L. BOUTET DE MONVEL

Systèmes presqu'elliptiques : une autre démonstration de la formule de l'indice

Astérisque, tome 131 (1985), p. 201-216
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__131__201_0>

SYSTÈMES PRESQU'ELLIPTIQUES : UNE AUTRE DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE L'INDICE.

par L. Boutet de Monvel

Cet article résume un travail en collaboration avec B. Malgrange.

§1. Rappels sur la formule de l'indice.

a. Soit X une variété (réelle, compacte, C^∞), D un complexe d'opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels sur X , c'est à dire une suite d'opérareurs différentiels:

(1) $D : 0 \to C^\infty(X,E^1) \to \cdots \to C^\infty(X,E^n) \to 0$

où les E^j sont des fibrés vectoriels sur X , et $D^{j+1} \circ D^j = 0$. Le symbole de D est le morphisme de fibrés vectoriels sur T^*X tel que

(2) $e^{-t\phi} D(e^{t\phi}u) = t^m \sigma(D)\ (d\phi).u + O(t^{m-1})$

où u est une section de $\sum E^j$, ϕ une fonction C^∞ sur X , t un paramètre tendant vers $+\infty$. Ici $\sigma(D)$ est une différentielle , ie. $\sigma(D)^2 = 0$, puisque $D^2 = 0$.

Rappelons que D est elliptique si son symbole $\sigma(D)$ est exact en dehors de la section nulle de T^*X . Dans ce cas les groupes d'homologie $H^j(X,D)$ sont tous de dimension finie, et l'indice de D est le nombre

(3) $\sigma(D) = \sum(-1)^j \dim H^j(X,D)$.

En remplaçant D par l'opérateur $D+D^*$, opérant des sections de $\sum E^{2j}$ vers celles de $\sum E^{2j+1}$ (théorie de Hodge) , ce qui ne change pas l'indice, on montre que celui-ci ne dépend que de la classe d'homotopie du symbole de D , et ceci additivement, donc qu'il ne dépend que du fibré virtuel $[D] \in K_c(T^*X)$ défini par ce symbole (où K_c désigne la K-théorie à supports compacts). La formule de l'indice permet de calculer $\chi(D)$ en termes d'invariants topologiques du fibré virtuel [D] ;

$$(4) \qquad \sigma(D) = \int_{T^*X} \mathrm{ch}[D] \ \tau(T^*X)$$

où ch D est le caractère de Chern de [D] et $\tau(T_*X)$ la classe de Todd de T^*X définie par exemple à partir de la structure symplectique canonique de T^*X.

La démonstration publiée par Atiyah et Singer est en fait K-théorique, inspirée de la démonstration par grothendieck du théorème de Riemann-Roch, que j' esquisse maintenant.

b. Soit X une variété complexe projective, M un faisceau cohérent sur X , $i : X \to P_n(\mathbb{C})$ un plongement. Il existe une résolution localement libre finie de M :

$$0 \to L_N \to L_{N-1} \to \dots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0$$

qui définit donc un élément $[M]$ du groupe de Grothendieck K(X). La formule de Riemann-Roch exprime la caractéristique d'Euler $\chi(M) = \sum (-1)^j \dim H^j(X,M)$ en fonction d'invariants topologiques de $[M]$:

$$(4)\text{bis} \qquad \chi(M) = \int_X \mathrm{ch}[M] \ \tau(X)$$

Pour la démontrer on remarque qu'on a $\chi(M) = (-1)^d \chi(i_! M)$, où $i_! M$ est l'image directe de M , d la codimension de plongement. Le membre de droite de l'égalité (4)bis se comporte de la même façon. On est ainsi ramené au cas où X est l'espace projectif, et dans ce cas tous les termes de la formule sont connus et la vérification est facile.

c. La méthode de Atiyah et Singer pour démontrer (1) s'inspire de celle de

Grothendieck : si X est plongée dans une variété : $X \xhookrightarrow{i} Y$, on peut à tout complexe elliptique D sur X associer un complexe elliptique $\beta_i(D)$ sur Y de sorte que $\chi(D) = \chi(\beta_i(D))$ (et que les membres de droite de la formule (4) suivent).

Par exemple si Y est un fibré vectoriel réel de fibre F sur X , et $i : X \to Y$ est la section nulle , $\beta_i(D)$ est essentiellement le complexe $D \otimes d_F$, où d_F est le complexe de De Rham relatif (différentielle extérieure des fibres).

Dans le cas $X =$ point , $Y = \mathbb{R}^n$, on obtient un isomorphisme

$$\beta_o \ : \ K(\text{point}) = \mathbb{Z} \ \to \ K_c(T^*\mathbb{R}^n)$$

Dans le cas général on a

$$\chi(D) = \beta_o^{-1} \ \beta_i(D)$$

où i est n'importe quel plongement de X dans $\mathbb{R}^n$.

Ceci dit seul le fibré $\beta_i[D] = [\beta_i(D)]$ est bien défini. Le complexe $\beta_i(D)$ n'est défini qu'à homotopie près, et il n'y a pas pour lui de construction canonique ou fonctorielle. La construction ci-dessous, avec une notion un peu élargie de l'ellipticité, fournira -du moins pour les opérateurs à coefficients analytiques- un tel choix canonique.

§2. Rappels sur les opérateurs de Toeplitz.

a. Soit W une variété complexe de Stein, $\Omega \subset W$ un ouvert relativement compact de bord $\partial\Omega$ analytique réel strictement pseudoconvexe; autrement dit Ω est défini localement (ou globalement) par une inégalité :

$$(5) \qquad \Omega \ : \ \rho < 0$$

où ρ est une fonction analytique réelle , $d\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$, et la matrice de Levi de ρ ($\partial^2\rho/\partial z_j\, \partial\bar{z}_k$ en coordonnées locales) est $\gg 0$.

Nous noterons $\Sigma \subset T^*\partial\Omega$ le sous-fibré en demidroites réelles engendré par la section $-id'\rho_{|\partial\Omega}$. Comme $\partial\Omega$ est strictement pseudoconvexe, Σ est une sous-variété symplectique de $T^*\partial\Omega$.

Toute fonction holomorphe dans Ω possède (au moins au sens hyperfonction) une trace sur $\partial\Omega$, qui la détermine complètement. Nous noterons $\mathcal{O}(\partial\Omega)$ l'espace vectoriel de ces traces (il est isomorphe à $\mathcal{O}(\Omega)$).

Nous noterons encore

$$(6) \qquad \mathcal{O}^s(\partial\Omega) \subset H^s(\partial\Omega)$$

l'ensemble des traces de fonctions holomorphes qui appartiennent à l'espace de Sobolev $H^s(\partial\Omega)$, et

$$(7) \qquad S : L^2(\partial\Omega) \to \mathcal{O}^o(\partial\Omega)$$

le projecteur orthogonal (projecteur de Szegö) pour la métrique Hilbertienne sur $L^2(\partial\Omega)$ définie par une mesure de densité analytique positive. Le projecteur S se prolonge ou se restreint en un opérateur continu de $H^s(\partial\Omega)$ sur $\mathcal{O}^s(\partial\Omega)$ pour tout s ; en outre il préserve localement la régularité C^∞ et l'analyticité (pour ces assertions cf. [1] ; pour l'analyticité cf. [6] , [7]).

b. On appelle opérateur de Toeplitz analytique d'ordre m sur $\partial\Omega$ un opérateur A sur $\mathcal{O}(\partial\Omega)$ tel qu'il existe un opérateur pseudodifférentiel analytique P d'ordre m sur $\partial\Omega$ tel que

$$(8) \qquad A(u) = S(P(u)) \quad \text{pour } u \in \mathcal{O}(\partial\Omega)$$

Un tel opérateur est continu de $\mathcal{O}^s$ dans $\mathcal{O}^{s-m}$ pour tout s , et préserve localement la régularité C^∞ et l'analyticité, comme P et S .

Ces opérateurs se comportent comme des opérateurs pseudodifférentiels, avec un calcul symbolique analogue sur le cône symplectique Σ : si A est défini par (8) , son symbole est la fonction homogène sur Σ

$$(9) \qquad \sigma(A) = \sigma(P)_{|\Sigma}$$

On écrira $\sigma_m(A)$ pour spécifier que A est considéré comme opérateur d'ordre m.

Toute fonction homogène (et analytique) sur Σ est le symbole d'un opérateur de Toeplitz; le symbole $\sigma_m(A)$ est nul si et seulement si A est en fait de degré $\leq m-1$. Enfin on a

$$(10) \qquad \sigma_{m+m'}(A\,B) = \sigma_m(A)\,\sigma_{m'}(B)$$

$$\sigma_{m+m'-1}([A,B]) = -i\,\{\sigma_m(A), {}_{m'}(B)\}_\Sigma$$

où $\{\ \}_\Sigma$ est le crochet de Poisson de la variété symplectique Σ , si A et B sont respectivement d'ordre m et m'.

Exemple : Soit $P = P(z,\partial/\partial z)$ un opérateur différentiel à coefficients holomorphes. Alors P induit sur l'espace $\mathcal{O}$ un opérateur de Toeplitz T_P de symbole

$$(11) \qquad \sigma(T_P)\ (-id'\rho_{|\partial\Omega}) = \sigma_P\ (-id'\rho)$$

Dans la suite nous continuerons de noter $P = P(z,\partial/\partial z)$ cet opérateur.

Comme pour les opérateurs pseudodifférentiels il y a une notion d'opérateur de Toeplitz elliptique : un tel opérateur est elliptique si son symbole est inversible (exact dans le cas d'un complexe d'opérateurs de Toeplitz). Le calcul des opérateurs de Toeplitz est assez souple pour permettre de faire des déformations et de fabriquer des adjoints. En particulier on peut faire avec ces opérateurs la théorie de Hodge pour un complexe elliptique (qui consiste à remplacer la différentielle D par $D + D^*$ opérant des formes paires vers les formes impaires). Il en résulte, comme pour les systèmes pseudodifférentiels, que l'indice d'un système elliptique d'opérateurs de Toeplitz D ne dépend (additivement) que du fibré virtuel $[D] \in K(\Omega,\partial\Omega)$ défini par son symbole.

c. Nous nous interesserons au cas particulier suivant. Soit X une variété analytique réelle compacte, $\tilde{X}$ une complexification de X . Choisissons sur $\tilde{X}$ une fonction ρ analytique réelle telle que

$$(12) \qquad \rho = 0 \text{ sur } X \ , \quad \rho > 0 \text{ sur } \tilde{X} - X$$

$$\text{le hessien transverse de } \rho \text{ le long de } X \text{ est } \gg 0 \ .$$

La fonction ρ est alors strictement plurisousharmonique au voisinage de X (elle l'est sur X), et quitte à diminuer $\tilde{X}$, on peut supposer que ρ est strictement plurisousharmonique sur $\tilde{X}$ entier , que son bord $\partial\tilde{X}$ est la surface de niveau $\rho = \varepsilon_o$, et que pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_o$ l'ouvert X_ε $(\rho < \varepsilon)$ est un voisinage tubulaire de Stein de X , de bord ∂X_ε strictement pseudoconvexe.

Soit D un complexe d'opérateurs différentiels analytiques sur X . Alors D se prolonge à X_ε pour ε assez petit, et définit ainsi un complexe d'opérateurs de Toeplitz D_ε .(Cette propriété est aussi vraie pour les opérateurs pseudodifférentiels analytiques sur X .)

Si D est elliptique, il en est de même de l'opérateur de Toeplitz D_ε pour ε assez petit : ceci résulte de ce que les limites des directions des covecteurs $-i\, d'\rho$ le long de X sont réelles.

<u>Définition 1</u>.- <u>Nous dirons que</u> D <u>est presque elliptique si l'opérateur de Toeplitz</u> D_ε <u>est elliptique pour</u> $\varepsilon > 0$ <u>assez petit</u>.

Cette propriété ne dépend que du support $\mathrm{Car}(D)$ de D (ensemble des covecteurs où le symbole de D n'est pas exact). On sait que ce support est un sous ensemble analytique complexe conique involutif de $T^*\tilde{X}$. Rappelons que D est dit holonôme si $\mathrm{Car}(D)$ est de dimension (complexe) minimale $\dim X$.

<u>Proposition 1</u>.- <u>Un complexe elliptique est presque elliptique. Un complexe holonôme est presque elliptique</u>.

La première assertion a été démontrée. Montrons la seconde: soit $\Lambda = \mathrm{Car}(D)$; c'est un cône lagrangien (complexe) de $T^*\tilde{X}$, donc la 1-forme de Liouville $\lambda = \Sigma\, \xi_j\, dz_j$ s'y annule. Soit $N \subset T^*\tilde{X}$ la sous variété analytique réelle définie par la section $d'\rho$: sur N on a $d'\rho = \Sigma\, \xi_j\, dz_j$, donc sur $N \cap \Lambda$ on a $d'\rho = 0$, et aussi $d''\rho = 0$ puisque ρ est réelle. Ainsi ρ est localement constante sur $N \cap \Lambda$, donc n'y prend qu'un nombre fini de valeurs puisque tout est analytique: pour ε assez petit, ρ ne peut donc prendre que la valeur 0 sur l'intersection de X_ε et de la projection de $N \cap \Lambda$.

Si D est sous elliptique, les groupes d'homologie $H^j(D_\varepsilon)$ sont de dimension finie pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Un argument de continuité presque standard montre qu'ils ne dépendent de ε et sont donc aussi égaux aux groupes d'homologie $H^j(D)$ (homologie de D opérant sur les sections analytiques réelles sur X).

Il y a encore une notion de presqu'ellipticité pour les complexes d'opérateurs différentiels (ou de Toeplitz) sur un ouvert complexe Ω : un tel complexe D se prolonge en un complexe D_ε sur les ouverts voisins Ω_ε $(\rho < \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Par définition il est presqu'elliptique si D_ε est elliptique pour $\varepsilon > 0$ petit. Dans ce cas on a encore $H^j(D_\varepsilon) = H^j(D, \mathcal{O}(\Omega))$ (homologie de D opérant sur les sections holomorphes au voisinage de $\bar{\Omega}$) , et ces groupes sont de dimension finie.

La définition ci-dessus dépend du choix de ρ . Une variante (indépendante de ce choix) consisterait à exiger la presqu'ellipticité au sens de la première définition pour tous les choix possibles de ρ (satisfaisant à (12)). Cette propriété ne dépend que du cône tangent à Car(D) le long des réels.

§3. $\mathcal{D}$-modules.-

Dans la suite il sera commode d'utiliser le langage des $\mathcal{D}$-modules plutôt que celui des complexes d'opérateurs différentiels.

Soit X une variété analytique réelle ou complexe. Notons $\mathcal{O}_X$, ou $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions analytiques sur X, et $\mathcal{D}_X$, ou $\mathcal{D}$ le faisceau en algèbres filtrées des opérateurs différentiels à coefficients analytiques sur X. On a $\mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}_k$ où $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}$ est le faisceau des opérateurs d'ordre $\leqq k$. En particulier $\mathcal{D}_o = \mathcal{O}$, et $\mathcal{D}$ possède deux structures de $\mathcal{O}$-module $\mathcal{D}_s$ et $\mathcal{D}_r$ ($\mathcal{O}$ opérant à gauche ou à droite). Si E et F sont des fibrés vectoriels sur X (ie. des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres), notons

(13) $\mathcal{D}^E$ le faisceau des opérateurs différentiels de type $E \to E$

${}^F\mathcal{L}^E$ le faisceau des opérateurs différentiels de type $E \to F$

en particulier $\mathcal{L}^E = {}^{\mathcal{O}}\mathcal{L}^E$.

On a un isomorphisme canonique ${}^F\mathcal{L}^E \cong F \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} E^*$, et en particulier $\mathcal{L}^E \cong \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}} E^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(E,\mathcal{D})$. ${}^F\mathcal{L}^E$ est un $(\mathcal{D}^F,\mathcal{D}^E)$-bimodule, localement libre de type fini séparémént sur $\mathcal{D}^F$ ou $\mathcal{D}^E$. En particulier $\mathcal{L}^E$ est un $\mathcal{D}$-module à gauche localement libre. L'application $(P,e) \to P(e)$ de $\mathcal{L}^E \times E$ dans $\mathcal{O}$ donne une identification:

(14) $$E \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}^E,\mathcal{O})$$

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}^E$-module on note $\mathcal{M}_F$ le $\mathcal{D}_F$-module

(15) $$\mathcal{M}_F = {}^F\mathcal{L}^E \otimes_{\mathcal{D}^E} \mathcal{M} \cong L(E,F) \otimes_{L(E)} \mathcal{M}$$

En particulier si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module, $\mathcal{M}^E = {}^E\mathcal{L}^{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M} \cong E \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}^E$-module ($\mathcal{M}$ tordu par E).

Notons Ω_X le faisceau des formes différentielles de degré maximum sur X. L'opération de transposition

(16) $$P \to {}^tP \text{ de } \mathcal{D} \text{ dans } \mathcal{D}^{\Omega}$$

est un isomorphisme de l'algèbre opposée $\mathcal{D}^{o}$ sur $\mathcal{D}^{\Omega}$, et plus généralement fournit un isomorphisme de l'algèbre opposée $(\mathcal{D}^{E})^{o}$ sur $\mathcal{D}^{E^*\otimes\Omega}$.

b. Notons $\mathcal{A} = \mathrm{Gr}\,\mathcal{D}$ le gradué associé à $\mathcal{D}$. C'est une algèbre commutative, isomorphe au faisceau des sections de l'algèbre symétrique STX, ou encore au faisceau des fonctions analytiques sur T^*X polynomiales en la variable verticale.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module. Une bonne filtration sur $\mathcal{M}$ est une filtration croissante $\mathcal{M} = \cup_{j\in Z} \mathcal{M}_j$ telle que

(17) $\mathcal{D}_k \mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}_{j+k}$, avec égalité pour j grand

Pour tout j, $\mathcal{M}_j$ est un $\mathcal{O}$-module cohérent, nul pour j petit.

Un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ possède localement une bonne filtration si et seulement s'il est cohérent en tant que $\mathcal{D}$-module.

Si $\mathcal{M}$ est muni d'une bonne filtration, le symbole $\sigma(\mathcal{M})$ est le $\mathcal{A}$-gradué $\mathrm{Gr}\,\mathcal{M}$. Le support de $\mathcal{M}$ est le support dans T^*X de $\sigma(\mathcal{M})$; c'est un ensemble analytique conique involutif. $\mathcal{M}$ est holonôme si ce support est lagrangien (de dimension minimale dim X).

Si $\mathcal{M}$ est muni d'une bonne filtration, et si par exemple X est projective ou de Stein, il possède une bonne résolution, ie. il existe un complexe de $\mathcal{D}$-modules localement libres filtrés

(18) $$D : 0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow L_o \leftarrow L_1 \leftarrow \cdots \leftarrow L_N \leftarrow 0$$

tel que D soit une résolution de $\mathcal{M}$ et $\sigma(D)$ une résolution de $\sigma(\mathcal{M})$. (En fait D est une résolution de $\mathcal{M}$ si son symbole est une résolution de $\sigma(\mathcal{M})$, et toute résolution de $\sigma(\mathcal{M})$ provient d'une bonne résolution de $\mathcal{M}$.)

Nous dirons envore que $\mathcal{M}$ est elliptique si son support ne contient aucun covecteur réel non nul (lorsque X est réelle). Si $\mathcal{M}$ possède une bonne filtration, cela équivaut à dire que n'importe quelle bonne résolution de $\mathcal{M}$ est elliptique. De même nous dirons que $\mathcal{M}$ est presqu'elliptique si ses bonnes résolutions le sont, ie. si supp $\mathcal{M}$ ne rencontre pas la section d'ρ au dessus de $\tilde{X} - X$, en dehors de X. Supposons X de Stein (par exemple réelle). Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module. On pose $H^j(\mathcal{M}) = \mathrm{Ext}^j(\mathcal{M},\mathcal{O})$, si $\mathcal{M}$ est muni d'une bonne filtration. C'est le j-ième groupe d'homologie du complexe d'opérateurs différentiels fourni par n'importe quelle bonne résolution de $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ est elliptique, les $H^j(\mathcal{M})$ sont de dimension finie et on pose encore

$$(19) \qquad \chi(M) = \sum (-1)^j \dim H^j(M)$$

Si $M^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}$-modules possédant une bonne filtration (ie. la différentielle est de degré 0, et l'homologie du symbole est le symbole de l'homologie), il existe une bonne résolution de $M^\bullet$, ie. un complexe double $L^{\bullet\bullet}$ de $\mathcal{D}$-modules localement libres filtrés dont la différentielle verticale fournisse à la fois une bonne résolution de $M^\bullet$, de ses bords, de ses cycles et de son homologie, et dont la différentielle horizontale produise par passage au quotient celle de $M^\bullet$. On pose alors $H^j(M^\bullet) = H^j(L^{\bullet\bullet})$. Si $M^\bullet$ est localement libre, un argument de suite spectrale montre qu'on a $H^j(M^\bullet) = H^j(D)$, où D est le complexe d'opérateurs différentiels correspondant à $M^\bullet$. Le complexe $L^{\bullet\bullet}$ est elliptique si et seulement si les faisceaux d'homologie $H^j(M^\bullet)$ le sont. Dans ce cas un argument de suite spectrale montre encore qu'on a

$$(20) \qquad \chi(M^\bullet) = \sum (-1)^j \dim H^j(M^\bullet) = \sum (-1)^j \chi(H^j(M^\bullet))$$

§4. Image directe.

a. Soient X et Y deux variétés analytiques réelles, M (resp. N) un $\mathcal{D}_X$-module (resp. $\mathcal{D}_Y$-module. Alors le $\mathcal{D}_{X\times Y}$-module $M \otimes N$ sur $X \times Y$ est bien défini. Son support est $\operatorname{supp} M \times \operatorname{supp} N$.

Proposition 2.- $M \otimes N$ est presqu'elliptique (resp. elliptique) si M et N le sont tous les deux.

La réciproque est vraie si M et N sont non nuls.

En effet notons ρ_X (resp. ρ_Y) la fonction de définition des voisinages tubulaires de X (resp. Y) dans son complexifié, et choisissons $\rho = \rho_X + \rho_Y$ sur $X \times Y$. Si en un point $z = (x,y)$ de $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ voisin de $X \times Y$ on a $d'\rho = (d'\rho_X, d'\rho_Y) \in \operatorname{supp}(M \times N)$, alors $d'\rho_X \in \operatorname{supp} M$, donc x est réel, et de même y est réel, si M et N sont presqu'elliptiques.

Si M et N sont elliptiques, un covecteur réel de $\operatorname{supp}(M \otimes N) = \operatorname{supp} M \times \operatorname{supp} N$ est nul, parceque ses deux composantes sont nulles.

Soit Y une variété analytique réelle (réelle ou complexe) et X une sous variété analytique, i l'inclusion $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$. Notons $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_Y$ l'idéal des fonctions qui s'annulent sur X, et $\mathcal{D}_{XY} \subset \mathcal{D}_Y$ le sous faisceau des opérateurs P

qui préservent l'idéal à gauche $\mathcal{D}_Y \mathcal{I}_X$: $\mathcal{I}_X P \subset \mathcal{D}_Y \mathcal{I}_X$.

Si $X = \mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^p$) , plongé dans $Y = \mathbb{R}^{p+q}$ (ou $\mathbb{C}^{p+q}$) , $\mathcal{D}_{XY}$ est l'ensemble des P de la forme $P_o(x,\partial/\partial x) + Q\, y$.

Par transposition $\mathcal{D}_Y$ opère à droite sur Ω_Y , et $\mathcal{D}_{XY}$ préserve $\mathcal{I}_X \Omega_Y$. L'algèbre quotient $\mathcal{D}_{XY}/\mathcal{D}_Y \mathcal{I}_X$ opère donc à droite sur $\Omega_Y/\mathcal{I}_X\Omega_Y = \Omega_{Y|X}$, et cette opération fournit un isomorphisme de cette algèbre sur l'algèbre opposée à l'algèbre des opérateurs différentiels sur $\Omega_{Y|X}$.

Si N est le fibré tangent normal de i $(N = TY/i(TX))$, on a encore un isomorphisme canonique $\Omega_X \times (\Omega_{Y|X})^* \cong \Lambda^d N$ (d = dim N). Ainsi

$$(21) \qquad \mathcal{D}_{XY} \,/\, \mathcal{D}_Y\, \mathcal{I}_X \;\cong\; \mathcal{D}_X^{\Lambda^d N} \;\cong\; (\,\mathcal{D}_X^{\Omega_{Y|X}})^o$$

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-module , nous poserons

$$(22) \qquad i_! \mathcal{M} \;=\; \mathcal{D}_Y \otimes_{\mathcal{D}_{XY}} \mathcal{M}_{\Lambda^d N}$$

Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}_Y$-module porté par X , et $\mathcal{N}_o \subset \mathcal{N}$ est le faisceau des sections de $\mathcal{N}$ annulées par $\mathcal{I}_X$, $\mathcal{N}_o$ est un $\mathcal{D}_{XY}/\mathcal{D}_Y\mathcal{I}_X$-module , cohérent si $\mathcal{N}$ l'est. Si alors $\mathcal{M}$ désigne le $\mathcal{D}_X$-module obtenu en tordant $\mathcal{N}_o$ par $\Lambda^d N^*$, on voit aisément que $\mathcal{N}$ est isomorphe à $i_! \mathcal{M}$.

<u>Proposition 3</u>.- <u>Si</u> X <u>est réelle et</u> $\mathcal{M}$ <u>presqu'elliptique</u> , $i_!\mathcal{M}$ <u>est presqu'elliptique</u>.

En effet l'assertion est locale. Si $X = \mathbb{R}^p$ plongé dans $Y = \mathbb{R}^{p+q}$, $i_!\mathcal{M}$ est isomorphe au $\mathcal{D}_Y$-module $\mathcal{M} \otimes \delta$, où $\otimes$ est le produit externe, et δ est le $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^q}$-module $\mathcal{D}/\sum_1^q \mathcal{D} y_j$, qui est holonôme. Notre assertion résulte donc de la proposition 2 . Remarquons que $i_!\mathcal{M}$ n'est pas elliptique si $\mathcal{M} \neq 0$ car δ n'est pas elliptique.

<u>Définition</u>.- Nous noterons $\tilde{i}_!$ (image directe décalée) le complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules nul en tout degré, sauf en degré -d (d = codim X), et dont la composante de degré -d est $i_!\mathcal{M}$.

<u>Proposition 4</u>.- <u>Supposons</u> X <u>et</u> Y <u>de Stein, par exemple réelles. On a alors</u> $H^j(\mathcal{M}) = H^j(\tilde{i}_!\mathcal{M})$. <u>En particulier si</u> $\mathcal{M}$ <u>est presqu'elliptique</u> $\mathcal{M}$ <u>et</u> $\tilde{i}_!\mathcal{M}$ <u>ont même indice</u>.

Remarquons d'abord que, parceque $\tilde{i}_!\mathcal{M}$ est porté par X, on a $H^j(\tilde{i}_!\mathcal{M}) = H^j(\tilde{i}_!\mathcal{M}_{|U})$ pour tout voisinage ouvert U de X dans Y. Choisissant pour U un voisinage de Stein tubulaire, on se ramène ainsi au cas où Y est un fibré vectoriel sur X et $i : X \to Y$ est la section nulle. Notons $p : Y \to X$ la projection, N le fibré vectoriel sur Y image inverse de Y (en tant que fibré sur X), ou son complexifié dans le cas réel, et s la section canonique de N : $s(y) = p^*(y) \in N_y$. Notons k le complexe "multiplication extérieure par s" :

$$(23) \qquad k \ : \ 0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{s} N \to \Lambda^2 N \to \ \ldots \to \Lambda^d N \to 0$$

Soit d

$$(24) \qquad d \ : \ 0 \to \ldots \ E_q \to E_{q+1} \to \ldots \to 0$$

le complexe d'opérateurs différentiels correspondant à une bonne résolution de $\mathcal{M}$. Il existe un complexe bigradué fournissant une bonne résolution de $i_!\mathcal{M}$:

$$(25) \qquad \begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \\ \ldots & \to & E_{p,q} & \to & E_{p,q+1} \to \ldots \\ & & \downarrow & \nearrow & \\ & & E_{p+1,q} & \to & \ldots \\ & & \vdots & & \\ & & \downarrow & \nearrow & \\ \ldots & \to & E_{o,q} & \to & \ldots \end{array}$$

tel que le complexe correspondant d'opérateurs différentiels (25) ait les propriétés suivantes: on a $E_{p,q} = \Lambda^{-p}N^* \otimes E_q$ $(-\dim N \leqq p \leqq 0)$. La différentielle D est somme de ses composantes bihomogènes :

$$D = \sum_{j \geqq 0} D_{1-j,j}$$

avec $D_{1,0} = k^*$ (produit intérieur par s), $D_{0,1} = d \bmod. I_X$ sur $\sum E_{0,q}$.

Comme $D_{0,1}$ est exact sauf en degré $(0,.)$, où son homologie est exactement $E^{\cdot}_{|X}$, la flèche canonique $H^p(D) \to H^p(d)$ est bijective (la suite spectrale est dégénérée) et la proposition est démontrée.

§5. Problèmes aux limites .

Il ne s'agira ici que d'un cas particulier. Soit X une variété analytique réelle, $\Omega \subset X$ un ouvert relativement compact, sous-variété à bord de X, de bord analytique $\partial\Omega$. On supposera Ω défini globalement par une inégalité :

(26) $u < 0$, avec $u \in \mathcal{O}(X)$ réelle, $du \neq 0$ sur $\partial\Omega$.

Soit M un $\mathcal{D}$-module (ou un complexe d'opérateurs différentiels) défini au voisinage de $\bar{\Omega}$. Nous dirons que M est elliptique sur $\bar{\Omega}$ si

(27) (i) M est elliptique au voisinage de $\bar{\Omega}$.
(ii) M est non caractéristique sur $\partial\Omega$, et le $\mathcal{D}_{\partial\Omega}$-module induit $M_{\partial\Omega} = M/uM$ est elliptique.

De façon équivalente: M est elliptique s'il n'existe pas de covecteur réel caractéristique non nul au voisinage de $\bar{\Omega}$, ni sur $\partial\Omega$ de covecteur caractéristique complexe de la forme $du + i\xi$, avec ξ réel.

Soit $\tilde{X}$ une complexification de X , ρ une fonction comme dans 2.c (12) . Notons $\Omega_\varepsilon \subset X$ l'ouvert défini par l'inégalité

(28) $\varepsilon\tilde{u} + \rho < 0$

où ε est un nombre réel > 0 , $\tilde{u}$ un prolongement réel de u (par exemple la partie réelle de son prolongement holomorphe). Ω_ε est strictement pseudo-convexe pour ε petit, et l'ellipticité implique que le prolongement $\tilde{M}$ de M à $\tilde{X}$ est elliptique sur Ω_ε pour ε petit.

<u>Définition 4</u>.- <u>Nous dirons que</u> M <u>est presqu'elliptique si</u> $\tilde{M}$ <u>est elliptique sur</u> Ω_ε <u>pour</u> $\varepsilon > 0$ <u>assez petit</u>.

Lorsqu'il en est ainsi les groupes $H^j(M,\bar{\Omega})$ sont encore de dimension finie et l'indice de M dans $\bar{\Omega}$ est bien défini.

<u>Exemple 1</u>.- Si $\partial\Omega$ est vide on retrouve la notion usuelle d'ellipticité.

<u>Exemple 2</u>.- Supposons X complexe, et $\Omega \subset X$ comme dans 2.1 . Soit X_R la variété réelle sous jacente, et $I \subset \mathcal{D}_{X_R}$ l'idéal engendré par les champs de vecteurs anti-holomorphes : on a $\mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}_{X_R}$, et $I\mathcal{D}_X \subset I$, de sorte que $\mathcal{D}_X/I$ est aussi un $\mathcal{D}_X$-module à droite.

Si M est un $\mathcal{D}_X$-module, on lui associe le $\mathcal{D}_{X_R}$-module

(29) $M_R = (\mathcal{D}_{X_R}/I) \otimes_{\mathcal{D}_X} M$

Si D est un complexe d'opérateurs différentiels correspondant à M , le complexe correspondant à M_R est $D \otimes d''$.

Si M est elliptique sur $\bar{\Omega}$, ie. si $\partial\Omega$ est non caractéristique, alors M_R est elliptique sur $\bar{\Omega}_R$ au sens de (27). En effet M_R est elliptique dans X_R car d'' l'est déjà. D'autre part si sur $\partial\Omega$ un covecteur $du+i\xi''$ est caractéristique, avec ξ réel, on a $d''u+i\xi''=0$, donc $d'u-i\xi'=0$, d'où comme $d'u+i\xi' \in \operatorname{supp} M$, $2d'u \in \operatorname{supp} M$ ce qui contredit l'hypothèse. En raisonnant comme plus haut, on obtient :

Proposition 5.- Avec les notations ci-dessus on a $\operatorname{Ext}^j(M, \mathcal{O}_X) = \operatorname{Ext}^j(M_R, \mathcal{O}_{X_R})$; en particulier $\chi_{\bar{\Omega}}(M) = \chi_{\bar{\Omega}_R}(M_R)$ si M est presqu'elliptique sur $\bar{\Omega}$.

Supposons maintenant X plongée dans Y , et $\Omega = X \cap B$, $\partial\Omega = X \cap \partial B$ (intersection transverse), où $B \subset Y$ est bornée, de bord analytique

Proposition 6.- Si M est presqu'elliptique sur Ω , $i_! M$ est presqu'elliptique sur B .

En effet on peut choisir les fonctions u_B sur Y , ρ_Y sur $\tilde{Y}$ de façon qu'elles prolongent celles de X . Il s'agit de montrer que, pour ε petit, $d(\varepsilon u_B+\rho_Y)$ n'appartient pas à $\operatorname{supp} i_! M$: or $i_! M$ est porté par X et sur X on a $\operatorname{supp} i_! M = \operatorname{supp} M + N^*$. Si on avait $d(\varepsilon u_B+\rho_Y) \in \operatorname{supp} i_! M$, on aurait par restriction $d(\varepsilon u_B+\rho_Y)_{|X} = d_X(\varepsilon u+\rho) \in \operatorname{supp} M$.

§6. Formule de l'indice.

a. K-théorie.

Soit X un espace localement compact, par exemple une variété analytique réelle ou complexe. Si Y est une partie assez régulière de X (par exemple un sous-espace analytique fermé, ou le complémentaire d'un tel sous-espace), le groupe $K(X,Y)$ (resp. $K_c(X,Y)$) est le groupe (en fait anneau commutatif) des classes d'homotopie de complexes finis de fibrés vectoriels complexes exacts sur Y (resp. et en dehors d'un compact de X). Il ne dépend que du germe de X au voisinage de $\overline{X-Y}$.

Si X est une variété analytique complexe, M un $\mathcal{O}_X$-module de support $Z \subset X$, $0 \leftarrow M \leftarrow L^\cdot$ une résolution localement libre de rang fini de M , alors $L^\cdot$ est un complexe de fibrés vectoriels sur X , exact en dehors de Z . Il définit un élément de $K(X,X-Z)$ que nous noterons $[M]_Z$ (cet élément ne dépend que de M , et pas du choix de la résolution $L^\cdot$). Par exemple si Z est une sous-variété de

X , il lui correspond l'élément $[\mathcal{O}_Z]_Z \in K(X,X-Z)$.

Si Y est une partie fermée de X , on a une application produit

$$(30) \qquad K_c(Y) \otimes K(X,X-Y) \to K_c(X,X-Y)$$

(Si $\xi \in K(Y)$, ξ possède un prolongement $\tilde{\xi} \in K(U)$ si U est un voisinage assez petit de Y . Alors pour $\eta \in K(X,X-Y)$ le produit $\xi.\eta$ est la classe de $\xi \otimes \eta \in K_c(U,U-Y) = K_c(X,X-Y)$.) De même il y a un produit $K(Y) \otimes K(X,X-Y) \to K(X,X-Y)$.

Si X et Y sont des variétés complexes , et $i : X \to Y$ est un plongement, on notera

$$(31) \qquad k_i \ : \ K_c(X) \to K_c(Y)$$

l'homomorphisme tel que pour $\xi \in K_c(X)$, $k_i(\xi)$ soit l'image dans $K_c(Y)$ (par oubli de $i(X)$) du produit $\xi.[\mathcal{O}_X]_{i(X)} \in K_c(Y,Y-i(X))$. Si Y est un fibré vectoriel sur X , $i : X \to Y$ la section nulle , k_i est l'isomorphisme de Bott.

b. Formule de l'indice.

Soit X une variété réelle , $\tilde{X}$ sa complexifiée, $\Omega \subset X$ un ouvert de bord analytique comme dans §5 , M un $\mathcal{D}$-module presqu'elliptique sur Ω , possédant une bonne filtration. Alors le symbole de n'importe quelle bonne résolution de M fournit un élément

$$(32) \qquad [M] \in K_c(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega_\varepsilon) = K_c(\tilde{X},\tilde{X}-\Omega)$$

pour ε assez petit (Ω_ε étant défini comme au §5 , ou au §2 si $\partial\Omega = \emptyset$).

Si $i : X \to Y$ est un plongement , et B un ouvert de bord analytique tel que $\Omega = X \cap B$, $\partial\Omega = X \cap \partial B$ (comme au §5) , il résulte aussitôt de la description faite au §4 de la résolution de $i_! M$ au moyen du complexe de Koszul qu'on a

$$(33) \qquad [\tilde{i}_! M] = k_i[M]$$

Si X est une variété complexe, $\Omega \subset X$ un ouvert de bord analytique, M un $\mathcal{D}$-module elliptique sur $\partial\Omega$, le symbole d'une résolution de M évalué en $d\rho$ (où ρ est une fonction de définition de Ω) fournit encore un élément

$$(32)\text{bis} \qquad [M]^C \in K(\Omega,\partial\Omega) \ .$$

Dans ce cas le module M_R produit aussi un élément $[M_R] \in K(B,\partial B)$, où B

est un voisinage de $i(\Omega)$ dans $\tilde{\Omega} = \Omega \otimes \bar{\Omega}$ $(i(x) = (x,\bar{x}))$. La diagonale $i(\Omega)$ possède un voisinage tubulaire à fibre vectorielle complexe, isomorphe à $\overline{T\Omega}$, de sorte que $k_i : K(\Omega,\partial\Omega) \to K(B,\partial B)$ est encore bien défini. On vérifie aussitôt qu'on a encore dans ce cas

$$(34) \qquad [M_R] = k_i[M]^C$$

(les symboles du complexe de Dolbeault d'', et du complexe de Koszul, sont homotopes). Si $X = \{0\}$, les $\mathcal{D}_X$-modules sont les espaces vectoriels de dimension finie. On a $K(X) = \mathbb{Z}$ et pour tout $\mathcal{D}$-module M, $\chi(M) = [M] = \dim_{\mathbb{C}} M$. Si i_n est le plongement canonique $\{0\} \to \mathbb{R}^n$, on sait que k_{i_n} est un isomorphisme (isomorphisme de Bott) :

$$(35) \qquad k_{i_n} : K(\text{point}) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} K_c(\mathbb{C}^n) .$$

On a aussi $K_c(\mathbb{C}^n) \cong Z \cong K(B,\partial B)$ si B est une boule de $\mathbb{C}^n$.

Si X est une variété réelle, Ω un ouvert borné de bord analytique, il existe un plongement $i : X \to R^n$ tel que $\Omega = X \cap B$ où B est une boule de R^n. Si alors M est un $\mathcal{D}_X$-module presqu'elliptique sur Ω on a $\chi(M) = \chi(i_! M) = k_{i_n}^{-1} k_i([M])$.

Si Ω est une variété presque complexe, le caractère

$$(36) \qquad \chi_{top} : K_c(\Omega) \to \mathbb{Z}$$

est défini par les conditions

$$(37) \qquad \chi_{top}(k_i\xi) = \chi_{top}(\xi) \quad \text{si } i \text{ est un plongement presque complexe}$$

$$\chi_{top} : K(\text{point}) \to \mathbb{Z} \text{ est l'identité.}$$

La formule de l'indice s'écrit alors

$$(38) \qquad \chi(M) = \chi_{top}([M])$$

sous les hypothèses ci-dessus; ou lorsque Ω est ouvert pseudoconvexe borné de frontière assez régulière d'une variété complexe X et M un $\mathcal{D}_X$-module elliptique sur $\partial\Omega$:

$$(38)\text{bis} \qquad \chi(M) = \chi_{top}([M]^C) \quad .$$

Ces formules contiennent la formule d'Atiyah et Singer, et lorsqu'on les applique à $M_{\mathbb{R}}$, M complexe, la formule de Riemann-Roch. Nous ne rappellerons pas ici comment on en déduit les formules cohomologiques (4).

Bibliographie .

[1] M.F.Atiyah. K-Theory. Benjamin (Amsterdam) 1967

[2] M.F.Atiyah, I.Singer. The index of elliptic operators. Ann. Math. 87 (1968) 489-530.

[3] L.Boutet de Monvel. The index of Toeplitz operators.. Inventiones Math. 50 (1979) 249-272.

[4] A.Grothendieck. S.G.A.5

[6] M.Kashiwara, T.Kawai, M.Sato. Microfunctions and pseudodifferential equations. Lecture Notes 287 , Chap. II . Springer-Verlag (1973).

[7] M.Kashiwara. Analyse microlocale du noyau de Bergman. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77 , exp. n°8 .

[8] B.Malgrange. Séminaire sur les opérateurs différentiels et pseudo-différentiels . Grenoble 1975-76.

L.BOUTET DE MONVEL

Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques
45 rue d'Ulm
75005 Paris Cedex 05, France