande influence ; il me reste à parler un peu de géométrie et de physique.

La définition des distributions par dualité se prête, ipso facto, à leur utilisation dans les questions de dualité en géométrie. De Rham cherchait une théorie identifiant l'homologie et la cohomologie des variétés et il avait déjà introduit pour cela une première notion de courant dans sa thèse ; il s'en apercut de ce fait dès qu'il eut connaissance du résumé de 1945 de la théorie des distributions ; il m'a dit récemment que cet article avait été pour lui un trait de lumière;Schwartz et lui développèrent alors tous les deux indépendamment la théorie des courants, ou formes différentielles distributions, appliqués ensuite par de Rham, notamment aux formes harmoniques.

Une autre remarquable application à la fois des distributions et de la théorie des faisceaux est le théorème de dualité de Serre ; sa conséquence la plus spectaculaire était l'expression du théorème classique de Riemann-Roch comme le calcul de la caractéristique d'Euler d'un fibré holomorphe sur une courbe compacte, ou encore, ce qui revient au même, comme le calcul de l'indice d'un certain opérateur elliptique sur cette courbe. Pour autant que je sache, ce travail de Serre est à l'origine des travaux considérables qui ont suivi sur la dualité en géométrie algébrique et analytique, sur le théorème Riemann-Roch en dimensions supérieures, et sur l'indice des opérateurs elliptiques.

Une remarque en passant : aujourd'hui encore, la méthode de loin la plus simple pour construire ce qu'on appelle le morphisme-trace en géométrie analytique pour des variétés lisses consiste à prendre l'image directe à support propre du complexe de Dolbeault des courants (cette image directe, ou intégration dans la fibre, se définit immédiatement par dualité à partir de l'image réciproque des formes $\mathcal{C}^{\infty}$) ; le résultat analogue en géométrie algébrique, ou toute autre méthode en géométrie analytique sont bien plus compliqués. Il est curieux que cette remarque, essentiellement bien connue depuis une vingtaine d'années, ne se trouve à peu près écrite nulle part, sinon au milieu de choses beaucoup plus compliquées, et soit ignorée de bien des spécialistes.

Il faudrait aussi parler bien sûr du courant d'intégration de Lelong, et encore des valeurs principales de Dolbeault ; ces dernieres, qui donnent dans certains cas une solution canonique du problème de la division, avaient été obtenues dans des cas particuliers par Schwartz. Une généralisation de ces valeurs principales a été donnée par Herrera et Coleff, qui obtiennent un plongement canonique du complexe de Cousin (au sens de Grothendick) dans le complexe de Dolbeault des courants ; j'ai le sentiment que ce résultat n'est pas parfaitement compris à l'heure actuelle, et qu'il mérite encore du travail.

Schwartz a toujours été préoccupé des rapports entre les mathématiques et la physique ; il me semble que cela mérite d'être noté : je ne crois pas que cette préoccupation était si courante, du moins en France, à l'époque où il développait la théorie des distributions. Dès ses premiers exposés, il insiste énormément sur le fait que cette théorie permet de justifier certains procédés utilisés, par exemple en calcul symbolique, l'introduction de la "fonction de Dirac" et sa dérivation, etc...

Cette insistance a souvent fait croire que c'est justement en cherchant une telle justification qu'il avait trouvé la théorie des distributions ; il a dit lui-même que ce n'était pas exact, et que l'origine immédiate de son travail était différente; par contre, à propos du théorème des noyaux, il dit ceci :

"Le physicien Dirac avait senti intuitivement le théorème des noyaux, disant que toute application linéaire continue de $\mathcal{D}_y$ dans $\mathcal{D}'_x$ peut s'exprimer, d'une manière unique, par un noyau distribution $K_{x,y}$, sous la forme $T_x = \int K_{x,y}\varphi(y)\,dy$. Il ne pouvait l'exprimer qu'en termes extrêmement vagues, c'est néanmoins lui qui m'en a donné l'idée..."

Permettez-moi une dernière citation (tout philosophe sait que la pensée est le plus court chemin d'une citation à une autre) ; celle-ci concerne les "précurseurs" de la théorie des distributions :

"Le calcul des distributions, le plus audacieux a été incontestablement fait par les physiciens théoriciens ; la "fonction de Dirac" date de 1926, mais les physiciens ont été considérablement plus loin, bien avant que les mathématiciens n'aient commencé à entrevoir une approche du problème....En 1950, quand mon livre sur les distributions est paru, les physiciens avaient déjà introduit toutes les fameuses fonctions singulières de la physique théorique relativiste ; or ce sont là des distributions malaisées à définir mathématiquement de façon convenable, et qui n'ont été approfondies complètement qu'à partir de la thèse de P.D. Méthée en 1954 ".

Les utilisations les plus raffinées de la théorie des distributions en physique ont trait, bien sûr, à la théorie quantique des champs ; j'y ai déjà fait une allusion tout à l'heure ; permettez-moi de me contenter de cette allusion, en vous renvoyant à la conférence de A. Wightman, qui est bien plus compétent que moi sur ce sujet. Je crois aussi que l'Ecole de Physique mathématique, dont Wightman est un des fondateurs, à reçu une impulsion considérable de la théorie des distributions ;

sans doute pourrait-il le confirmer.

Pour terminer, je voudrais quitter la théorie des distributions pour quelques mots plus personnels. Une des grandes qualités de Schwartz, outre ses talents de mathématicien, réside dans le style de ses rapports personnels, et j'ai pu l'éprouver tout particulièrement quand j'étais un de ses élèves. Schwartz sait s'intéresser à leur personnalité, tout autant qu'à leurs mathématiques, leur remonter le moral, et les aider dans les cas difficiciles. Cela n'est pas donné à tout le monde, tout au moins au même point qu'à Schwartz ; cela je tenais absolument à le dire.

Institut Fourier
Université de Grenoble I
B.P.74
38402 Saint-Martin-d'Hères
France