

Astérisque

AST

Pages préliminaires

Astérisque, tome 118 (1984), p. 1-12

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__118__1_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1984__118__1_0)

© Société mathématique de France, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

118

ASTÉRISQUE

1984

**VARIATIONAL METHODS
FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS
OF FLUIDS**

Trento, 20-25 juin 1983

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

The present issue of "Asterisque" contains the texts of the lectures and talks delivered at the meeting on "Variational methods for equilibrium problems of fluids" held in Trento (Italy) from June 20 to 25, 1983, as one of the activities of the "Centro Internazionale per la Ricerca Matematica" of the "Istituto Trentino di Cultura".

It was the aim of the organizers of the meeting to bring together researchers from analysis, geometry, numerical analysis, and experimental physics. There were 53 participants from ten countries; a list of their names and addresses will be found at the beginning of the volume.

We would like to thank everyone who contributed to the success of the meeting. In particular, we are most grateful to Mario Miranda for his invaluable assistance; special thanks are due to Augusto Micheletti for his help in running the conference, and for his wonderful job in the typing of all the manuscripts.

December 1983

Eduardo H.A. Gonzalez - Italo Tamanini

CONTENTS

List of participants	5
Abstracts	7
F.J. Almgren, B. Super - Multiple valued functions in the geometric calculus of variations	13
E. Barozzi, E.H.A. Gonzalez - Least area problems with a volume constraint ..	33
A. Friedman - Free boundary problems in fluid dynamics	55
S. Hildebrandt - Minimal surfaces with free boundaries and related problems .	69
H.W. Alt, E. Di Benedetto - Flow of oil and water through porous media	89
C. Bandle, J. Mossino - Application du rearrangement a une inequation variationnelle	109
J. Bemelmans - Free boundary problems for the Navier-Stokes equations	115
M.S. Berger - Variational principles for equilibrium figures of fluids with- out symmetry assumptions	125
J.-T. Chen - Uniqueness of minimal point and its location of capillary free surfaces over convex domain	137
G. Congedo, M. Emmer - Equilibrium configurations of rotating liquid masses .	145
R. Finn - The influence of boundary geometry on capillary surfaces without gravity	157
R. Gulliver - Tori of prescribed mean curvature and the rotating drop	167
G.H. Joffre - Calcul par une methode de Ritz de la forme de menisques electrises	181
N. Korevaar - The normal variations technique for studying the shape of capillary surfaces	189
U. Massari - The parametric problem of capillarity: the case of two and three fluids	197
D. Phillips - The free boundary of a semilinear elliptic equation	205
J.-F. Rodrigues - On the stability of the obstacle Plateau problem on locally pseudoconvex domains	211

VARIATIONAL METHODS FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS OF FLUIDS

J. Ross, F. Brulois - The stability of axisymmetric rotating drops	219
L.-F. Tam - The behavior of capillary surfaces when gravity goes to zero	227
I. Tamanini - On the sphericity of liquid droplets	235
J.E. Taylor - Is there gravity-induced facetting of crystals?	243
M. Tassarotto - Variational formulation for the Fokker-Planck kinetic equation in equilibrium problems	255
T.G. Wang, E. Trinh - Study of drop oscillation and rotation in immiscible liquid systems	267

LIST OF PARTICIPANTS

1. Ibrahim AGANOVIC (Dept. of Math., Univ. of Zagreb, Yugoslavia)
2. Frederick J. ALMGREN, Jr. (Dept. of Math., Princeton Univ., USA)
3. Hans Wilhelm ALT (Inst. für Angew. Mathem., Univ. Bonn, W. Germany)
4. René AMIEL (Mathematiques, Univ. de Nice, France)
5. Gabriele ANZELLOTTI (Dip. Matem., Univ. Trento, Italy)
6. Joannis ATHANOSOPOULOS (Dept. of Math., Univ. of Kentucky, Lexington, USA)
7. Lorenzo BARONE (Dip. Matem., Univ. Lecce, Italy)
8. Elisabetta BAROZZI (Dip. Matem., Univ. Trento, Italy)
9. Josef BEMELMANS (Mathem. Inst., Univ. Bonn, W. Germany)
10. Melvyn S. BERGER (Dept. of Math., Univ. of Massachusetts, Amherst, USA)
11. Paolo BOIERI (Dip. Matem., Politecnico di Torino, Italy)
12. Frederic BRULOIS (Dept. of Math., San Diego Univ., USA)
13. Luis A. CAFFARELLI (School of Math., Univ. of Minnesota, Minneapolis, USA)
14. Jin-Tzu CHEN (Dept. of Math., Nat. Taiwan Univ., Taipei, Taiwan, China)
15. Paul CONCUS (Lawrence Berkeley Lab., Univ. of California, Berkeley, USA)
16. Giuseppe CONGEDO (Dip. Matem., Univ. Lecce, Italy)
17. Michele EMMER (Dip. Matem. "G. Castelnuovo", Univ. Roma I, Italy)
18. Fernando FEDELE (Dip. Matem., Univ. Lecce, Italy)
19. Robert FINN (Dept. of Math., Stanford Univ., USA)
20. Giovanni FIORITO (Dip. Matem., Univ. Catania, Italy)
21. Avner FRIEDMAN (Dept. of Math., Northwestern Univ., Evanston, USA)
22. Fabio GASTALDI (Dip. Matem., Univ. Pavia, Italy)
23. Claus GERHARDT (Inst. für Angew. Math., Univ. Heidelberg, W. Germany)
24. Eduardo H.A. GONZALEZ (Dip. Matem., Univ. Lecce, Italy)
25. Michael GRÜTER (Mathem. Inst., Univ. Düsseldorf, W. Germany)
26. Robert GULLIVER (School of Math., Univ. of Minnesota, Minneapolis, USA)
27. Stefan HILDEBRANDT (Mathem. Inst., Univ. Bonn, W. Germany)
28. Nicholas KOREVAAR (Dept. of Math., Univ. of Kentucky, Lexington, USA)
29. Henri-Gilles JOFFRE (Laboratoire d'Aérodynamique, Meudon, France)
30. Umberto MASSARI (Dip. Matem., Univ. Ferrara, Italy)
31. Mario MIRANDA (Dip. Matem., Univ. Trento, Italy)
32. Luciano MODICA (Dip. Matem., Univ. Pisa, Italy)
33. Roberto MORIYON (Matemáticas, Univ. de Madrid, Spain)
34. Jacqueline MOSSINO (Mathématiques, Univ. de Orsay, France)
35. Daniel PHILLIPS (Dept. of Math., Purdue Univ., West Lafayette, USA)

36. Paola PIETRA (Dip. Matem., Univ. Pavia, Italy)
37. Gianni A. POZZI (Dip. Matem., Univ. Pavia, Italy)
38. José-Francisco RODRIGUES (Centro de Matemática, Lisboa, Portugal)
39. James E. ROSS (Dept. of Math., San Diego State Univ., USA)
40. Raoul SERAPIONI (Dip. Matem., Univ. Trento, Italy)
41. Joel SPRUCK (Dept. of Math., The City Univ. of New York, Brooklyn, USA)
42. Klaus STEFFEN (Mathem. Inst., Univ. Düsseldorf, W. Germany)
43. Brian STRAUGHAN (Dept. of Math., Glasgow Univ., Scotland)
44. Luen-Fai TAM (Dept. of Math., Stanford Univ., USA)
45. Italo TAMANINI (Dip. Matem., Univ. Trento, Italy)
46. Jean E. TAYLOR (Dept. of Math., Rutgers Univ., New Brunswick, USA)
47. Massimo TESSAROTTO (Ist. di Meccanica, Univ. Trieste, Italy)
48. Ermanna TOMAINI (Dip. Matem., Univ. Ferrara, Italy)
49. Alberto VALLI (Dip. Matem., Univ. Trento, Italy)
50. Laercio L. VENDITE (Dept. of Math., Univ. of Campinas, San Paulo, Brasil)
51. Taylor G. WANG (Jet Prop. Lab., California Inst. of Techn., Pasadena, USA)
52. Brian C. WHITE (Dept. of Math., Courant Inst., New York Univ., USA)
53. William P. ZIEMER (Dept. of Math., Indiana Univ., Bloomington, USA)

ABSTRACTS

F.J. ALMGREN, B. SUPER - Multiple valued functions in the geometric calculus of variations.

Les fonctions multivoques constituent un outil de l'analyse géométrique qui facilite l'utilisation des techniques de l'analyse fonctionnelle pour l'étude des surfaces ayant éventuellement des structures topologiques élaborées ou des singularités. Nous discutons de telles applications, incluant des résultats numériques obtenus par computer, spécialement pour les surfaces apparaissant en calcul géométrique des variations.

E. BAROZZI, E.H.A. GONZALEZ - Least area problems with a volume constraint.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Le problème P_v avec la contrainte de volume v consiste en minimisation de la surface de $\Omega \cap \partial E$, pour E satisfait à $H_n(E) = v$ et à une condition de type Dirichlet sur $\partial\Omega$.

Nous présentons ici une méthode itérative laquelle, accompagnée d'une propriété générale d'ensembles à périmètre fini, permet de démontrer l'existence des boules intérieures et extérieures aux minima de P_v , $0 < v < H_n(\Omega)$, ayant les rayons uniformes (en v) sur des compacts de $(0, H_n(\Omega))$. En se servant de l'existence de telles boules, on démontre soit un théorème de régularité optimale pour les solutions (pour $H_n(\Omega)$ fini ou infini), soit la possibilité de l'élimination de la contrainte de volume par l'intermédiaire d'une pénalisation convenable. La méthode se révèle utile aussi dans des problèmes de capillarité et dans l'étude des fluides en rotation (voir la conférence de G. Congedo et M. Emmer dans ce volume).

A. FRIEDMAN - Free boundary problems in fluid dynamics.

Dans la première partie on considère des problèmes de "jet" et "cavity flows". En utilisant des techniques variationnelles on peut résoudre ces problèmes dans des conditions très générales.

Dans la deuxième partie on considère le cas de deux liquides non miscibles. On donne aussi des indications sur l'application des méthodes au cas des digues avec deux liquides.

S. HILDEBRANDT - Minimal surfaces with free boundaries and related problems.

On considère des surfaces minimales X bornées par des courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, et supportant des surfaces $S_1, S_2, \dots$ stationnaires par rapport à une configuration donnée. On prouve que si X est d'aire finie, alors elle est régulière jusqu'à la frontière libre, dans le cas où $S_1, S_2, \dots$ soient suffisamment régulières. Si ∂S n'est pas vide alors la régularité optimale

est $C^{1,1/2}$ (resultat obtenu en collaboration avec M. Grüter et J.C.C. Nitsche).

H.W. ALT, E. DI BENEDETTO - Flow of oil and water through porous media.

On considère le flux de deux fluides non miscibles à travers un milieu poreux, qui est représenté par un système d'équations elliptiques-paraboliques dégénéré avec des conditions mixtes Dirichlet-Neumann et Signorini sur la frontière laterale. On prouve l'existence d'une solution faible et la continuité de la saturation des fluides.

C. BANDLE, J. MOSSINO - Application du rearrangement a une inequation variationnelle.

We establish some isoperimetric inequalities for the solution of an obstacle problem, when the coincidence set reaches the boundary. Particularly we get an optimal lower bound for the measure of the coincidence set.

J. BEMELMANS - Free boundary problems for the Navier-Stokes equations.

Nous étudions l'existence et la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes dans les domaines dont les frontières libres sont déterminées par la tension superficielle.

M.S. BERGER - Variational principles for equilibrium figures of fluids without symmetry assumptions.

On discute quatre cas de figures d'équilibre pour des masses fluides. Certains d'eux peuvent être traités sans hypothèses de symetrie.

J.-T. CHEN - Uniqueness of minimal point and its location of capillary free surfaces over convex domain.

Dans ce travail nous démontrons qu'il n'y a qu'un point minimal de la surface capillaire libre, soit dans le cas avec gravité soit dans le cas sans gravité, pour tout angle de contact $\gamma > 0$ si la région definie est convexe. La localisation du point minimal a été évalué quand $\gamma = 0$.

G. CONGEDO, M. EMMER - Equilibrium configurations of rotating liquid masses.

On a considéré deux problèmes par rapport à des masses de liquides en rotation; le premier naît, par exemple, dans la contruction des verres de contact, pendant que le second est lié à problèmes d'astrophysique. Les deux problèmes ont été abordés avec des méthodes variationnelles,

ABSTRACTS

utilisant la théorie des périmètres.

R. FINN - The influence of boundary geometry on capillary surfaces without gravity.

Il s'agit de trouver des conditions, pour l'existence ou pour la nonexistence d'une surface capillaire couvrant la base d'un tube cylindrique, dans l'absence de force gravitationnelle. Cette question se laisse réduire à un problème capillaire subsidiaire en une dimension de moins, pour lequel la nonexistence de solution implique l'existence pour le problème original. Avec quelques conditions supplémentaires, un critère suffisant peut être donné explicitement. Quelques résultats associés sont également établis.

R. GULLIVER - Tori of prescribed mean curvature and the rotating drop.

Le but de ce travail est de construire et d'étudier une famille de surfaces de révolution du type du tore, ayant la courbure méridienne $r^2 + \text{const.}$, où r est la distance de l'axe. Ces tores sont les solutions équilibrées du problème physique, étudié pour la première fois en 1843 par J. Plateau, d'une goutte d'huile mise en rotation uniforme dans une masse d'eau. Après le réglage de l'échelle linéaire, le volume prescrit du tore a une valeur arbitraire positive qui est plus petite que $\text{const.}/\omega^2$, ω étant la vitesse de rotation.

G.H. JOFFRE - Calcul par une méthode de Ritz de la forme de ménisques électrisés.

Profiles of rounded shaped stable menisci at the free end of a capillary tube fed with liquid and raised to an electric potential are calculated without simplifying assumptions. The Laplace equation for electric potential is solved using series; a Ritz method is used to deal with the equation of energy balance.

The present results are compared with others, we previously obtained from a finite difference method and from experiments. It appears that the first order Ritz method is much faster, but less accurate. In the case of the second order Ritz method, the time required for the calculation as well as the results are analogous to those obtained with the finite difference method. When the meniscus is raised to a potential higher than the limit of stability, experiments show that it may suddenly take the shape of a cone and emit fine charged droplets. The variational method is probably more convenient to deal with such pointed shapes, than the finite difference method in which it is difficult to geometrically depict the apex of the cone with a good accuracy.

N. KOREVAAR - The normal variations technique for studying the shape of capillary surfaces.

On décrit une nouvelle technique pour l'étude du gradient de surfaces non-paramétrisées que l'on rencontre dans les problèmes capillaires. On perturbe la surface originale dans la direction des normales et on utilise le principe de comparaison pour courbure moyenne et angles de contact entre un relèvement de la surface perturbée et la surface originale. On obtient des démonstrations simples pour une série de résultats qui concerne les bornes du gradient pour les problèmes de capillarité et les problèmes de courbure moyenne fixe. On obtient aussi certaines propriétés pour les surfaces capillaires.

U. MASSARI - The parametric problem of capillarity: the case of two and three fluids.

On étudie le problème de l'équilibre de 2 ou 3 liquides contenus dans un récipient et sujets à la tension superficielle et à la force de gravité. On établit quelques conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de minima du fonctionnel de l'énergie.

D. PHILLIPS - The free boundary of a semilinear elliptic equation.

On considère le problème de Dirichlet $\Delta u = \lambda f(u)$ dans un domaine Ω , $u = 1$ dans $\partial\Omega$. On suppose $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$, $f(t) > 0$ pour $t > 0$, $f(t) \sim t^p$ quand $t \downarrow 0$, $0 < p < 1$; on ne suppose pas, en général, que $f(t)$ soit monotone. L'ensemble $\{u=0\}$ et "la frontière libre" $\partial\{u=0\}$ sont étudiés. Des estimations asymptotiques précisées sont établies pour $\lambda \rightarrow \infty$. Pour des fonctions f convenables, et sous l'hypothèse que Ω soit convexe et de dimension deux, on montre que l'ensemble $\{u=0\}$ est convexe.

J.-F. RODRIGUES - On the stability of the obstacle Plateau problem on locally pseudoconvex domains.

Dans cette note, on considère la variation continue de la solution du problème de Plateau avec un obstacle lipschitzien, et de la surface de coïncidence, dans une famille de domaines localement pseudo-convexes.

J. ROSS, F. BRULOIS - The stability of axisymmetric rotating drops.

Le problème variationnel correspondant à une goutte de liquide en

ABSTRACTS

rotation à vitesse angulaire fixe admet - ainsi qu'il est aisé de le montrer un équilibre à symétrie axiale pour chaque valeur assez petite de la vitesse angulaire. Albano et Gonzalez ont montré qu'un minimum relatif de la fonctionnelle d'énergie existe si la vitesse angulaire est assez petite. D'autre part, Brown et Scriven ont montré, par l'analyse numérique, que les équilibres à symétrie axiale sont stables, tant que la vitesse angulaire reste inférieure à la valeur critique, où se produit la bifurcation d'une famille d'équilibres à deux lobes. Nous faisons une étude analytique de la stabilité par rapport aux perturbations qui conservent l'aire des sections horizontales (si l'on prend l'axe de rotation comme direction verticale). Ces perturbations se trouvent être orthogonales - en un certain sens - aux perturbations à symétrie axiale. Nous obtenons des conditions suffisantes de stabilité par rapport à ces perturbations. Les résultats sont comparés avec ceux de Chandrasekhar , Brown et Scriven.

L.-F. TAM - The behavior of capillary surfaces when gravity goes to zero.

Nous étudions le comportement des surfaces capillaires lorsque la gravité tend vers zéro. Siegel a considéré le cas d'une surface dont le domaine est régulier et l'angle de contact strictement positif, avec l'hypothèse que la surface capillaire sans gravité existe. Nous considérons ici le cas d'un domaine régulier par morceaux et celui d'un angle de contact nul. Nous discutons également le cas où la solution du problème sans gravité n'existe pas.

I. TAMANINI - On the sphericity of liquid droplets.

Nous utilisons des méthodes de la théorie des surfaces presque minimales dans $\mathbb{R}^n$ pour fournir une démonstration du fait, que la forme de la surface libre d'une goutte de volume V , posée sur une surface d'appui donnée, assujettie aux forces extérieures, est sphérique, asymptotiquement, lorsque V tend vers zéro. Cette approche englobe les cas des surfaces d'appui à graphe lisse, pas nécessairement horizontales, avec l'angle de contact continue.

J.E. TAYLOR - Is there gravity-induced facetting of crystals?

On donne des exemples de fonctions de tension superficielle cristalline F pour les quelles le "gravity-induced facetting" est impossible en même temps qu'il est nécessaire pour les solutions convexes du problème de

minimization de l'énergie superficielle totale et de l'énergie gravitationnelle, dans la famille des ensembles de volume fixé et contenus dans le demi-espace supérieur. Une équation du type de Euler-Lagrange est aussi dérivée pour les parties de telles solutions ayant directions normales non-cristallines.

M. TESSAROTTO - Variational formulation for the Fokker-Planck kinetic equation in equilibrium problems.

On discute une formulation variationnelle pour l'équation de dérive Fokker-Planck, qui décrit la dynamique d'un magnétoplasma plongé dans une configuration avec équilibre hydromagnétique toroidal à symétrie axiale et sujet à la soi-disante "organisation néo-classique". Une telle formulation variationnelle, applicable aux magnétoplasmas avec "collisionabilité arbitraire", est donnée dans une forme utile à l'introduction d'une méthode de solution, analogue à la méthode directe de Raileigh-Ritz, basée sur un développement en polynômes orthogonaux.

T.G. WANG, E. TRINH - Study of drop oscillation and rotation in immiscible liquid systems.

Des données expérimentales concernant la dynamique des oscillations, la statique des formes de rotation, et l'interdépendence des oscillations sur la rotation des corps liquides librement suspendus dans un liquide immiscible ont été obtenues grâce à la technique de la lévitation acoustique. Les fréquences de résonance pour les oscillations de forme, le coefficient de dissipation, les formes induites par la rotation, et enfin l'effet de la rotation sur la dynamique des oscillations ont été mesurés quantitativement.