Astérisque

BERNARD LASCAR
JOHANNES SJÖSTRAND

Équation de Schrödinger et propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques réelles de multiplicité variable

Astérisque, tome 95 (1982), p. 167-207
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1982__95__167_0>

équation de Schrödinger et propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques réelles de multiplicité variable

Bernard LASCAR - Johannes SJÖSTRAND

Cet article est consacré à la propagation des singularités et à la construction de solutions asymptotiques pour des équations pseudo-différentielles à caractéristiques réelles de multiplicité variable. La méthode consiste à construire une paramétrixe de l'équation $Pu = f$ en superposant des solutions de l'équation de Schrödinger $(D_t + P)\, u = 0$. Comme le flot hamiltonien de p (symbole principal de P) admet un ensemble $N = \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0 \ , \ H_p(x,\xi) = 0\}$ de points fixes, il est nécessaire d'étudier le comportement asymptotiques pour $t \to \infty$ de telles solutions. On se placera dans le cas où en tout point de N la matrice fondamentale $F_p(x,\xi)$ n'a pas de valeur propre réelle (lorsque p est hyperbolique par rapport à une direction, ces équations sont nommées non effectivement hyperboliques [3] et [4]), il n'y a pas alors de points limites sur les bicaractéristiques de p mais les bicaractéristiques nulles ou non de p ont pour limites des courbes qui remplissent certains sous-ensembles de N sur lesquels doit se faire la propagation des singularités - c'est le phénomène de la réfraction conique - on renvoit à [4] et [6] pour des cas hyperboliques. L'analyse de l'équation de Schrödinger pour $t \to \infty$ donnera une description directe de ce phénomène de limites de bicaractéristiques. Comme il a été noté dans [5] l'utilisation de la méthode classique de l'optique géométrique va se heurter à l'obstruction d'une infinité de caustiques dès que l'on veut obtenir une solution sur un intervalle de temps grand. Pour surmonter cette difficulté on aura d'abord recours à une transformation de Fourier Bros Iagolnitzer (en abrégé F.B.I.) sur P. Cette méthode utilisée par le second auteur dans [9] pour l'analyse des singularités analytiques transforme l'analyse microlocale d'un problème pseudo-différentiel sur des distributions de $\mathbb{R}^n$, en un problème pour des "opérateurs pseudo-différentiels dans le domaine complexe" agissant sur des espaces de fonction holomorphes $u(x,\lambda)$ dont la croissance est localement contrôlée par des fonctions de poids $\exp(\lambda\varphi(x))$ où $\varphi(x)$ est pluri-sousharmonique. On y trouve deux avantages le premier est de fournir aisément une microlocalisation du problème, le second plus essentiel est qu'après la transformation de F.B.I. on ne rencontre plus de caustiques et ainsi à ceci près que l'on travaille sur des opérateurs dans le domaine complexe on développera une méthode assez classique de solution asymptotique. La condition $\operatorname{Im} p_0^s(x,\xi) \neq 0$ sur N ($p_0^s(x,\xi)$ est le symbole sous principal) précise et dirige la propagation des singularités, et servira à donner un sens direct à la superposition des solutions de l'équation de Schrödinger.

Citons maintenant précisément le résultat.

Soit $P(x,D_x)$ un opérateur pseudo-différentiel (en abrégé o.p.d.) classique de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$, dont le symbole principal $p(x,\xi)$ est réel. On définit

$$N = \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0 \mid \; dp(x,\xi) = 0\} ,$$

puis sur N $F_p(x,\xi) \in \mathcal{L}(T_{(x,\xi)}(T^*\mathbb{R}^n))$ par Hess $p(x,\xi)\cdot(t,t') = \sigma(t,F_p(x,\xi)t')$

où σ est la 2-forme symplectique et $p_o^s(x,\xi) = p_o(x,\xi) - \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}(x,\xi)$.

On désigne par μ_o un point de N et par $\mu(t,\bar{\mu})$ la courbe bicaractéristique issue de $\bar{\mu}$. On fait les hypothèses suivantes :

$(H_1)_a$ Si $\mu \in N$, $\mathrm{Spec}(F_p(\mu)) \subset i\,\mathbb{R}$

$(H_1)_b$ Le flot sort - Pour tout $\delta > 0$, il existe V et V_1 voisinages de μ_o tels que :

$$p(\bar{\mu}) = 0 \;,\; \delta_o > \int_0^t |H_p(\mu(s,\bar{\mu}))| \; |ds| \geqslant \delta \text{ et } \bar{\mu} \in V \text{ entrainent } \mu(t,\bar{\mu}) \notin V_1.$$

$(H_1)_c$ Il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $d(x,p^{-1}(0)) \leqslant C\,|p(x)|^{\alpha}$.

(H_2) Si $(x,\xi) \in N$ $\mathrm{Im}\, p_o^s(x,\xi) > 0$.

Soit $H = (H_1) \cap (H_2)$.

<u>Remarques</u> 1) Si $p(x,\xi) = \xi_o^2 - q(x,\xi')$ où $q \geqslant 0$ s'annule exactement à l'ordre 2 sur Σ sous variété C^∞ de $T^*\mathbb{R}^{n-1}$, (H_1) est satisfaite.

2) On peut donner des exemples non hyperboliques $p(x,\xi) = \frac{1}{2}(B(x,\xi)\xi',\xi') + (A(x,\xi)\,(\xi'' + ix''\,\xi_n),(\xi'' - ix''\,\xi_n))$ $\xi' \in \mathbb{R}^p$, $\xi'' \in \mathbb{R}^q$. B symétrique non dégénérée, A auto-adjointe positive, satisfait (H_1).

Si $\mu \in N$ on définit l'ensemble d'influence de μ par :

$$C(\mu) = \bigcap_{V \text{ voisinage de } \mu} \overline{\{\mu(t,\bar{\mu}) \mid \; t \geqslant 0,\; \bar{\mu} \in V \cap p^{-1}(0) \text{ et } \int_0^t |H_p(\mu(s,\bar{\mu}))| \; |ds| \leqslant \delta_o\}}.$$

<u>Théorème</u> : <u>On</u> <u>suppose</u> <u>que</u> P <u>satisfait</u> (H). <u>Soit</u> $\mu \in N$ <u>et</u> ω <u>un</u> <u>voisinage</u> <u>assez</u> <u>petit</u> <u>de</u> μ. <u>Soit</u> $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>telle</u> <u>que</u> $WF(Pu) \cap \bar{\omega} = \phi$, <u>si</u> $WF(u) \cap C(\mu) \cap \partial\omega = \phi$ <u>alors</u> $\mu \notin WF(u)$.

I - L'action de la transformation de F.B.I. sur les o.p.d. classiques

Soit $p(x,y,\xi)$ le symbole d'un o.p.d classique sur $\mathbb{R}^n$, on note encore p un prolongement presque analytique de p.

$$Tu(x,\lambda) = \int e^{i\lambda\varphi(x,y)}\, a(x,y,\lambda)\, \chi(y)\, u(y)\, dy \quad x \in \mathbb{C}^n \text{ où } \varphi(x,y) = \frac{i}{2}\left[(x-y)^2 - \frac{x^2}{2}\right].$$

Soit $\varphi_0(x) = |x|^2/4$; pour $y \in \mathbb{R}^n$ $\operatorname{Im}\varphi(x,y) \geqslant -\varphi_0(x) + C|y-y(x)|^2$ avec $y(x) = \operatorname{Re} x$. $\chi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportée près de y_0 ; $a(x,y,\lambda)$ symbole analytique classique elliptique en $(x_0,y_0) \in \mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n$, $y_0 = \operatorname{Re} x_0$.

$$T(Pu)\,(x,\lambda) = \int u(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\lambda[\varphi(x,z)+\xi(z-y)]}\, p(z,y,\lambda\xi)\, a(x,z,\lambda)\, \chi(z)\, dz\, d\xi \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n$$

On note $H(x,y;z,\xi) = \varphi(x,z) + \xi(z-y)$. $H'_z(x,y;z,\xi) = \varphi'_z(x,z) + \xi$, $H'_\xi(x,y,z,\xi) = z - y$. $\operatorname{Im} H(x,y;z,\xi) \geqslant -\varphi_0(x) + C|z-y(x)|^2$ pour $(z,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

On notera $K(x,y,\lambda) \overset{V}{\sim} 0$ pour $K(x,y,\lambda) \in C^\infty(V\times\mathbb{R}^n)$, si tout multi-indice (α,β) $D_x^\beta D_y^\alpha K(x,y,\lambda)\, e^{-\lambda\varphi_0(x)} = O(\lambda^{-\infty})$ uniformément sur tout compact de $V\times\mathbb{R}^n$.

$$\text{Soit } I(x,y,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\lambda(\varphi(x,z)+\xi(z-y))}\, p(z,y,\lambda\xi)\, a(x,z,\lambda)\, \chi(z)\, dz\, d\xi \,.\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n$$

On suppose que $-\varphi'_z(x_0,y_0) = \operatorname{Im} x_0 \neq 0$ et que $V \ni x_0$ et le support de χ sont assez petits pour que sur le support de l'intégrande $\varphi'_z(x,z) \neq 0$. Intégrant par parties en ξ on voit que $I = I_1 + K$, avec $K \sim 0$ et

$$I_1(x,y,\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\lambda H(x,y;z,\xi)}\, p(z,y,\lambda\xi)\, a(x,z,\lambda)\, \omega(y,\xi)\, \chi(z)\, \lambda^n \frac{dz\, d\xi}{(2\pi)^n}$$

sur le support de ω $\frac{1}{M} \leqslant |\xi| \leqslant M$ et $y \in V_1(y^0)$. Pour $w = (x,y) \in V(x_0) \times V_1(y_0)$, $\zeta = (z,\xi)$ $H(w,\zeta) = H(w,\zeta(w)) + \frac{i}{2}\tilde{\zeta}^2(w,\zeta)$ où $\zeta(w) = (y,-\varphi'_z(x,y))$ et $\tilde{\zeta}(w,\zeta) = Q(\zeta-\zeta(w))$où Q est un opérateur linéaire inversible sur $\mathbb{C}^{2n}$. Soit $e(x,y,z,\xi,\lambda)=p(z,y,\lambda\xi)\, a(x,z,\lambda)\, \tilde{\omega}(y,\xi)\, \tilde{\chi}(z)$. Suivant [7] on voit après un changement de contour que $I_1 \sim I_2$ avec

$$I_2(x,y,\lambda) = \int e^{i\lambda\varphi(x,y)}\, e^{-\lambda\tilde{x}^2/2}\, e(w,\zeta(w,\tilde{x}),\lambda)\, \mathcal{J}\, \lambda^n\, d\tilde{x}/(2\pi)^n \quad \mathcal{J} = (\det Q)^{-1}$$

où l'intégrale porte seulement sur un voisinage de $\tilde{x} = 0$. Il résulte du théorème de la phase stationnaire que $e^{-i\lambda\varphi(x,y)}\, I_2(x,y,\lambda)$ est un symbole classique sur $V\times\mathbb{R}^n$ (au sens C^∞) admettant au sens des symboles le développement :

$$I_2(x,y,\lambda)\; e^{-i\lambda\varphi(x,y)} \equiv \sum_{\nu\geq 0} \lambda^{-\nu}\; \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\Delta_{\tilde{x}}}{2}\right)^{\nu} \left(\mathcal{J}\, e(w,\zeta(w,\tilde{x}),\lambda)\right)\Big|_{\tilde{x}=0} \tag{4}$$

Ici $\mathcal{J}=1$ et $\zeta(w,\tilde{x}) = (y+\tilde{x}'+i\tilde{x}'', -\varphi'_y(x,y)+\tilde{x}'')$ $\tilde{x} = (\tilde{x}',\tilde{x}'') \in \mathbb{R}^{2n}$; le terme homogène de degré m est $p_m(y,-\varphi'_y(x,y))\; a_0(x,y)\; \tilde{\omega}(y,-\varphi'_y(x,y))\chi(y)$. Comme pour $x \in V(x_0)$ et $y \in V_1(y_0)$, $-\operatorname{Re}\varphi'_y(x,y) \in \{\omega \equiv 1\}$, modulo équivalence on peut remplacer $e^{i\lambda\varphi(x,y)}\;\tilde{\omega}(y,-\varphi'_y(x,y))\;()$ par $e^{i\lambda\varphi(x,y)}\;()$ car $\operatorname{Im}\varphi(x,y) \geqslant -\varphi_0(x) + c|\operatorname{Im}\varphi'_y(x,y)|^2$.

Le terme de degré m-1 (modulo $\sim$) est donc :

$$\begin{aligned}&p_{m-1}(y,-\varphi'_y(x,y))\; a_0(x,y)\;\chi(y) + p_m(y,-\varphi'_y(x,y))\; a_1(x,y)\;\chi(y) +\\ &a_0(x,y)\;\chi(y)\;\frac{1}{2}\,\Delta_\xi\, p_m(y,-\varphi'_y(x,y)) + i\sum_{j=1}^{n}\Big[\partial_{\xi_j}\partial_{y_j}\, p_m(y,-\varphi'_y)\; a_0\,\chi +\\ &\partial_{\xi_j}\, p_m(y,-\varphi'_y)\;\partial_{y_j}(a_0(x,y)\;\chi(y))\Big]\end{aligned}$$

On désigne maintenant par $\kappa(x,y,\lambda)$ un symbole classique équivalent à (4) et ayant la propriété d'être presque analytique sur $M = \{(x,y) \in V\times\mathbb{C}^n \mid (y,-\varphi'_y(x,y)) \in \mathbb{R}^{2n}\}$. On a donc vérifié que $\kappa(x,y,\lambda)\; e^{i\lambda\varphi(x,y)} \sim I(x,y,\lambda)$.

Si $q(x,\theta,\lambda)$ est un symbole classique C^∞ dans $V\times W$ où W est un voisinage de $\theta_0 = \frac{2}{i}\,\varphi'_0(x_0) = \varphi'_x(x_0,y_0)$ dans $\mathbb{C}^n$, presque analytique sur $\Lambda_0 = \{(x, \frac{2}{i}\,\varphi'_0(x)), x \in \mathbb{C}^n\}$ on considère l'opérateur :

$$Q\left(x, \frac{D_x}{\lambda}, \lambda\right) v(x,\lambda) = \int_{\Gamma_x} q(x,\theta,\lambda)\; e^{i\lambda(x-y)\theta}\; v(y,\lambda)\left(\frac{\lambda}{2\Pi}\right)^n dy\wedge d\theta \tag{5}$$

où Γ_x est défini par $\begin{cases}\theta = \frac{2}{i}\,\varphi'_0(x) + i\,R(\overline{x-y}). \\ |x-y| \leqslant r\end{cases}$ R est un nombre positif fixé en fonction de la fonction

$\varphi_o(x)$, r est alors choisi assez petit pour que lorsque $x \in V_1 \subset\subset V$, $|x-y| \leqslant r$ entraine $y \in V$ et $\frac{2}{i}\varphi_o'(x) + i\, R(\overline{y-x})$ appartient à W. R étant choisi assez grand, sur Γ_x on a $\mathrm{Im}(x-y)\theta - \varphi_o(y) \geqslant -\varphi_o(x) + c\,[|x-y|^2 + |\theta - \frac{2}{i}\varphi_o'(x)|^2]$. On en déduit que Q opère de l'espace $C^\infty(V)$ dans $C^\infty(V_1)$. On calcule $Q\,T_1u$ sous la forme :

$$(Q\,T_1u)\,(x,\lambda) = \int u(z)\,\chi_1(z)\,\mathcal{J}(x,z,\lambda)\,e^{i\lambda\varphi(x,z)}\,dz \quad \text{avec}$$

$$T_1u = \int e^{i\lambda\varphi(x,y)}\,a(x,y,\lambda)\,\chi_1(y)\,u(y)\,dy \quad \text{où}$$

$\chi_1 \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_1 \equiv 1$ au voisinage du support de χ.

$$\mathcal{J}(x,z,\lambda) = e^{-i\lambda\varphi(x,z)}\int_{\Gamma_x} e^{i\lambda[(x-y)\theta+\varphi(y,z)]}\,q(x,\theta,\lambda)\,a(y,z,\lambda)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n dy\wedge d\theta \quad (6)$$

Soit $H(y,x;z) = \int_0^1 \varphi_x'((1-t)x+ty,z)dt$, soit

$$\mathcal{J}(x,z,\lambda) = \int_{\Gamma_x} e^{i\lambda[\theta-H(y,x;z)](x-y)}\,a(y,z,\lambda)\,q(x,\theta,\lambda)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n dy\wedge d\theta$$

On introduit $\gamma^s : \begin{cases} |x-y| \leqslant r' & 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ \theta = (1-s)\varphi_x'(x,z) + s\,H(y,x;z) + i\,R(\overline{x-y}) \end{cases}$

Notons que sur γ^s $\mathrm{Im}[\theta - H(y,x;z)](x-y) \geqslant R|x-y|^2 - c|x-y|^2 \geqslant R_1|x-y|^2$; on choisira r' assez petit pour que pour $x \in V_1$ et $z \in \mathrm{supp}\,\chi_1$ (contenus dans des voisinages assez petits de x_o et y_o), le chemin γ^s reste contenu dans $V\times W$. On note $\mathcal{J}^s(x,z,\lambda)$ l'intégrale portant sur γ^s. Notons d'abord que : $\chi_1(z)[\mathcal{J}(x,z,\lambda) - \mathcal{J}^o(x,z,\lambda)]e^{i\lambda\varphi(x,z)} \overset{V_1}{\sim} 0$.

En effet $\int_{\gamma_o} e^{i\lambda[(x-y)\theta+\varphi(y,z)]}\,a(y,z,\lambda)\,q(x,\theta,\lambda)\,dy\wedge d\theta$ se déforme en l'intégrale portant sur Γ_x^o : $|x-y| \leqslant r'$ et $\theta = \frac{2}{i}\varphi_o'(x) + i\,R(\overline{x-y})$, par $\Gamma_{x,z}^\sigma$: $|x-y| \leqslant r'$

$\theta = (1-\sigma)\,\varphi_x'(x,z) + \sigma\,\frac{2}{i}\,\varphi_o'(x) + i\,R(\overline{x-y})$; sur $\Gamma_{x,z}^\sigma$

$$\operatorname{Im}((x-y)\theta + \varphi(y,z)) \geqslant R|x-y|^2 + (1-\sigma)\operatorname{Im}(\varphi(y,z) + (x-y)\varphi'_x(x,z)) + \sigma \operatorname{Im}\left[\frac{2}{i}\varphi'_0(x)(x-y) + \varphi(y,z)\right]$$

$$\geqslant R|x-y|^2 + (1-\sigma)(-\varphi_0(x) - c|x-y|^2 + c|z-z(x)|^2) + \sigma(-\varphi_0(x) - c|x-y|^2$$

$$+ |z-z(y)|^2) \geqslant -\varphi_0(x) + c_1|x-y|^2 + c_2|z-z(x)|^2$$

$\Gamma^\sigma_{x,z}$ reste également contenu des $V\times W$ pour $x \in V_1$ et $z \in \operatorname{supp}\chi$. Il est clair que

$$\frac{d}{d\sigma}\int_{\Gamma^\sigma_{x,z}} e^{i\lambda[\varphi(y,z)+(x-y)\theta]}\, a\, q\, dy\wedge d\theta = \int_{\Gamma^\sigma_{x,z}} \mathcal{L}_V(e^{i\lambda()}\, a\, q\, dy\wedge d\theta)$$

où V est le champ de vecteur $\left[\frac{2}{i}\varphi'_0(x) - \varphi'_x(x,z)\right]\frac{\partial}{\partial\theta} + \overline{(\frac{2}{i}\varphi'_0(x) - \varphi'_x(x,z))}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}$

$$\mathcal{L}_V(f\, dy\wedge d\theta) = V \lrcorner\, \partial f \wedge dy \wedge d\theta + d(f\, V \lrcorner\, dy\wedge d\theta)\ .$$

La contribution du 1er terme donne $\overset{V_1}{\sim} 0$ à cause de la presque analyticité de q sur $\theta = \frac{2}{i}\varphi'_0(x)$ (le long de $\Gamma^\sigma_{x,z}$ $|\theta - \frac{2}{i}\varphi'_0(x)| \leqslant R\left[|x-y| + |z-z(x)|\right]$). La contribution du 2ème terme est une intégrale sur le bord $\partial\Gamma^\sigma_{x,z}$ et donne aussi $\overset{V_1}{\sim} 0$. De la même façon on voit que $e^{i\lambda\varphi(x,z)}\frac{d}{ds}\int_{\gamma^s} e^{i\lambda[\theta-H](x-y)}\, a\, q\, dy\wedge d\theta$ est $\overset{V_1}{\sim} 0$ puisque le long de γ^s $|\theta - \frac{2}{i}\varphi'_0(x)| \leqslant R(|x-y| + |z-z(x)|)$. Modulo $\overset{V_1}{\sim}$ on a transformé $e^{i\lambda\varphi(x,z)}\,\mathcal{J}(x,z,\lambda)$ en $e^{i\lambda\varphi(x,z)}\, L(x,z,\lambda)$ où

$$L(x,z,\lambda) = \int_{|y|\leqslant r'} e^{-\lambda R|y|^2}\, a(x+y,z,\lambda)\, q(x,H(x+y,x;z) - i R\bar y,\lambda)\, (-iR)^n \frac{dy\wedge d\bar y}{(2\Pi)^n}\lambda^n$$

$(-i)^n\, dy\wedge d\bar y = \pm 2^n L(dy)$, ceci fait que L est un symbole classique au sens C^∞ dans $V_1\times\mathbb{R}^n$ admettant un développement asymptotique

$$L(x,z,\lambda) \equiv \sum_{\nu\geqslant 0} (\lambda R)^{-\nu}\frac{1}{\nu!}(\Delta_{y,\bar y})^\nu \left(a(x+y,z,\lambda)\, q(x,H(x+y,x,z) - iR\bar y,\lambda)\right)\Big|_{y=0}$$

Le terme homogène de degré m est $a_0(x,z)\ q_m(x,\varphi_z'(x,z))$; le terme de degré m-1 est :

$$a_1(x,z)\ q_m(x,\varphi_x'(x,z)) + a_0(x,z)\ q_{m-1}(x,\varphi_x'(x,z)) + a_0(x,z)\ \frac{1}{2i}\ \partial_\theta^2\ q_m(x,\varphi_x')\ \varphi_{xx}''(x,z) + $$
$$+ \frac{1}{i}\ \partial_x\ a_0(x,z)\ \partial_\theta\ q_m(x,\varphi_x')$$

modulo des termes qui contiennent $D\ \overline{\partial}_\theta\ q(x,\varphi_x')$ et qui multipliés par $e^{i\lambda\varphi(x,z)}$ donnent $\overset{V_1}{\sim}$ 0. On remplacera $L(x,z,\lambda)$ par un équivalent asymptotique $L_1(q)\ (x,z,\lambda)$ qui est lui presque analytique sur M.

Soit un symbole classique $K(x,z,\lambda)$ sur $V\times\mathbb{C}^n$ presque analytique sur M $K(x,z,\lambda) \sim \sum_j \lambda^{m-j}\ K_j(x,z,\lambda)$; si V a été choisi assez petit on peut déterminer un voisinage W de $\varphi_x'(x_0,z(x_0))$ de sorte que, $(x,\varphi_x'(x,z)) \in V\times W$ entraine $a_0(x,z) \neq 0$, on peut alors déterminer un symbole $q(x,\theta,\lambda)$ sur $V\times W$ presque analytique sur $\{(x,\theta) \in V\times W | \theta = \frac{2}{i}\ \varphi_0'(x)\}$ tel que $K(x,z,\lambda) \equiv L_1(q)\ (x,z,\lambda)$ sur $\{(x,z)$ tels que $(x,\varphi_x'(x,z)) \in V\times W\}$ dont on peut supposer qu'il contient $V \times \{$voisinage du support de $\chi_1\}$.

On s'est donc assuré que $\chi_1(z)\Big[K(x,z,\lambda) - \mathcal{J}(q)(x,z,\lambda)\Big]\ e^{i\lambda\varphi(x,z)} \overset{V_1}{\sim} 0$ pour un voisinage V_1 de x_0 assez petit. Si $K(x,z,\lambda)$ a été obtenu, comme plus haut, à partir d'un opérateur pseudo-différentiel sur le domaine réel, on trouve que $q_m(x,\varphi_x'(x,z)) = p_m(z,-\varphi_z'(x,z))\ \chi(z)$ tandis que :

$$q_{m-1}(x,\varphi_x') + \frac{1}{2i}\ \partial_\theta^2\ q_m(x,\varphi_x')\ \varphi_{xx}'' + a_0^{-1}(x,z)\Big[a_1(x,z)\ q_m(x,\varphi_x') + \frac{1}{i}\ \partial_x\ a_0\ \partial_\theta\ q_m(x,\varphi_x')\Big] =$$
$$\chi(z)\Big[p_{m-1}(z,-\varphi_z') + p_m(z,-\varphi_z')\ a_1\ a_0^{-1}\Big] + \chi(z)\ \frac{x}{2}\ \Delta_\xi\ p_m(z,-\varphi_z') + i\ \sum_{j=1}^{n} \partial_{\xi_j}\ \partial_{y_j}\ p_m(z,-\varphi_z') +$$
$$+ a_0^{-1}\ \partial_{\xi_j}\ p_m\ \partial_{y_j}(a_0\chi)$$

La transformation canonique $\mathcal{H}$ de graphe $(x,\varphi_x'(x,z),\ z,-\varphi_z'(x,z))$ s'exprime par

$$\mathcal{H}(z,\eta) = (z-i\eta,\ \frac{z+i\eta}{2i}) \quad , \quad \mathcal{H}^{-1}(x,\theta) = (\frac{x}{2} + i\theta,\ \theta + \frac{ix}{2})\ .$$

$q_m(x,\theta) = (p_m \circ \mathcal{K}^{-1})(x,\theta)\ \chi(\frac{x}{2} + i\theta)$. Puis

$$q_{m-1}(x,\theta) = (\chi\ p_{m-1}) \circ \mathcal{K}^{-1} + \frac{1}{4}\Delta_\xi(p_m\chi) \circ \mathcal{K}^{-1} + \frac{1}{4}\Delta_y(p_m\chi) \circ \mathcal{K}^{-1} + i\ a_0^{-1}\ \partial_x\ a_0 \left[\partial_\xi(p_m\chi) + \right.$$

$$\left. + i\partial_y(p_m\chi)\right] \circ \mathcal{K}^{-1} + i\ a_0^{-1}\left[\partial_\xi(p_m\chi)\ \partial y\ a_0\right] \circ \mathcal{K}^{-1} + \mathcal{O}((\theta - \frac{2}{i}\varphi_0'(x))^\infty)$$

D'où l'on déduit qu'un point (x,θ) où $dq_m(x,\theta) = 0$

$$q_{m-1}(x,\theta) - \frac{1}{2i}(q_m)''_{x,\theta}(x,\theta) = \left[\chi\ p_{m-1} - \frac{1}{2i}\partial_x\ \partial_\xi(\chi p_m)\right] \circ \mathcal{K}^{-1} + \mathcal{O}((\theta - \frac{2}{i}\varphi_0'(x))^\infty)$$

On a donc prouvé :

__Proposition 1__ : __Soit__ $(x_o,z_o) \in \mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n$ __où__ $z_o = \mathrm{Re}\ x_o$ __et__ $\varphi_z'(x_o,z_o) \neq 0$. __Soit__ $a(x,z,\lambda)$ __un symbole analytique classique elliptique en__ (x_o,z_o). __On peut trouver des voisinages__ V_1, V __de__ x_o, $\mathcal{U}$ __de__ z_o, W __voisinage complexe de__ $\theta_o = \frac{2}{i}\varphi_o'(x_o)$, __tels que si__ χ __et__ $\chi_1 \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ supp $\chi \subset\subset \{\chi_1 \equiv 1\} \subset\subset \mathcal{U}$, __si__ P __est un o.p.d. classique sur__ $\mathbb{R}^n$, __on peut trouver un symbole classique__ $q(x,\theta,\lambda)$ __dans__ $V\times W$, __presque analytique sur__ $\Lambda_o = \{(x,\theta) \in V\times W \mid \theta = \frac{2}{i}\varphi_o'(x)\}$ __tels que__ :

$$Q(x, \frac{D_x}{\lambda}, \lambda) \int a(x,z,\lambda)\ \chi_1(z)\ u(z)\ e^{i\lambda\varphi(x,z)}dz = \int a(x,z,\lambda)\ \chi(z)\ e^{i\lambda\varphi(x,z)}(Pu)(z)dz +$$

$$+ \int K(x,z,\lambda)\ u(z)dz$$

__où__ $\qquad K(x,z,\lambda) \in C^\infty(V_1\times\mathbb{R}^n)$ *__et__* $K \overset{V_1}{\sim} 0$.

II - La construction d'une solution de l'équation de phase

Soit $\mu_0 = (\mathrm{Re}\, x_0, -\mathrm{Im}\, x_0) \in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$; on note $\mu(t,\bar{\mu})$ la solution de : $\begin{cases} \frac{d\mu}{dt} = H_p(\mu) \\ \mu|_{t=0} = \bar{\mu} \end{cases}$

qui est la courbe bicaractéristique de p issue de $\bar{\mu}$. On prouve :

Proposition 2.1 : On suppose qu'en tout point de $N = \{(x,\xi) | H_p(x,\xi) = 0\}$ $\mathrm{spec}(F_p(x,\xi)) \subset i\,\mathbb{R}$. *Soit* $\delta > 0$ *et* $V(\mu_0)$ *un voisinage de* $\mu_0 \in N$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $C_\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$\bar{\mu} \in V(\mu_0)\ ,\ \int_0^t |H_p(\mu(s,\bar{\mu}))|\ |ds| \leqslant \delta \ \textit{entraine que}\ \left|\frac{\partial\mu}{\partial\bar{\mu}}(t,\bar{\mu})\right| \leqslant C_\varepsilon \exp(\varepsilon|t|) \qquad (2.1)$$

Démonstration :

Soit $\bar{\mu} \in V(\mu_0)$ et $T > 0$ tel que $\int_0^T |H_p(\mu(t))|\ dt \leqslant \delta$, $\mu(t) = \mu(t,\bar{\mu})$. Deux cas se présentent. Le premier est celui où $d(\mu(0),N) \leqslant \varepsilon$, on détermine alors T_1 par $\int_0^{T_1} |H_p(\mu(t))|\ dt = \varepsilon$ ($T_1 = T$ si $\int_0^T |H_p|\ dt < \varepsilon$). Le second est celui où $d(\mu(0),N) > \varepsilon$, $[0,S_1[$ est le plus grand intervalle tel que $d(\mu(t),N) > \varepsilon$. On obtient finalement un découpage de $[0,T]$ en des intervalles $(\mathcal{J}_k)_{1\leqslant k\leqslant P}$ où $d(\mu(t),N) \geqslant \varepsilon$ et en des intervalles $(I_\ell)_{1\leqslant \ell\leqslant Q}$ sur lesquel $d(\mu(t),\mu_\ell) \leqslant 2\varepsilon$, $\mu_\ell \in N$, $\int_{I_\ell} |H_p(\mu(s))|\ ds = \varepsilon$. Sur $\mathcal{J}_k$, $|H_p(\mu(t))| \geqslant K_\varepsilon$ donc $\sum_{k=1}^{P} \text{Longueur}(\mathcal{J}_k) \leqslant K_\varepsilon\, \delta$. Soit m_k (resp. m'_ℓ) la solution au temps b_k du système $\begin{cases} \frac{dm_k}{dt} = F_p(\mu(t))m_k \\ m_k|_{t=a_k} = I \end{cases}$ si $\mathcal{J}_k = [a_k,b_k]$. (et de même pour m'_ℓ si $t \in I_\ell = [a_\ell,b_\ell]$)

Il est clair que $\left|\frac{\partial\mu}{\partial\bar{\mu}}(t,\bar{\mu})\right| \leqslant \prod_j |m_j| \times \prod_\ell |m'_\ell|$. On a une majoration $|m_k| \leqslant \exp(C \text{ Longeur } (\mathcal{J}_k))$. Il faut estimer plus soigneusement les m'_ℓ. On utilise le lemme :

Lemme : Soit A *et* $B(t)$ *des matrices* $m{\times}m$ *telles que* $\mathrm{Spec}(A) \subset i\,\mathbb{R}$, $\|B(t)\| \leqslant \varepsilon$.

A varie dans un ensemble compact. Il existe une constante C telle que la solution de l'équation $\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + B(t)u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$ *vérifie :*

$$|u(t)| \leq C\varepsilon^{-1} exp(C\ \varepsilon^{1/m}|t|)\ |u_0|\ .$$

Démonstration du lemme

Comme Spec(A) $\subset i\,\mathbb{R}$, choisissant un contour γ qui est toujours à la distance $\varepsilon^{1/m}$ d'une valeur propre (longueur de $(\gamma) \leq C\ \varepsilon^{1/m}$), on écrit $e^{tA} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{tz}\frac{dz}{z-A}$ on obtient donc avec une constante C uniforme lorsque A décrit un compact : $\| e^{tA}\| \leq C\ \frac{\varepsilon^{1/m}}{\varepsilon}$ $e^{\varepsilon^{1/m}|t|}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On introduit l'espace $L^\infty_{\tilde{C}} = \{ v(t) \in C^0(\mathbb{R}) |\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \exp(-\tilde{C}\ \varepsilon^{1/m}|t|)$ $|v(t)| = \| v\| < +\infty\}$. On résoud l'équation $\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + B(t)u = v(t) \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$ en inversant $I + KB(t)$ dans $L^\infty_{\tilde{C}}$ où $Kw(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}\ w(t)dt$ et en posant $u = (I+KB)^{-1}\ Kv$. On constate aisément que la norme de K dans $L^\infty_{\tilde{C}}$ est au plus $\varepsilon^{-1}\ C/\tilde{C}-1$, on choisit donc $\tilde{C} = 1+2C$. On en déduit le lemme. Le nombre des intervalles m'_ℓ est au plus δ/ε. Pour estimer m'_ℓ, on utilise la formule de Taylor au point $\mu_\ell \in N$ et le lemme précédent. Au total $\left| \frac{\partial\mu}{\partial\bar{\mu}}(t,\bar{\mu})\right| \leq C_\varepsilon\ \exp(C\ \varepsilon^{1/m}|t|)$: ce qui est le résultat cherché. On exprime le résultat de la proposition 2.1 en posant $f(t) = \text{Log}\sup\left(\left|\frac{\partial\mu}{\partial\bar{\mu}}(t,\bar{\mu})\right|,\ \bar{\mu} \in V_0\right.$ et $\left.\int_0^t |H_p(\mu(s,\bar{\mu}))|\ |ds| \leq \delta\right)$ et on a $\lim_{|t|\to\infty} \frac{f(t)}{<t>} = 0$ où $<t> = (1+t^2)^{1/2}$. Procédant par une régularisation de f, on obtient h(t) C^∞ vérifiant $h(s) \leq h(t)$ si $|s| \leq |t|$, $f(t) \leq h(t)$, $\lim_{t\to\infty} h(t)|_{<t>} = 0$, $\left|(\frac{d}{dt})^n\ h(t)\right| \leq C_n <t>$, et aussi $h(t) \geq <t>^{1/2}$.

On en déduit :

Lemme 1 : Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, *il existe* $C_{p,q} > 0$ *tels que :*

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^p d^q_{\bar{\mu}}\, \mu(t,\bar{\mu})\right| \leq C_{p,q} \exp(C_{p,q}\, h(t)) \tag{2.1}$$

pour $\bar{\mu} \in V_o$ *et* $\int_o^t |H_p(\mu(s,\bar{\mu}))|\, |ds| \leq \delta_o$.

On utilisera aussi la fonction $h_1(t) = \langle t\rangle^{1/2}\, h(t)^{1/2}$, de sorte que $\frac{h_1(t)}{\langle t\rangle}$ et $\frac{h(t)}{h_1(t)}$ tendent vers zéro et $\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^n h_1(t)\right| \leq C_n \langle t\rangle^{\frac{n}{2}+1}$.

Soit $p(x,\xi)$ une extension presque analytique de p et $q(x,\xi) = (p \circ \mathcal{K}^{-1})(x,\xi)$, on note $H_q(x,\xi)$ le vecteur complexe $(q'_\xi(x,\xi), -q'_x(x,\xi))$ (dérivées holomorphes) et $\rho(t,\bar{\rho}) = (x(t,y,\eta),\ \xi(t,y,\eta))$ la courbe intégrale issue de $\bar{\rho} = (y,\eta) \in \mathbb{C}^{2n}$. Soit $\rho_o = \mathcal{K}(\mu_o)$ et $\Lambda_o = \mathcal{K}(T^*\mathbb{R}^n)$. Il est clair que Λ_o est stable par le flot de H_q, et que sur Λ_o $q'_x(x,\xi) = \frac{i}{2}\, \overline{q'_\xi(x,\xi)}$. La courbe intégrale issue de $\bar{\rho} = (y, \frac{2}{i}\varphi'_o(y)) \in \Lambda_o$ est notée $(x(t,y), \frac{2}{i}\varphi'_o(x(t,y)) = \xi(t,y))$. On peut donc trouver un voisinage complexe V_o de x_o, $\delta_o > 0$, des nombres $C_{p,q} > 0$ tels que $\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^p \frac{\partial^q x}{\partial y^q}(t,y)\right| \leq C_{p,q} \exp(C_{p,q}\, h(t))$ pour $y \in V_o$ et $\int_o^t |H_q(\rho(s,\bar{\rho}))|\, |ds| \leq \delta_o$. La fonction réciproque de $y \to x(t,y)$ est $y(t,x) = x(-t,x)$. On note $F_q(x,\xi) = \begin{bmatrix} q''_{\xi x} & q''_{\xi\xi} \\ -q''_{xx} & -q''_{x\xi} \end{bmatrix}(x,\xi)$ où $(x,\xi) \in \mathbb{C}^{2n}$. On prouve :

__Lemme 2__ : __Si__ $t \in I \to (\delta x(t), \delta\xi(t)) \in \mathbb{C}^{2n}$ __est une courbe__ C^1 __qui satisfait à__

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\delta x(t), \delta\xi(t)) = F_q(\rho(t,\bar{\rho})).\ (\delta x(t), \delta\xi(t)) \\ (\delta x, \delta\xi)\big|_{t=0} = (\delta y, \delta\eta) \end{cases}$$

__où__ $\bar{\rho} \in \Lambda_o$, *__on a__ :*

$$\frac{1}{4}\left|\delta x(t)\right|^2 - \left|\delta\xi(t)\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\delta y\right|^2 - \left|\delta\eta\right|^2 \tag{2.2}$$

__Démonstration__ :

De $q'_x(x,-i\bar{x}/2) = \frac{i}{2}\, \overline{q'_\xi(x,-i\bar{x}/2)}$ on déduit que (q est presque analytique sur Λ_o)

$q''_{xx}(\rho) = -\frac{1}{4}\,\overline{q''_{\xi\xi}(\rho)}$ $\rho \in \Lambda_0$ et que $\overline{q''_{\xi x}(\rho)} = -q''_{x\xi}(\rho)$ $\rho \in \Lambda_0$ donc $q''_{\xi x}(\rho) = iC(\rho)$ où $C^* = C$ tandis que $iA(\rho) = \frac{1}{2}\,q''_{\xi\xi}(\rho)$ est symétrique. Ce qui fait que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta x(t)}{2}, \delta\xi(t)\right) = \begin{bmatrix} iC & iA \\ -i\bar{A} & -i\bar{C} \end{bmatrix}(\rho(t,\bar{\rho}))\left(\frac{\delta x(t)}{2}, \delta\xi(t)\right),$$

le résultat alors est évident.

Si $\bar{\rho} \in \Lambda_0$, $d\rho(t,\bar{\rho}).\delta\bar{\rho} = \delta\rho(t)$ (différentielle totale) satisfait à

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\,\delta\rho(t) = F_q(\rho(t,\bar{\rho}))\delta\rho(t) \\ \delta\rho(t)\big|_{t=0} = (\delta y, \delta\eta) \end{cases}$$

on en déduit donc, par récurrence que $\bar{\rho} \to \rho(t,\bar{\rho})$ est presque analytique sur Λ_0. On note aussi que $\frac{d}{dt} H_q(\rho(t,\bar{\rho})) = F_q(\rho(t,\bar{\rho}))\, H_q(\rho(t,\bar{\rho}))$ si $\bar{\rho} \in \Lambda_0$. Il est alors clair que la 2-forme $\sigma = d\tau\wedge dt + d\xi\wedge dx - d\eta\wedge dy$ s'annule sur l'espace tangent à $C = \{(t,-q(\bar{\rho}), \rho(t,\bar{\rho}),\bar{\rho}),\ t \in \mathbb{R},\ \bar{\rho} \in \mathbb{C}^n\}$ en un point $(t,\rho(t,\bar{\rho}),\bar{\rho})$ où $\bar{\rho} \in \Lambda_0$. σ s'annule aussi sur l'espace tangent à $C_0 = \left\{(t,-q(x, \frac{2}{i}\varphi_0'(x)),x, \frac{2}{i}\varphi_0'(x),y(t,x),\eta(t,x))\ ;\ x \in \mathbb{C}^n,\ t \in \mathbb{R}\right\}$ où $\eta(t,x) = \frac{2}{i}\varphi_0'(y,(t,x))$. Si α désigne la 1-forme :

$$\alpha = \left[-q(x, \tfrac{2}{i}\varphi_0'(x)) + y(t,x)\,\frac{d\eta(t,x)}{dt}\right]dt + \left(\tfrac{2}{i}\varphi_0'(x) + y(t,x)\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)dx + y(t,x)\,\frac{\partial\eta}{\partial\bar{x}}\,d\bar{x}$$

$$d\alpha = -dq()\wedge dt + \sum_{j=1}^{n} dy_j\wedge dt\,\frac{\partial\eta_j}{\partial t} + y_j\, d\,\frac{\partial\eta_j}{\partial t}\wedge dt + \frac{2}{i}\, d\,\varphi_0'(x)\wedge dx + \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} dy_j\wedge dx_k\,\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k} +$$

$$+ y_j\, d\,\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\wedge dx_k + \frac{\partial\eta_j}{\partial\bar{x}_k}\,dy_j\wedge d\bar{x}_k + y_j\, d\,\frac{\partial\eta_j}{\partial\bar{x}_k}\wedge d\bar{x}_k$$

La somme des termes qui contiennent y_j en facteur est :

$$\sum_{k=1}^{n}\left[d\,\frac{\partial\eta_j}{\partial t}\wedge dt + d\,\frac{\partial\eta_j}{\partial x_k}\wedge dx_k + d\,\frac{\partial\eta_j}{\partial\bar{x}_k}\wedge d\bar{x}_k\right] = d^2\eta_j = 0$$

D'où $d\alpha = -\,dq()\wedge dt + \frac{2}{i}\,d\varphi_0'(x)\wedge dx - d\eta\wedge dy = 0$. On détermine donc une fonction $g(t,x)$

C^∞ dans $\mathbb{R}\times V_0$ telle que $\begin{cases} dg = \alpha \\ g\big|_{t=0} = x\,\frac{2}{i}\,\varphi_0'(x) \end{cases}$ $\quad(\eta(0,x) = \frac{2}{i}\,\varphi_0'(x))$.

Comme $\eta(t,x) = \xi(-t,x,-i\bar{x}/2)$, $y(t,x) = x(-t,x,-i\bar{x}/2)$ et que $x(t,\bar{\rho})$ et $\xi(t,\bar{\rho})$ sont presque analytiques sur Λ_0, on trouve que $\frac{\partial\eta}{\partial\bar{x}}\,(t,x) = -\,\frac{i}{2}\,\frac{\partial\xi}{\partial\eta}\,(-t,x,-i\bar{x}/2)$, il résulte alors de (2.2) que $\left|\frac{\partial\xi}{\partial\eta}\,(-t,\bar{\rho})\ \delta\eta\right| \geq |\delta\eta|$, donc $\left|(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{x}})^{-1}(t,x)\right| \leq 2$. De même $\left|(\frac{\partial y}{\partial x})^{-1}(t,x)\right| \leq 2$. Ceci permet de déterminer par récurrence des fonctions $\alpha_j(t,x)$ à valeurs dans $\mathrm{sym}(\bigotimes_j \mathbb{C}^n)$ telles que :

$$\alpha_0(t,x) = g(t,x)\ ,\ \alpha_1(t,x) = y(t,x)\ ,\ \alpha_q(t,x).(\delta h)^q = \left[(\bar{\partial}_x\ \alpha_{q-1}(t,x))\ (\frac{\partial\eta}{\partial\bar{x}})^{-1}\delta h\right].(\delta h)^{q-1} \qquad (2.3)$$

Il résulte alors de (2.1) que pour $x \in V_0$ et $\int_0^{-t} |H_q(\rho(s,x,\frac{2}{i}\,\varphi_0'(x)))|\ |ds| \leq \delta_0$ chacune des fonctions $\alpha_q(t,x)$ vérifie des inégalités :

$$\left|(\tfrac{d}{dt})^p\ D_x^k\ \alpha_q(t,x)\right| \leq C_{p,k,q}\ \exp(C_{p,k,q}\ h(t))\ .$$

On trouve que $\left|(\frac{d}{dt})^p\ D_x^k\ \alpha_q(t,x)\right| \leq C_{p,k,k}\ \exp(h_1(t))$

Soit $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ égale à 1 au voisinage de 0, la fonction $\omega_q^\lambda(\eta) = \omega(\lambda\eta)\ (\bigotimes_q \eta)$ vérifie $|d^j\ \omega_q^\lambda(\eta)(\delta\eta)| \leq C_{j,q}\ \lambda^{j-q}|\delta\eta|^j$ pour $\lambda \geq 1$, $\eta \in \mathbb{R}^{2n}$. Donc pour un choix convenable d'une suite λ_q on fait converger la série $\varphi(t,x,\eta) = \sum_{q\geq 0} \frac{1}{q!}\ \omega_q^{\lambda_q}(t,\eta-\eta(t,x))$. $\alpha_q(t,x)$ au moins pour $(t,x) \in \mathcal{U}_0 = \{(t,x) \in \mathbb{R}\times V_1$ tq $\int_0^{-t} |H_q(\rho(s,x))|\ |ds| < \delta_0\}$. On obtient pour $(t,x,\eta) \in \mathcal{U}_0\times\mathbb{C}^n$ des inégalités :

$$|d^j\ \varphi(t,x,\eta)| \leq C_j\ \exp(h_1(t))\ (|\delta t| + |\delta x| + |\delta\eta|)^j\,. \qquad (2.3)\ \text{bis}$$

• Vérifions que $\varphi(t,x,\eta)$ est presque analytique sur $\Lambda_t = \{(t,x,\eta)$ tq $\eta = \eta(t,x)\}$. Il est évident que $\bar{\partial}_\eta\varphi(t,x,\eta)$ est nul d'ordre ∞ sur Λ_t, pour voir que $\bar{\partial}_x\varphi(t,x,\eta)$ est nul d'ordre ∞ sur Λ_t, il faut vérifier que $(\bar\partial\alpha_{q-1}(x)\ k)\ h^{q-1} = \alpha_q(h^{q-1}, \frac{\partial\eta}{\partial\bar x}\ k)$ $\forall\ h,k \in \mathbb{C}^n$; pour cela il suffit de voir que $\alpha_q(h_o,\dots,h_{q-1}) = (\bar\partial\alpha_{q-1}\ mh_o)(h_1,\dots,h_{q-1})$ $(2.4)_q$ où $m = (\frac{\partial\eta}{\partial x})^{-1}$. Il s'agit de prouver en fait que dans le second membre de 2.4, on peut échanger h_o et h_1. Or il résulte de $(2.4)_{q-1}$ que

$$\bar\partial\alpha_{q-1}(mh_o)(h_1,\dots,h_{q-1}) = \bar\partial^{\,2}\alpha_{q-2}(mh_o,mh_1)(h_2,\dots,h_{q-1}) - \bar\partial\alpha_{q-1}(m\,\frac{\partial^2\eta}{\partial\bar x^2}\,(mh_o,mh_1)).(h_2,\dots,h_{q-1})$$

on en déduit donc $(2.4)_q$.

Il est clair que

$$(2.5)\quad \begin{cases} \varphi'_t(t,x,\eta(t,x)) = -q(x,-i\bar x/2) & \varphi'_\eta(t,x,\eta(t,x)) = y(t,x) = x(-t,x,-i\bar x/2) \\ \varphi'_x(t,x,\eta(t,x)) = -\,i\bar x/2 \end{cases}$$

D'où l'on déduit que

$$\begin{cases} -(\frac{\partial}{\partial\bar x})^j q(x,-i\bar x/2) = \sum\limits_{\ell=1\dots j,\, j_1+\dots+j_\ell=j} (\ )\ (\frac{\partial}{\partial\eta})^\ell \varphi'_t(t,x,\eta(t,x)).(\frac{\partial\eta}{\partial\bar x^{j_1}})(t,x),\dots,\frac{\partial\eta}{\partial\bar x^{j_\ell}}\ (t,x)) \\ (\frac{\partial}{\partial\bar x})^j(-i\bar x/2) = \sum\limits_{\ell=1\dots j,\, j_1+\dots+j_\ell=j} (\ )\ (\frac{\partial}{\partial\eta})^\ell \varphi'_x(t,x,\eta(t,x)).(\frac{\partial\eta}{\partial\bar x^{j_1}}\ ,\dots,\ \frac{\partial\eta}{\partial\bar x^{j_\ell}}\ (t,x)) \end{cases}$$

Ce qui s'inverse sous la forme

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial\eta})^j\varphi'_t(t,x,\eta(t,x))(\delta\eta)^j = -\sum\limits_{\ell=1\dots j} (\frac{\partial}{\partial\xi})^\ell q(x,-i\bar x/2).A^j_\ell(t,x)(\delta\eta)^j \\ (\frac{\partial}{\partial\eta})^j\varphi'_x(t,x,\eta(t,x))\ (\delta\eta)^j = A^j_1(t,x)\ (\delta\eta)^j \end{cases}$$

où les $A^j_\ell(t,x)$ sont j-linéaires à valeurs dans $\mathrm{sym}(\bigotimes_\ell \mathbb{C}^n)$ et ne dépendent que de $\eta(t,x)$.

On trouve que $A_1^1 = -\frac{i}{2}(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{x}})^{-1} = (\frac{\partial\xi}{\partial\eta})^{-1}(-t,x,-i\bar{x}/2)$; puis que

$$A_1^j(\frac{\partial\xi}{\partial\eta}(-t,x,-i\bar{x}/2)) = -\sum_{\ell=2\ldots j,\,j_1+\ldots+j_\ell=j} \frac{j!}{\ell!j_1!\ldots j_\ell!} A_1^\ell(\frac{\partial^{j_1}\xi}{\partial\eta^{j_1}}(-t,x,-i\bar{x}/2),\ldots,\frac{\partial^{j_\ell}\xi}{\partial\eta^{j_\ell}}(-t,x,-i\bar{x}/2))$$

Donc $A_1^j(t,x)$ est la dérivée d'ordre j de la fonction réciproque de la fonction $\eta \to \xi(-t,x,\eta)$ inversible au voisinage du point $\eta = -i\bar{x}/2$ et presque analytique en ce point ; on note $\eta(-t,x,\xi)$ la fonction réciproque définie au voisinage de $\xi = \eta(t,x)$ et presque analytique en ce point. Soit $A_1^j(t,x) = (\frac{\partial}{\partial\xi})^j \eta(-t,x,\eta(t,x))$. Si q est une fonction analytique on a les relations :

$$(\frac{\partial}{\partial\xi})^j q(\eta(-t,x,\xi))\big|_{\xi=\eta(t,x)} = \sum_{\ell=1-j}(\frac{\partial}{\partial\eta})^\ell q(-i\bar{x}/2)\sum_{s_1+\ldots+j_\ell=j}\frac{j!}{\ell!j_1!\ldots j_\ell!}\,\mathrm{sym}(A_1^{j_1},\ldots,A_1^{j_\ell})$$

Soit $f(\xi) = q(\eta(-t,x,\xi))$ et $f(\xi(-t,x,\eta)) = q(\eta)$ ce qui donne :

$$(\frac{\partial}{\partial\eta})^j q(\eta)\big|_{\eta=-i\bar{x}/2} = \sum_{\ell=1\ldots j,\,j_1+\ldots+j_\ell=j}(\quad)(\frac{\partial}{\partial\xi})^\ell f(\eta(t,x))\,(\frac{\partial\xi}{\partial\eta^{j_1}}(-t,x,-i\bar{x}/2),\ldots,\frac{\partial\xi}{\partial\eta^{j_\ell}}(-t,x,-i\bar{x}/2))$$

Donc
$$A_\ell^j(t,x) = \sum_{j_1+\ldots+j_\ell=j}\frac{j!}{\ell!j_1!\ldots j_\ell!}\,\mathrm{sym}(A_1^{j_1},\ldots,A_1^{j_\ell}) \qquad (2.6)$$

On calcule $(\frac{\partial}{\partial\eta})^j\left[\varphi_t'(t,x,\eta) + q(x,\varphi_x')\right]\Big|_{\eta=\eta(t,x)} = (\frac{\partial}{\partial\eta})^j\varphi_t'(t,x,\eta(t,x)) +$

$$+\sum_{\ell=1\ldots j,\,j_1+\ldots+j_\ell=j}\frac{j!}{\ell!j_1!\ldots j_\ell!}(\frac{\partial}{\partial\xi})^\ell q(x,-i\bar{x}/2)((\frac{\partial}{\partial\eta^{j_1}})\varphi_x',\ldots,\frac{\partial}{\partial\eta^{j_\ell}}\varphi_x')$$

Il résulte donc de (2.6) que $\varphi_t'(t,x,\eta) + q(x,\varphi_x'(t,x,\eta))$ est nul à l'ordre ∞ sur $\eta = \eta(t,x)$. Donc :

$$|d^j(\varphi_t' + q(x,\varphi_x'(t,x,\eta)))| \leq C_{j,N} \exp(C_{j,N}\, h_1(t))\ |\eta-\eta(t,x)|^N,\ (t,x,\eta) \in \mathcal{U}_0\times\mathbb{C}^n \tag{2.7}$$

pour tout $(j,N) \in \mathbb{N}^2$.

Il est facile de voir que $$\varphi(0,x,\eta) = x.\eta + \mathcal{O}((\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(x))^\infty)\ . \tag{2.8}$$

Il résulte de (2.5) que $\varphi''_{\eta\eta}(t,x,\eta(t,x)) = (\frac{\partial x}{\partial \eta})(\frac{\partial \xi}{\partial \eta})^{-1}(-t,x,-i\bar{x}/2)$ et que

$\varphi''_{x\eta}(t,x,\eta(t,x)) = (\frac{\partial \xi}{\partial \eta})^{-1}(-t,x,-i\bar{x}/2)$ et que $\varphi''_{xx}(t,x,\eta(t,x)) = -(\frac{\partial \xi}{\partial \eta})^{-1}\ \frac{\partial \xi}{\partial y}\ (-t,x,-i\bar{x}/2)$

donc d'après (2.2) :

$$\frac{1}{4}\left|\varphi''_{\eta\eta}(t,x,\eta(t,x))\delta\eta\right|^2 - \left|\delta\eta\right|^2 = -\left|\varphi''_{x\eta}(t,x,\eta(t,x))\delta\eta\right|^2 \tag{2.9}$$

et aussi :

$$\frac{1}{4}\left|\varphi''_{\eta x}(t,x,\eta(t,x))\delta y\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\delta y\right|^2 - \left|\varphi''_{xx}(t,x,\eta(t,x))\delta y\right|^2 \tag{2.10}$$

Proposition : Nous venons de construire une fonction phase φ satisfaisant aux estimations (2.3) bis et vérifiant l'équation eiconale (2.7), (2.8).

L'étape suivante consiste à rechercher un "bon" chemin vérifiant 2.15 dans le domaine complexe pour la phase $H(t,y;x,\eta) = -\operatorname{Im}(\varphi(t,x,\eta)-y\eta) - \varphi_0(x)$ définie pour $(t,x) \in \mathcal{U}_0$. $H_x' = -\frac{2}{i}\varphi_x'(t,x,\eta)$, $H_\eta' = -\frac{2}{i}(y-\varphi_\eta'(t,x,\eta))$ sur Λ_t. Le point $x = x(t,y)$, $\eta = \frac{2}{i}\varphi_0'(y)$ est d'après (2.5) un point critique de H puisque alors $\eta = \eta(t,x)$. Soit $\mathcal{U}_0^1 = \{(t,y)$ tq , $y \in V_0'$ et $\int_0^t |H_q(\rho(s;y,-i\bar{y}/2))|\,ds < \delta_0\}$ $(t,y) \in \mathcal{U}_0^1$ entraîne $(t,x(t,y)) \in \mathcal{U}_0$.

$$\frac{1}{2}\nabla^2_{x,\eta} H(t,y;x(t,y),\tfrac{2}{i}\varphi_0'(y))(\delta x,\delta\eta) = -\operatorname{Im}\Big[(\varphi''_{x\eta}\delta\eta,\delta x) + \tfrac{1}{2}(\varphi''_{xx}\delta x,\delta x) + \tfrac{1}{2}(\varphi''_{\eta\eta}\delta\eta,\delta\eta)) + \tfrac{1}{4}|\delta x|^2\Big]\ .$$

Si $\delta v = (\delta x,\delta\eta) \in \mathbb{C}^{2n}$, on note $\langle\delta v,\delta v'\rangle = \operatorname{Re}\, \delta x\ \overline{\delta x'} + \delta\eta\ \overline{\delta\eta'}$, ce qui permet d'exprimer $\frac{1}{2}\nabla^2_{x,\eta} H()(\delta v,\delta v) = \langle A\delta v,\delta v\rangle$ où A est l'opérateur symétrique par rapport à $\langle\,\rangle$ défini par $A(\delta x,\delta\eta) = (\widetilde{\delta x},\widetilde{\delta\eta})$ où

$$\begin{cases} \overline{\delta\tilde{x}} = \frac{i}{2}\left[\varphi''_{xx}\ \delta x + \varphi''_{x\eta}\ \delta\eta\right] - \frac{1}{4}\ \overline{\delta x} \\ \overline{\delta\tilde{\eta}} = \frac{i}{2}\left[\varphi''_{\eta x}\ \delta x + \varphi''_{\eta\eta}\ \delta\eta\right] \end{cases}$$

Utilisant encore (2.5) et (2.2) on trouve que :

$$\frac{1}{4}\left|\widetilde{\delta\eta}\right|^2 - \left|\delta\eta\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\delta x\right|^2 - \left|\frac{1}{2}\ \delta x + 2\ \widetilde{\delta x}\right|^2 = -\ 4\left|\widetilde{\delta x}\right|^2 - 2\ \mathrm{Re}\ \delta x\ \overline{\widetilde{\delta x}}$$

puisque $(\varphi''_{\eta\eta}(t,x,\eta(t,x))\delta\eta + \varphi''_{\eta x}()\delta x,\delta\eta) = m(t,x)\ .\ (\delta x,\varphi''_{xx}()\delta x + \varphi''_{x\eta}()\delta\eta)$ (2.11) où $m(t,x) = g(-t,x,-i\bar{x}/_2)$ où $g(t,\bar\rho)$ satisfait à $\begin{cases} \frac{dg}{dt}\ (t,\bar\rho) = F_q(\rho(t,\bar\rho))g & \text{pour } \bar\rho \in \Lambda_o. \\ g\big|_{t=0} = I \end{cases}$

Si $(t,y) \in \mathcal{U}_o^1$, $m(t,x)$ et $m^{-1}(t,x)$ ont une norme majorée par $\exp(h(t))$, donc $|\delta x| \leq C_o \exp(h(t))\ (|\delta\eta| + |\widetilde{\delta\eta}|)$, donc $|A(t,y)^{-1}| \leq C_1 \exp(C_1\ h(t))$ pour $(t,y) \in \mathcal{U}_o^1$.

$|A(t,y)| \leq C_1$ et $|d^jA(t,y)| \leq C_j \exp(C_j\ h(t))\ (|\delta t| + |\delta y|)^j$ pour $(t,y) \in \mathcal{U}_o^1$.

Spec $A(t,y) \subset \{z \in \mathbb{R}\ ,\ C_1^{-1} \exp(-C_1\ h(t)) \leq |z| \leq C_1\}$. A est symétrique, non dégénérée et de signarure zéro.

Si on introduit le projecteur orthogonal $P(t,y)$ sur l'espace engendré par les valeurs propres positives $P(t,y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma(t)} \frac{dz}{z-A(t,y)}$ $\Gamma(t)$ est un chemin dans le plan complexe où la distance au spectre de $A(t,y)$ est au moins $\frac{1}{2}\ C_1^{-1} \exp(-C_1\ h(t))$. On déduit donc des estimations de la forme $|d^j\ P(t,y)| \leq C_j \exp(C_j\ h(t))\ (|\delta t| + |\delta y|)^j$.

$P(t,y)\ v = (P'(t,y)v,\ P''(t,y)v)$ où P' et P'' sont $\mathbb{R}$ linéaires de $\mathbb{C}^{2n}$ dans $\mathbb{C}^n$.

Soit $M(t,y) = \mathrm{Im}\ P(t,y)$ $\dim_{\mathbb{R}} M(t,y) = 2n$, l'application $(\delta x,\delta\eta) \in M(t,y) \to \delta\eta$ est injective car $\frac{1}{2}\ \nabla^2_{x,\eta}\ H(t,y)\ .\ (\delta x,0) = -\ \mathrm{Im}\ \frac{1}{2}\ (\varphi''_{xx}()\delta x,\delta x) - |\delta x|^2/4$ et d'après (2.11) $|\delta y| \leq \exp(h(t))\ |\varphi''_{\eta x}()\delta y|$ donc d'après (2.10) $|\varphi''_{xx}()\delta y|^2 \leq \frac{1}{4}\ (1-\exp(-2\ h(t)))|\delta y|^2$ soit $k(t) = (1-\exp(-2\ h(t)))^{1/2}$. Ce qui fait que $\frac{1}{2}\ \nabla^2_{x\eta}\ H(t,y).(\delta x,0) \leq -\ \frac{1}{4}\ (1-k(t))|\delta x|^2$;

Il existe donc un opérateur $\mathbb{R}$ linéaire $Z(t,y)\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tel que $M(t,y) = \{(Z(t,y)\delta\eta, \delta\eta),$ $\delta\eta \in \mathbb{C}^n$. On a alors les relations :

$$P'(t,y) = Z(t,y)\ P''(t,y) \quad , \quad P''(t,y)\ (Z(t,y)\eta,\eta) = \eta$$

et
$$Z(t,y).\eta = P'(t,y)\ (Z(t,y)\eta,\eta) \tag{2.12}$$

On trouve donc que $Z(t,y)$ est C^∞ ; puisque si $\delta x = Z\delta\eta$

$$0 \leqslant -\frac{1}{4}|\delta x|^2 + \frac{1}{4}\,k(t)|\delta x|^2 + |\delta x||\delta\eta| + |\delta\eta|^2 \leqslant -\frac{1}{4}(1-k(t)-\varepsilon(t))|\delta x|^2 + |\delta\eta|^2(1+\varepsilon(t)^{-1})$$

D'où
$$|Z(t,y)| \leqslant C\exp(C\ h(t)) \tag{2.12 bis}$$

On déduit de (2.12)
$$D^\alpha Z\ P'' + \sum_{|\beta|<|\alpha|} (\ )\ D^\beta Z\ D^\gamma P'' - D^\alpha P' = 0$$

$$D^\alpha Z.\eta + \sum_{|\beta|<|\alpha|} D^\beta Z\ D^\gamma P''\ (Z\eta,\eta) - D^\alpha P'(Z\eta,\eta) = 0$$

Donc pour tout $j \in \mathbb{N}$ on trouve C_j tels que $|d^jZ(t,y)| \leqslant C_j\exp(C_j\ h(t))\ (|\delta t| + |\delta y|)^j$ pour $(t,y) \in \mathcal{U}_0^1$, on a assuré que :

$$\frac{1}{2}\nabla^2_{x,\eta} H(t,y)\ (Z(t,y)\eta,\eta) \geqslant C_1^{-1}\exp(-C_1\ h(t)).(|\delta\eta|^2 + |Z(t,y)\delta\eta|^2) \tag{2.14}$$

Si $|\Delta\eta| = |\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)| \leqslant \delta\, e^{-A\ h_1(t)}$ $\Delta x = Z(t,y).(\Delta\eta)$, $|\Delta x| \leqslant \delta_1\, e^{-A_1\ h_1(t)}$. Si $x = x(t,y) + \Delta x$, $\eta = \frac{2}{i}\varphi_0'(y) + \Delta\eta$ $H(t,y;x,\eta) = H(t,y;x(t,y), \frac{2}{i}\varphi_0'(y)) + \frac{1}{2}\nabla^2_{x\eta} H().$ $(\Delta x,\Delta\eta) + \mathcal{O}(|\Delta x| + |\Delta\eta|)^3\, e^{h_1(t)}$. Si $\delta_2 > 0$ et $A_2 > 0$ sont fixes, si on a choisit δ assez petit et A assez grand le reste est majoré par $(|\Delta x|^2 + |\Delta\eta|^2)\, e^{-A_2\ h_1}\ \delta_2$. Il existe donc δ assez petit et A assez grand pour que :

$$H(t,y,x,\eta) \geqslant -\varphi_0(y) + \frac{1}{2}C_1^{-1}\exp(-C_1\ h(t))\ (|\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)|^2 + |x-x(t,y)|^2)$$

pour $|\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)| \leqslant \delta\, e^{-A\ h_1(t)}$ et $x = x(t,y) + Z(t,y).(\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y))$ (2.15)

On a donc déterminé en (2.15) un bon contour d'intégration pour H, que l'on désigne par $\Gamma_{t,y}$.

III - L'équation de transport

Soit $Q(x, \frac{Dx}{\lambda}, \lambda)\, v(x,\lambda) = \int_{\Gamma_x} q(x,\theta,\lambda)\, e^{i\lambda(x-y)\theta}\, v(y,\lambda) \frac{dy \wedge d\theta}{(2\pi)^n}$, l'o.p.d. dans le domaine complexe obtenu en I), Q opère de $C^\infty(V)$ dans $C^\infty(V_1)$. Soit $\widetilde{W}$ $\widetilde{W} = \{(t,y) \in \mathcal{U}_o^1 | x(t,y) \in V_2\}$ où $V_2 \subset\subset V_1$, il est clair que $y \in V_o''$ voisinage et x_o et $\int_o^t |H_q(\rho(s,y,-i\overline{y}/_2))|\,|ds| < \delta_o'$ entrainent $(t,y) \in W$.

On voit par le lemme de Gronval qu'il existe $K > 0$ tel que $|\overline{\mu}-\mu_o| \leq K^{-1}\, e^{-Kh(t)}$ et $(t,\mu_o) \in \mathcal{U}_o^1$ entrainent

$$|\mu(s,\overline{\mu}) - \mu(s,\mu_o)| \leq 2\exp(h(s))|\overline{\mu} - \mu_o| \text{ pour } |s| \leq |t| \tag{3.1}$$

Donc en se plaçant dans $\mathcal{U}_o^2 = \{(t,y) | y \in V_o'' \text{ et } \int_o^t |H_q(\rho(s;y,-i\overline{y}/_2))|\ |ds| < \delta_o'\}$ on assure que $(t,\overline{y}) \in \mathcal{U}_o^1$ au moins si $|y-\overline{y}| \leq K_1^{-1}\, e^{-K_1\, h(t)}$ et $(t,y) \in \mathcal{U}_o^2$. Pour $(t,y) \in \mathcal{U}_o^3$, on trouve que $(-t,x(t,y)) \in \mathcal{U}_o^2$, si δ et A^{-1} ont été choisis assez petits dans la définition de $\Gamma_{t,y}$ si $(x,\eta) \in \Gamma_{t,y}$ on obtient $(-t,x) \in \mathcal{U}_o^1$, $(t,y(t,x)) \in \mathcal{U}_o^1$.

Soit $S^{m,c}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{C}^{2n})$ pour $m \in \mathbb{R}$ et $c > 0$ l'espace des fonctions $e(t,x,\eta,\lambda)$ C^∞ en $(t,x,\eta) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{C}^{2n}$ satisfaisant à $|D_t^p\, D_x^\alpha\, D_\eta^\beta\, e(t,x,\eta,\lambda)| \leq C_{p,\alpha,\beta}\, e^{-ct}\, \lambda^m$ pour $\lambda \geq 1$; $\overline{\partial}_{x,\eta} e$ est nul d'ordre ∞ sur $\eta = \eta(t,x)$, $S_{c\ell}^{m,c}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{C}^n)$ est le sous-espace de $S^{m,c}$ constitué par le $e(t,x,\eta,\lambda)$ telles qu'il existe des fonctions $e_j(t,x,\eta)$, pour lesquelles $\lambda^{m-j}\, e_j(t,x,\eta) \in S^{m-j,c}$ et $e(t,x,\eta) - \sum_{j=o}^{N-1} e_j(t,x,\eta)\lambda^{m-j} \in S^{m-N,c}$. Si $e(t,x,\eta,\lambda) \in S^{m,c}$ on pose $Ev(t,y,\lambda) = \int_{\Gamma_{t,y}} e^{-i\lambda[\varphi(t,x,\eta)-y\eta]}\, e(t,x,\eta,\lambda)\, v(x,\lambda) \frac{dx \wedge d\eta}{(2\pi)^n}$ (*) .

Pour $(t,y) \in \mathcal{U}_o^3$, on voit que le long de $\Gamma_{t,y}$

$$|\eta-\eta(t,x)| \leq \left[|\eta- \tfrac{2}{i}\varphi_o'(y)| + |y-y(t,x)|\right] \leq C\, e^{h(t)}\, (|\eta- \tfrac{2}{i}\varphi_o'(y)| + |x(t,y)-x|) \tag{3.2}$$

d'après (3.1).

On a $Qv(x,\lambda) = \int_{\Gamma_x} e^{i\lambda(x-z)\zeta} q(x,\zeta,\lambda)\ v(z,\lambda) \frac{dz\wedge d\zeta}{(2\pi)^n}$

où $\Gamma_x : \zeta = \frac{2}{i}\varphi_0'(x) + Ri(\overline{x-z}),\ |x-z| \leqslant r$ pour $x \in V_1(x_0)$.

On pourra toujours supposer que R a été choisi plus grand qu'une constante arbitraire donnée, puis fixer r assez petit, en conséquence. Pour $(t,y)\in \mathcal{U}_0^3$, on peut composer E et Q sous la forme :

$$(EQv)(t,y,\lambda) = \int_{\widetilde{\Gamma}^0_{t,y}} e^{i\lambda(y\eta-\varphi(t,x,\eta)+(x-z)\zeta)} e(t,x,\eta,\lambda)\ q(x,\zeta,\lambda)\ v(z,\lambda) \frac{dx\wedge d\eta\wedge dz\wedge d\zeta}{(2\pi)^{2n}}$$

où $\widetilde{\Gamma^0_{t,y}}$ est défini par :

$$\left\{\begin{array}{l} x = x(t,y) + Z(t,y)\ (\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)) \\ |\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)| \leqslant \delta\ e^{-A\ h_1(t)} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} |x-z| \leqslant r \\ \zeta = \frac{2}{i}\varphi_0'(x)+iR(\overline{x-z}) \end{array} \tag{3.2}$$

Nous allons montrer que EQv modulo des restes négligeables est de la forme (*) avec un symbole $\bar{e}$ dont on spécifiera les propriétés (voir (3.21) bis page 30).

Sur $\widetilde{\Gamma^0_{t,y}}$

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Im}(-\varphi(t,x,\eta) - y\eta) - \varphi_0(x) \geqslant - \varphi_0(y) + \frac{1}{2}C_1^{-1}\exp(-C_1\ h_1(t))(|\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)|^2+|x-x(t,y)|^2) \\ \operatorname{Im}((x-z)\zeta) - \varphi_0(z) \geqslant - \varphi_0(x) + \frac{R}{2}|x-z|^2 \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Posant $X(t,y,\eta) = x(t,y) + Z(t,y)\ (\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y))$. On introduit les chemins $\Gamma^s_{t,y}$ $0 \leqslant s \leqslant 1$ (paramètrés par (η,ζ)) définis par :

$$\Gamma^s_{t,y} : \left\{\begin{array}{l} i\ R(\overline{x-z}) = (1-s)(\zeta - \frac{2}{i}\varphi_0'(X(t,y))) + s(\zeta-\varphi_x'(t,X,\eta)) \\ x = X(t,y,\eta) + s(x-z) \\ |\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)| \leqslant \delta_1'\ e^{-A_1'\ h_1(t)},\ |\zeta - \frac{2}{i}\varphi_0'(X(t,y,\eta))| \leqslant \delta_1'\ e^{-A_1'\ h_1(t)} \end{array}\right. \tag{3.4}$$

δ_1' assez petit et A_1' assez grand.

Il est clair que le bord de $\Gamma^s_{t,y}$ a des singularités.

Le long de $\Gamma^s_{t,y}$ on trouve que :

$$\text{pour } (t,y) \in \mathcal{U}_0^3\ (-t,x(t,y)) \in \mathcal{U}_0^2 \text{ et } |x(t,y) - X(t,y,\eta)| \leqslant \delta_1\ e^{-A_1\ h_1} \tag{3.5}$$

donc $(t,X) \in \mathcal{U}_o$ (d'après 3.1)

$$\varphi'_x(t,X,\eta) - \varphi'_x(t,x(t,y), \tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)) = \nabla^2\varphi(t,x(t,y), \tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)).(X-x(t,y),\eta-\tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)) +$$

$$+ e^{h_1}\,\mathcal{O}(|X-x|^2 + |\eta-\tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)|^2)$$

en effet le point $(t,(1-\sigma)x(t,y) + \sigma X(t,y,\eta))$ reste dans $\mathcal{U}_o$ d'après (3.1).

Comme les dérivées secondes de φ sont bornées sur $\eta = \eta(t,x)$ pour $(t,x) \in \mathcal{U}_o$, on en déduit que

$$|\varphi'_x(t,X,\eta) - \tfrac{2}{i}\varphi'_0(x(t,y))| \leqslant K(|X(t,y,\eta) - x(t,y)| + |\eta-\tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)|) ,$$

la même inégalité est alors valable pour

$$|\varphi'_x(t,X,\eta) - \tfrac{2}{i}\varphi'_0(X(t,y,\eta))| \leqslant K_1\exp(K_1 h(t))\ |\eta-\tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)| \leqslant K_2\,\delta'_1\,e^{-A_1h_1} \qquad (3.6)$$

d'après (2.12).

Donc le long de $\Gamma^s_{t,y}$ on trouve que $X(t,y,\eta) \in V_2(x_o)$ et que ζ reste dans W. De plus $|x-x(t,y)| \leqslant \delta_1\,e^{-A_1h_1} + \frac{1}{R}\left[\delta'_1\,e^{-A'_1h_1} + K_2\,\delta'_1\,e^{-A_1h_1}\right]$ d'où l'on concluera, d'après 3.1 que $(t,x) \in \mathcal{U}_o$ (pour un choix de δ'_1 assez petit et de A'_1 assez grand, pour $(t,y) \in \mathcal{U}^3_o$. Alors $z \in V$.

Le long de $\Gamma^s_{t,y}$ on a encore :

$$\operatorname{Im}(-\varphi(t,X,\eta) - y.\eta) - \varphi_o(X) \geqslant -\varphi_o(y) + \tfrac{1}{2}C_1^{-1}\exp(-C_1 h(t))\ (|\eta-\tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)|^2 +$$

$$|X-x(t,y)|^2) \qquad (3.7)$$

$$\varphi(t,x,\eta) - \varphi(t,X,\eta) - (x-X)\ .\ \varphi'_x(t,X,\eta) = (\overline{x-X}).\ \varphi'_{\underline{x}}(t,X,\eta) + \mathcal{O}(|x-X(t,y)|^2) \quad (3.7)\text{ bis}$$

En effet les dérivées secondes de φ aux points (t,X_σ,η) où $X_\sigma = (1-\sigma)X+\sigma x$ sont bornées car $(t,X_\sigma) \in \mathcal{U}_o$ et $|\eta(t,X_\sigma)-\eta| \leqslant |\eta-\tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)| + |\eta(t,X_\sigma) - \eta(t,x(t,y))|$

or d'après (3.1) $|\eta(t,X_\sigma) - \eta(t,x(t,y))| \leqslant 2 \ \exp(h(t))|X_\sigma - x(t,y)| \leqslant \delta_0 \ e^{-A_0 h_1(t)}$ (3.8)

où δ_0 et A_0 ne dépendent que du choix de δ_1' et A_1'.

Puisque $|X_\sigma - x(t,y)| < K^{-1} \ e^{-Kh(t)}$ d'après (3.5) et (3.6). De la même façon utilisant (2.12) :

$$|\varphi'_{\underline{x}}(t,X,\eta)| \leqslant C_N|\eta-\eta(t,X)|^N e^{h_1} \leqslant C_N|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(y)|^N(1+C^N \exp(NCh))e^{h_1} \leqslant K_N\delta_1' \ e^{-A_1' h_1}$$
$$|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(y)|^N \quad \forall N \geqslant 0 .$$

Donc :

$$\mathrm{Im}\Big[-\varphi(t,x,\eta)+\varphi(t,X,\eta)+(x-X)\varphi_X'(t,X,\eta)\Big] \geqslant -K_3|x-X(t,y)|^2 - \varepsilon|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(y)|^2 \exp(-C_1 h(t)) \quad (3.9)$$

$$\mathrm{Im}\ \zeta(x-z) = R|x-z|^2 + (1-s)\ \mathrm{Im}\ \tfrac{2}{i}\varphi_0'(X).(x-z) + s\ \mathrm{Im}\ \varphi_X'(t,X,\eta).(x-z).$$

D'après (3.4) $s(x-z) = x-X$ et $(1-s)\ (x-z) = X-z$. D'après (3.9) :

$$\mathrm{Im}(-\varphi(t,x,\eta)+\varphi(t,X,\eta)+\zeta(x-z))-\varphi_0(z) \geqslant -\varphi_0(X)-K_3|x-X(t,y)|^2 - |\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(y)|^2\ \varepsilon\ \exp(-C_1h(t)) +$$
$$R|x-z|^2 - k|X-z|^2$$

Comme $|x-X|$ et $|X-z|$ sont majorés par $|x-z|$ c'est le choix de R qui permet d'absorber $-k|X-z|^2$ et $-K_3|x-X|^2$. On conclut maintenant à l'aide de (3.7) que :

$$\mathrm{Im}(-\varphi(t,x,\eta)+\zeta(x-z)-y\eta)-\varphi_0(z) \geqslant -\varphi_0(y) + \tfrac{R}{4}|x-z|^2 + \tfrac{1}{3}\ C_1^{-1}\ \exp(-C_1h(t)).|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(y)|^2 +$$
$$+ \tfrac{R}{4}\ (|x-X|^2+|X-z|^2) \quad (3.10)$$

De plus le long de $\Gamma^s_{t,y}$ $|\eta-\eta(t,x)| \leqslant K\exp(Kh(t))|\eta-\tfrac{2}{i}\varphi_0'(y)| + 2\exp(h(t))|x-z|$ d'après (3.8)

$$|\zeta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(x)| \leqslant R|x-z| + C|X-x| + K(|X-x(t,y)| + |\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(y)|) + |x(t,y)-x| \leqslant K_4\ |x-z| +$$
$$+ C\ e^{Ch(t)}|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(y)|$$

Au total $|\eta-\eta(t,x)| + |\zeta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(x)| \leqslant K_5 \exp(K_5\ h(t))\ (|x-z| + |\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_0'(y)|)$ (3.11)

Le long du chemin $\frac{dx}{ds}(s,\eta,\zeta) = \frac{i}{R}(-2s+1)(\overline{\zeta - \frac{2}{i}\varphi_0'(X)}) + \frac{2is}{R}(\overline{\zeta - \varphi_x'(t,X,\eta)})$

$$\frac{dz}{ds}(s,\eta,\zeta) = i\,\frac{2(1-s)}{R}(\overline{\zeta - \frac{2}{i}\varphi_0'(X)}) + \frac{i(2s-1)}{R}(\overline{\zeta - \varphi_x'(t,X,\eta)})$$

$$V_s = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dz}{ds}\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \frac{d}{ds}\int_{\Gamma^s_{t,y}} f\, dx\wedge d\eta\wedge dz\wedge d\zeta = \int_{\Gamma^s_{t,y}} \mathcal{L}_{V_s}(f\, dz\wedge d\eta\wedge dz\wedge d\zeta)$$

$$\mathcal{L}_{V_s}(f\, dx\wedge d\eta\wedge dz\wedge d\zeta) = V_s \lrcorner\, \bar\partial f\wedge dx\wedge d\eta\wedge dz\wedge d\zeta + d(f\, V_s \lrcorner\, dx\wedge d\eta\wedge dz\wedge d\zeta)$$

$$f = e^{i\lambda(y\eta - \varphi(t,x,\eta) + (x-z)\zeta)}\, e(t,x,\eta,\lambda)\, q(x,\zeta,\lambda)\, v(z,\lambda)$$

Soit $R_s(t,y)\, v(\lambda)$ le 1er terme qui correspond à l'intégrale du $\bar\partial$ à l'intérieur, il est clair vu (3.10) et (3.11) que pour $v \in H_{\varphi_0}(V)$, $(t,y) \in \mathcal{U}_0^3$ on obtient

$$\left| R_s(t,y)\, v(\lambda)\right| \leqslant C_N\, \lambda^{-N}\, e^{-c't}\, e^{\lambda\varphi_0(y)} \tag{3.12}$$

Le second terme s'exprime par la formule de Stokes (puisque les points singuliers de $fr(\Gamma^s_{t,y})$ sont négligeables)

$$R_s'(t,y)\, v(\lambda) = \int_{\partial\Gamma^s_{t,y}} f\, V_s \lrcorner\, dx\wedge dy\wedge dz\wedge d\zeta$$

Notons l'inégalités :

$$\left|\zeta - \frac{2}{i}\varphi_0'(X(t,y,\eta))\right| \leqslant R|x-z| + K_1\exp(K_1\, h(t))\left|\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)\right| \tag{3.13}$$

On en déduit que sur $\partial\Gamma^s_{t,y}$ (où $\left|\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)\right| = \delta_1' e^{-A_1h_1(t)}$ ou $\left|\zeta - \frac{2}{i}\varphi_0'(X)\right| = \delta_1' e^{-A_1h_1(t)}$) la partie imaginaire de la phase domine :

$$k\, C_1^{-1}\exp(-C_1\, h(t))\, K_1^{-2}\exp(-2K_1h(t))\left[\delta_1' e^{-A_1'h_1}\right]^2 \geqslant \delta_1'' e^{-A_1''h_1(t)}$$

Comme $\exp(-c/2\,t - \lambda\,\delta_1''\exp(-A_1''h_1(t)) \leqslant C_n\,\lambda^{-n}$ pour $t \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ on en déduit aisément que :

pour $v \in H_{\varphi_0}(V)$, $(t,y) \in \mathcal{U}_0^3$ $|R_s'(t,y)\ v(\lambda)| \leq C_N\ \lambda^{-N}\ e^{-c't}\ e^{\lambda\ \varphi_0(y)}$ (3.14)

Il est clair également que la différence entre l'intégrale sur $\tilde{\Gamma}^o_{t,y}$ et $\Gamma^o_{t,y}$ vérifie des inégalités analogues. On est donc ramené à l'intégrale sur $\Gamma^1_{t,y}$; on définit $\Gamma'_{t,y}$ par les conditions :

$$z = X(t,y,\eta)\ ,\ \left|\eta - \frac{2}{i}\ \varphi_0'(y)\right| \leq \delta_1'\ e^{-A_1'\ h_1(t)}\ ;$$

$$iR(\overline{x-z}) = \zeta - \varphi_x'(t,z,\eta) \quad \text{et} \quad \left|\zeta - \varphi_x'(t,z,\eta)\right| \leq \frac{\delta'1}{2}\ e^{-A_1'\ h_1(t)}\ .$$

La différence entre $\Gamma^1_{t,y}$ et $\Gamma'_{t,y}$ porte sur une région où $\left\{|\zeta - \varphi_0'(z)| \leq \delta_1'\ e^{-A_1\ h_1}\right.$ et $\left.|\zeta - \varphi_x'()| > \frac{\delta_1'}{2}\ e^{-A_1'\ h_1}\right\}$ ou $\left\{|\zeta - \varphi_0'(z)| > \delta_1'\ e^{-A_1'\ h_1}\right.$ et $\left.|\zeta - \varphi_x'()| \leq \frac{\delta_1'}{2}\ e^{-A_1'\ h_1}\right\}$, vu (3.6) on a dans les deux cas $|x-z| + |\eta - \frac{2}{i}\ \varphi_0'(y)| \geq C\ e^{-K_1 h}\ \delta_1'\ e^{-A_1'\ h_1}$ et d'après (3.10) une majoration analogue à (3.14). On est donc amené à considérer pour $(t,y) \in \mathcal{U}_0^3$

$$(EQ\,v)_I(t,y,\lambda) = \int_{\Gamma'_{t,y}} e^{i\lambda(y\eta - \varphi(t,z,\eta))}\ c(t,y,z,\eta,\lambda)\ v(z,\lambda)\ \frac{dz \wedge d\eta}{(2\pi)^n}$$

où $\Gamma'_{t,y}$: $z = x(t,y) + Z(t,y).(\eta - \frac{2}{i}\ \varphi_0'(y))$; $\left|\eta - \frac{2}{i}\ \varphi_0'(y)\right| \leq \delta_1'\ e^{-A_1'\ h_1(t)}$

tandis que :

$$c(t,y,z,\eta,\lambda) = \int_{\gamma_1(z,\eta)} (-1)^n\ e^{i\lambda[\varphi(t,z,\eta) - \varphi(t,x,\eta) + (x-z)\zeta]} e(t,x,\eta,\lambda)\ q(x,\zeta,\lambda)\ \frac{dx \wedge d\zeta}{(2\pi\lambda^{-1})^n} \quad (3.15)$$

où $\gamma_1(z,\eta)$: $\left|\zeta - \varphi_x'(t,z,\eta)\right| \leq \frac{\delta_1'}{2}\ e^{-A_1'\ h_1(t)}$, $iR(\overline{x-z}) = \zeta - \varphi_x'(t,z,\eta)$ est défini seulement pour $(-t,z) \in \mathcal{U}_0^1$ le long de $\gamma_1(z,\eta)$, $(t,x) \in \mathcal{U}_0$, ainsi que les points $x_\sigma = (1-\sigma)z + \sigma x$

$$\varphi(t,x,\eta) - \varphi(t,z,\eta) = H(t,z,x,\eta).(x-z) + (\overline{x-z}).\ H_1(t,z,x,\eta)$$

où $H(t,z,x,\eta) = \int_0^1 \varphi_x'(t,x_\sigma,\eta)dt$ et d'après (3.8)

$$\left|\eta - \eta(t,x_\sigma)\right| \leq C'\ \exp(C'h(t))\ \left(\left|\eta - \frac{2}{i}\ \varphi_0'(y)\right| + \left|x-z\right|\right) \leq K'\ \delta_1'\ e^{-A_1'\ h_1(t)/2} \quad (3.16)$$

et donc $\left|H_1(t,z,x,\eta)\right| \leqslant C_N' \, e^{-A_1'/2 h_1(t)} \delta_1' \left(\left|\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)\right| + \left|x-z\right|\right)^N$ (3.17)

et aussi $H(t,z,x,\eta) = \varphi_x'(t,z,\eta) + \mathcal{O}(|x-z|)$ (3.18)

Donc sur $\gamma_1(z,\eta)$ $\operatorname{Im}(-(x-z)H(t,z,x,\eta) + (x-z)\zeta) \geqslant R|x-z|^2 - k|x-z|^2 \geqslant \frac{R}{2}|x-z|^2$ (3.19)

On introduit encore les chemins $\gamma_1^s(z,\eta)$: $\zeta = (1-s)\varphi_x'(t,z,\eta) + s\,H(t,z,x,\eta) + iR(\overline{x-z})$, $R|x-z| \leqslant \frac{1}{2}\delta_1' \, e^{-A_1' h_1(t)}$ le long de γ_1^s $\operatorname{Im}((x-z)\zeta - (x-z)\,H(t,z,x,\eta)) \geqslant \frac{R}{2}|x-z|^2$.

De plus $\left|\zeta - \frac{2}{i}\varphi_0'(x)\right| + \left|\eta - \eta(t,x)\right| \leqslant K' \exp(K' h(t)) \left(|x-z| + \left|\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)\right|\right)$. Donc modulo 2 restes satisfaisants à des estimations 3.13 et 3.14 on est ramené à :

$$(EQ\,v)_{II}(t,y,\lambda) = \int_{\Gamma'_{t,y}} e^{i\lambda(y\eta - \varphi(t,z,\eta))} \, c'(t,y,z,\eta,\lambda) \, v(z,\lambda) \, \frac{dz \wedge d\eta}{(2\pi)^n}$$

où $$c'(t,z,\eta,\lambda) = \int_{|x| \leqslant R^{-1}\delta_1' e^{-A_1 h_1(t)}} e^{-\lambda R|x|^2} \, e(t,z+x,\eta,\lambda) \, q(x+z,H(t,z,z+x,\eta) + iR\bar{x},\lambda) \, (iR)^n \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(2\pi)^n} \lambda^n$$

modulo un reste provenant des $\partial_{\bar{x}} H_i$ qui satisfait (3.14) vu (3.16). On développe $c'(t,z,\eta,\lambda)$ par la formule de la phase stationnaire, qui s'écrit pour tout $N \in \mathbb{N}$ comme :

$$\sum_{|\alpha| \leqslant N-1} \lambda^{-|\alpha|} \frac{1}{\alpha!} R^{-|\alpha|} \, \partial_x^\alpha \partial_{\bar{x}}^\alpha \left[e(t,x+z,\eta,\lambda) \, q(x+z,H(t,z,z+x,\eta) + iR\bar{x},\lambda)\right]\Big|_{x=0} + \, R_N(t,z,\eta,\lambda) \quad (3.20)$$

où $|R_N(t,z,\eta,\lambda)| \leqslant C_N \, e^{-c't} \lambda^{m-N}$.

Dans le calcul du 1er terme les termes qui font intervenir des dérivées anti-holomorphes de e ou de q et de H donnent une contribution qui s'estime par : $C_N \, e^{-c't} \left|\eta - \frac{2}{i}\varphi_0'(y)\right|^N$ $\forall N$, et donneront donc dans $(EQv)_{II}$ une contribution satisfaisant à 3.13. Quitte à changer R_N on remplace e et q par leurs développement en sommes de termes homogènes, on néglige aussi les termes qui contiennent $\bar{\partial}$. On obtient donc une somme de termes :

$$\lambda^m e_m(t,z,\eta)\; q_o(z,\varphi'_z(t,z,\eta)) + \lambda^{m-1}\Big[-\frac{1}{i}\, q'_{o\xi}(z,\varphi'_z)\cdot\partial_z\; e_m(t,z,\eta) +$$

$$+\frac{i}{2}\,\partial^2_{\xi\xi}\; q_o(z,\varphi'_z)\cdot\varphi''_{xx}(t,x,\eta)\; e_m + q_1(z,\varphi'_z)e_m$$

$$+ i\; e_m\; q''_{o\xi x}(z,\varphi'_z) + q_o(z,\varphi'_z)e_{m-1}\Big]$$

$$+ \dots + \lambda^{m-j}\; R_j(e_m,\dots,e_{m-j}) + \dots \tag{3.21}$$

On considère un symbole $\bar{e}(t,x,\eta,\lambda) \in S^{m,c'}_{c\ell}$ où $c' < c$ équivalant asymptotique à cette somme et on obtient : $\forall N \in \mathbb{N}$

$$(EQv)_I(t,y,\lambda) = \int_{\Gamma'_{t,y}} e^{i\lambda[y\eta-\varphi(t,x,\eta)]}\; \bar{e}(t,x,\eta,\lambda)\; v(x,\lambda)\; \frac{dx\wedge d\eta}{(2\pi)^n} + \bar{R}(t,y,\lambda) \text{ où}$$

$$|\bar{R}\;(t,y,\lambda)| \leqslant C_N\; e^{-c't}\; \lambda^{-N}\; e^{\lambda\varphi_o(y)} \quad \text{pour } (t,y) \in \mathcal{U}^3_o \;,\; \forall N \in \mathbb{N}. \tag{3.21 bis}$$

$$\bar{e}_m(t,x,\eta) = e_m(t,x,\eta)\; q(x,\varphi'_x(t,x,\eta)) \tag{3.22}$$

$$\bar{e}_{m-1} = \frac{1}{i}\Big[-q'_\xi(x,\varphi'_x)\,\frac{\partial e_m}{\partial x}\,(t,x,\eta) + (iq_1 - \frac{1}{2}\, q''_{\xi\xi}\;\varphi''_{xx} - q''_{\xi x})\; e_m + q\; e_{m-1}\Big] \tag{3.23}$$

Si $L = -\,q'_\xi(x,\varphi'_x(t,x,\eta))\,\frac{\partial}{\partial x}$ div $L = -\,q''_{\xi\xi}(x,\varphi'_x)\varphi''_{xx} - q''_{\xi x} + \mathcal{O}((\eta-\eta(t,x))^\infty)e^{h_1(t)}$

c'est-à-dire que modulo $\mathcal{O}\,((\eta-\eta(t,x))^\infty)e^{h_1}\; e_m$

$$\bar{e}_{m-1} = \frac{1}{i}\Big[L(e_m) + \frac{1}{2}\,(\text{div } L)e_m + i(q_1 - \frac{1}{2i}\, q''_{\xi x})e_m + q\; e_{m-1}\Big]$$

correspondant au calcul de $-\frac{1}{\lambda}\, D_t E + EQ$ on trouve pour symbole principal

$e_m(t,x,\eta)\;(\varphi'_t + q(x,\varphi'_x(t,x,\eta)))$; l'équation de transport devenant :

$$\frac{1}{i}\Big[\;\frac{\partial e}{\partial t} + q'_\xi(x,\varphi'_x)\;\frac{\partial e}{\partial x}\;\Big] + \frac{1}{2i}\;(\text{div } L)e + q^s_1(x,\varphi'_x)e \tag{3.24}$$

On posera $\quad L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + q'_\xi(x,\varphi'_x(t,x,\eta))\;\frac{\partial}{\partial x}$ (3.25)

L'étape suivante est maintenant de construire E et e de façon à satisfaire l'équation de Schrödinger ce que nous ferons en (3.34) et (3.35).

On a vu que pour $(t,y) \in \mathcal{U}^3_o$ le long de $\Gamma'_{t,y}$ le point (t,x,η) appartient à

$$\mathcal{U}' = \Big\{(t,x,\eta)\Big|\, x \in V'(x_o)\; \int_o^{-t} \Big|H_q(\rho\,(s,x,\frac{2}{i}\;\varphi'_o(x)))\Big|\;\Big|ds\Big| < \delta' \;,\; \Big|\eta-\eta(t,x)\Big| < \delta'_o\; e^{-A'_o h_1}\Big\}$$

où $\delta'_o\, e^{-A'_o h_1} \geqslant \left[1 + 2C \exp((C+1)h(t))\right]\delta'_1\, e^{-A'_1 h_1}$, on prouve :

Lemme 3.1 : Si δ'_1 et $\frac{1}{A'_1}$ ont été choisis assez petits, l'application $F : (t,x,\eta) \to (t,\varphi'_\eta(t,x,\eta),\eta)$ est un C^∞ difféomorphisme sur $\mathcal{U}'$. De plus si ε, δ_2 et A_2^{-1} sont assez petits $F(\mathcal{U}')$ contient

$$\mathcal{V}_o = \left\{(t,y,\eta) \,\middle|\, |y-x_o| < \varepsilon\ ,\ \int_o^t \left|H_q(s,y,\tfrac{2}{i}\varphi'_o(y))\right| |ds| < \varepsilon\ ,\ \left|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi'_o(y)\right| < \delta_2\, e^{-A_2 h_1(t)}\right\}.$$

Démonstration : Si $(t,x,\eta) \in \mathcal{U}'$, alors $(t,x) \in \mathcal{U}_o$ et $|\varphi''_{x\eta}(t,x,\eta(t,x))^{-1}| \leqslant \exp(h(t))$, $|\varphi''_{x\eta}(t,x,\eta(t,x))| \leqslant 1$. Or

$$|\varphi''_{\eta x}(t,x,\eta)| + |\varphi''_{\eta x}(t,x,\eta) - \varphi''_{\eta x}(t,x,\eta(t,x))| \leqslant C_3\, e^{h_1}\, \delta'_o\, e^{-A'_o h_1}\ ,$$

donc $|F'(t,x,\eta)^{-1}| \leqslant K\, e^{h(t)}$, donc F est un isomorphisme local. Si $F(t,x_1,\eta) = F(t,x_2,\eta)$ on trouve que $|\eta(t,x_1) - \eta(t,x_2)| \leqslant 2\,\delta'_o\, e^{-A'_o h_1}$ soit $|y(t,x_2) - y(t,x_1)| \leqslant 4\,\delta_o\, e^{-A'_o h_1}$, utilisant (3.1) on trouve que $|x_1-x_2| \leqslant 8 \exp(h(t))\,\delta'_o\, e^{-A'_o h_1}$ utilisant encore (3.1), on peut supposer que $(t,x_\tau) \in \mathcal{U}_o$ si $x_\tau = (1-\tau)x_1+\tau x_2$, $o \leqslant \tau \leqslant 1$, par la formule de Taylor on trouve que $x_1 = x_2$ si $|x_1-x_2| < \left[2C_3 \exp(h(t) + h_1(t))\right]^{-1}$ qui est assuré par un choix convenable de δ'_1 et A'_1. D'où la première partie du lemme. La seconde partie du lemme, qui résulte également d'arguments élémentaires est omise.

On introduit la classe $\mathcal{O}(\mathcal{U}')$ des fonctions C^∞ dans $\mathcal{U}'$ satisfaisant à

$$|d^j f(t,x,\eta)| \leqslant C_{j,N} \exp(C_{j,N}\, h_1(t))\, |\eta-\eta(t,x)|^N\, (|\delta t|+|\delta x|+|\delta\eta|)^j \quad \forall j,N\ .$$

Soit $V = F^*(L_1) = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t,x,\eta)\frac{\partial}{\partial y_j} + a'_j(t,y,\eta)\frac{\partial}{\partial \bar{y}_j}$ champ de vecteur sur $F(\mathcal{U}')$;

on calcule $a_j o F(t,x,\eta) = L_1(\varphi'_{\eta_j})(t,x,\eta) \in \mathcal{O}(\mathcal{U}')$ d'après (2.7).

$$a_j' o F(t,x,\eta) = L_1(\overline{\varphi}'_{\eta_j}) = \overline{\varphi}''_{t,\eta_j} + \sum_{\ell=1}^{n} q'_{\xi_\ell}(x,\varphi'_x)\,\overline{\varphi}''_{x_\ell \eta_j}(t,x,\eta) = \overline{\varphi}''_{t,\eta_j}(t,x,\eta) + \mathcal{O}(\mathcal{U}')$$

On note $F^{-1}(t,y,\eta) = (t,g(t,y,\eta),\eta)$; il est clair que $|d^j g(t,y,\eta)| \leqslant C_j \exp(C_j h_1(t)))$ $(|\delta t| + |\delta y| + |\delta\eta|)^j$.

On utilise le lemme :

<u>*Lemme*</u> <u>*3.2*</u> *:* <u>*Si*</u> *$(t,x,\eta) \in \mathcal{U}'$* <u>*et*</u> *$(t,y,\eta) = F(t,x,\eta)$,* <u>*on*</u> <u>*a*</u> <u>*les*</u> <u>*inégalités*</u> *:*

$$\left|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_o'(y)\right| \leqslant K' \left|\eta - \eta(t,x)\right| \leqslant K'' \exp(K'' h(t)) \left|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_o'(y)\right| \tag{3.27}$$

La preuve du lemme, analogue à celle du lemme 3.1 est élémentaire. Il est donc clair que la composition par F^{-1} transforme $\mathcal{O}(\mathcal{U}')$ en l'espace $\mathcal{O}(F(\mathcal{U}'))$ des fonctions satisfaisant à

$$|d^j f(t,y,\eta)| \leqslant C_{j,N} \exp(C_{j,N}\, h_1(t)) \left|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi_o'(y)\right|^N \quad \forall j,N\ .$$

On trouve donc que $V = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \varphi''_{t,\eta_j} o F^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_j} + W$ où W a ses coefficients dans $\mathcal{O}$ (3.26)

On calcule :

$$\mathcal{L}_{L_1}(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \sum_{j,k=1\dots n} dx_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{L}_{q'_{\xi_k} \partial/\partial x_k}(dx_j) \wedge \dots \wedge dx_n \quad \text{, soit}$$

$$dt \wedge \mathcal{L}_{L_1}(dx) \wedge d\eta = (q''_{\xi\xi}(x,\varphi'_x)\cdot\varphi''_{xx} + \operatorname{tr} q''_{\xi x}(x,\varphi'_x))\,dt \wedge dx \wedge d\eta + \mathcal{O}(\mathcal{U}') \otimes \Lambda_{2n+1} \tag{3.28}$$

$$F_*^{-1}(dt \wedge dx \wedge d\eta) = (\det \tfrac{\partial g}{\partial y})\, dt \wedge dy \wedge d\eta + \mathcal{O}(F(\mathcal{U}')) \otimes \Lambda_{2n+1}$$

$\det \frac{\partial g}{\partial y} = (\det \varphi''_{\eta x})^{-1} o F^{-1} + \mathcal{O}(F(\mathcal{U}'))$. Notant que g est presque analytique sur $\eta = \frac{2}{i}\varphi_o'(y)$ on trouve que :

$$\mathcal{L}_V((\det \tfrac{\partial g}{\partial y})\,dt \wedge dy \wedge d\eta) = (\tfrac{d}{dt}(\det \varphi''_{\eta x})^{-1})\,dt \wedge dy \wedge d\eta + \mathcal{O}(F(\mathcal{U}')) \otimes \Lambda_{2n+1}$$

Notant que $\mathcal{L}_{L_1}(dt) = 0$ et $\mathcal{L}_{L_1}(d\eta_j) = 0$, on voit que $\mathcal{L}_{L_1}(dt \wedge dx \wedge d\eta) =$ $dt \wedge \mathcal{L}_{L_1}(dx) \wedge d\eta$.

De $F_*^{-1}(\mathcal{L}_{L_1}(dt \wedge dx \wedge d\eta)) = \mathcal{L}_V(F_*^{-1}(dt \wedge dx \wedge d\eta))$, on trouve que

$$q''_{\xi\xi}(x,\varphi'_x).\varphi''_{xx} + \operatorname{tr} q''_{\xi x}(x,\varphi'_x) = (\det \varphi''_{\eta x}) \frac{d}{dt} (\det \varphi''_{\eta x})^{-1} + \mathcal{G} \qquad \mathcal{G} \in \mathcal{O}(F(\mathcal{U}')) \tag{3.29}$$

On posera $h(t,x,\eta) = \varphi'_\eta(t,x,\eta)$. Notons que pour $(t,x,\eta) \in \mathcal{U}'$ $\left|q_1^s(x,\varphi'_x(t,x,\eta)) - q_1^s(x, \frac{2}{i}\varphi'_0(x))\right| < c\, \delta'_0 \exp(-A'_0\, h_1(t))$ à cause de (2.12).

Donc dans $\mathcal{V}_0$ $\qquad (\operatorname{Im} q_1^s)\,(t,y,\eta) \geq \bar{c}_0 > 0 \qquad$ (3.30)

Par ailleurs $\mathcal{V}_0$ étant simplement connexe, on peut définir $(\det \frac{\partial h}{\partial x})^{-1/2}$ comme une fonction sur $\mathcal{V}_0$.

$$\text{Soit } \mathcal{V}_j = \Big\{(t,y,\eta) \mid |y-x_0| < \varepsilon'_j\ ,\ \int_0^t |H_q(s,y,\tfrac{2}{i}\varphi'_0(y))|\,|ds| < \varepsilon_j\ ,$$
$$\left|\eta - \tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)\right| < \delta_2^j\, e^{-A_2^j h_1(t)}\Big\} \tag{3.31}$$

De sorte que $\mathcal{V}_0 \supset \mathcal{V}_{j+1} \supset \bar{\mathcal{V}}_j$.

Si $a \in \tilde{S}^{m,c_0}(\bar{\mathbb{R}}^+ \times \mathbb{C}^{2n})$* supporté par $\mathcal{V}_j$, la fonction $e(t,x,\eta) = a \circ F \in S^{m,c'_0}$ $(\bar{\mathbb{R}}^+ \times \mathbb{C}^{2n})$ ($c'_0 < c_0$ arbitrairement) et on a :

$$-\frac{1}{i} L_1\, e + \frac{1}{2i}(\operatorname{div} L)e + q_1^s(x,\varphi'_x)e = \Big[\Big(-\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\big(a(\det \tfrac{\partial h}{\partial x})^{-\frac{1}{2}}\big)(\det \tfrac{\partial h}{\partial x})^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ q_1^s\, a + r\Big] \circ F \tag{3.32}$$

où $\quad |d^\ell r(t,x,\eta)| \leq C_{\ell,N} |\eta - \eta(t,x)|^N e^{-c''_0 t}(|\delta t| + |\delta x| + |\delta\eta|)$ où $c''_0 < c'_0$ $\qquad$ (3.33)

est arbitraire.

Si $\mathcal{U}_j = \Big\{(t,y) \mid |y-x_0| < \varepsilon'_j\ ,\ \int_0^t |H_q(\rho(s,y,\frac{2}{i}\varphi'_0(y)))|\ |ds| < \varepsilon_j\Big\}$, par une

* Définition de $\tilde{S}^{m,c}$: comme précédemment sauf que $\bar{\partial} a$ doit être nul à l'ordre infini sur $\eta = \frac{2}{i}\varphi'_0$.

régularisation de la fonction caractéristique de $\mathcal{U}_j$, on construit une fonction $\omega_j(t,y)$ qui vaut 1 sur $\mathcal{U}_j$, à support des $\mathcal{U}_{j+1}$ et satisfaisant à des estimations :

$$|d^{\ell}\ \omega_j(t,y)\ (\delta t,\delta y)| \leq C_{\ell,j}\ \exp(C_{\ell,j}\ h(t))\ (|\delta t| + |\delta y|)^{\ell}\ .$$

Procédant ensuite comme au paragraphe 2, on construit une fonction $\omega_j(t,y,\eta)$ presque analytique sur $\eta = \frac{2}{i}\ \varphi_o'(y)$, supp $\omega_j \subset \left\{(t,y,\eta) \mid (t,y) \in \mathcal{U}_{j+1} \text{ et } |\eta - \frac{2}{i}\ \varphi_o'(y)| < \delta_j\ e^{-A_2\ h_1(t)}\right\}$,

$$|d^{\ell}\ \omega_j(t,y,\eta)(\delta t,\delta y,\delta\eta)| \leq C_{\ell,j}\ \exp(C_{\ell,j}\ h_1(t))\ (|\delta t| + |\delta y| + |\delta\eta|)^{\ell} \tag{3.33}$$

Dans ces conditions $\frac{d}{dt}\ \omega_j = \omega_j^1 + \omega_j^2$ où ω_j^1 et ω_j^2 satisfont à (3.33) et sont presque analytiques sur $\eta = \frac{2}{i}\ \varphi_o'(y)$, supp $\omega_j^1 \subset \left\{(t,y,\eta) \mid (t,y) \in \mathcal{U}_{j+1} \setminus \mathcal{U}_j, |\eta - \frac{2}{i}\ \varphi_o'(y)| < \delta_j\ e^{-A_2\ h_1(t)}\right\}$, ω_j^2 est nulle à l'ordre ∞ sur $\eta = \frac{2}{i}\ \varphi_o'(y)$. De même $(1-\omega_{j+1})\omega_j$ est nulle à l'ordre ∞ sur $\eta = \frac{2}{i}\ \varphi_o'(y)$. On peut maintenant intégrer les équations de transport en posant :

$$a_o = \omega_o(\det \frac{\partial h}{\partial x})^{1/2}\ \alpha_o\ \exp(i \int_o^t q_o^s(s,y,\eta)ds) \in \tilde{S}^{m,c_o}\ ,\ \text{supportée par } \mathcal{V}_1\ ,$$

où la fonction $\alpha_o(y,\eta)$ sera déterminée plus loin ; $e_o = a_o \circ F$, puis par récurrence

$$\begin{cases} -\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\ (\overline{a}_j \det ()^{-1/2}) \det ()^{1/2} + q_o^s\ \overline{a}_j = \overline{R}_j(a_o,\ldots,a_{j-1}) \\ \overline{a}_j\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$\overline{R}_j \in \tilde{S}^{m,c_j}$ supporté par $\mathcal{V}_{2j-1}$ et $a_j = \omega_{2j}\ \overline{a}_j$. Donc il est clair que $(1-\omega_{2j})\ \overline{R}_j()$ est nul d'ordre ∞ sur $\eta = \frac{2}{i}\ \varphi_o'(y)$. On trouve donc $a_j \in \tilde{S}^{m,c_j}$ supporté par $\mathcal{V}_{2j+1}$, les c_j forment une suite décroissante mais $c_j > c'$ donné. Procédant ainsi, on a résolu les équations de transport modulo des restes satisfaisant à des estimations (3.33) avec un facteur $e^{-c''t}$ fixe, d'après (3.2) l'intégrale sur $\Gamma_{t,y}'$ associée satisfait alors à une estimation

$$|\rho_N(t,y,\lambda)| \leqslant C_{N,\mu}\, e^{-c''t}\, \lambda^{-\mu}\, e^{\lambda\varphi_0(y)} \quad \forall \mu \geqslant 0 \text{ pour } (t,y) \in \mathcal{U}_0^3 \qquad (3.34)$$

Notons que comme le support de $e(t,x,\eta,\lambda)$ est contenu dans $\mathcal{U}''$ $\int_{\Gamma'_{t,y}} e^{-i\lambda(y\eta-\varphi)} e\, v\, dx \wedge d\eta$ a son support dans $\{(t,y)|(t,y) \in \mathcal{U}_0^3\}$.

Résumant la discussion, on a construit $e(t,x,\eta,\lambda) \in S^{m,c}_{c\ell}$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\left[-\frac{1}{\lambda} D_t E + EQ\right] v = R_N(t,y,\lambda) + \sum_{j=0}^{N'-1} \int_{\Gamma'_{t,y}} e^{i\lambda(y\eta-\varphi)}\, \tilde{e}_j(t,x,\eta)\lambda^{m-j}\, v\, dx \wedge d\eta \qquad (3.34)$$

où $|R_N(t,y,\lambda)| \leqslant C_N\, \lambda^{-N}\, e^{-c''t}\, e^{\lambda\varphi_0(t)}$ pour $v \in H_{\varphi_0}(V)$ (3.35)
(décrivant une partie bornée)

Soit $R'_N(t,y,\lambda)$ le second membre de (3.34), on va en faire une étude plus précise. Les $\tilde{e}_j$ proviennent eux des termes $(\omega^1_{2j}\, \bar{a}_j) \circ F^{-1}$, on voit à l'aide de (3.28) que si on a choisi δ_j assez petit par rapport à ε_{2j}, on aura sur le support de $\tilde{e}_j$ la relation

$$\bar{\varepsilon}_{j+1} \geqslant \int_0^{-t} |H_q(\rho(s,x, \tfrac{2}{i}\varphi'_0(x)))|\; |ds| \geqslant \bar{\varepsilon}_j \qquad (3.36)$$

et $|x-x_0| < \varepsilon'$, on aura aussi $\varepsilon''_0 \geqslant \bar{\varepsilon}_j \geqslant \varepsilon'_0$.

La relation (3.36) entraine que t est assez grand. On veut montrer que $\int_0^{+\infty} R'_N(t,y,\lambda)dt$ est à décroissance rapide. Notant que sur $\Gamma'_{t,y}$

$$\varphi'_t(t,x,\eta) = \varphi'_t(t,x,\eta(t,x)) + \mathcal{O}(1)\, (\eta-\eta(t,x)) \quad |\eta-\eta(t,x)| \leqslant K\, e^{Kh(t)}\, |\eta - \tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)|$$

d'après (3.2) $\varphi'_t(t,x,\eta(t,x)) = -q(x, \frac{2}{i}\varphi'_0(x))$, soit :

$$|\varphi'_t(t,x,\eta) + q(x, \tfrac{2}{i}\varphi'_0(x))| \leqslant K_1\, K\, e^{K\,h(t)}\, |\eta - \tfrac{2}{i}\varphi'_0(y)|$$

Etant donné δ_0 et A_0 (choisis plus loin) l'hypothèse $|q(x, \frac{2}{i}\varphi'_0(x))| \geqslant 2\delta_0\, e^{-A_0\, h_1(t)}$ entraine $|\varphi'_t(t,x,\eta)| \geqslant \delta_0\, e^{-A_0\, h_1(t)}$ sur une partie de $\Gamma'_{t,y}$, l'autre contribution donnant immédiatement de la décroissance rapide ; on peut alors intégrer par parties en t sous la forme :

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma'_{t,y}} e^{i\lambda(y\eta-\varphi)}\, e_1\, v\, dx\wedge d\eta = \int_{\Gamma'_{t,y}} \frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\,(e^{i\lambda(y\eta-\varphi)}\, e_1 v)dx\wedge d\eta + \frac{1}{\lambda}\int_{\Gamma'_{t,y}} \mathcal{L}_{V_t}\,(e^{i\lambda(y\eta-\varphi)}\, e_1 v)dx\wedge d\eta \tag{3.38}$$

$$V_t(x,\eta) = 2\mathrm{Re}(\frac{dx}{dt}\,(t,y) + \frac{dZ}{dt}\,(\eta-\frac{2}{i}\,\varphi'_0(y)) + Z(t,y)(\eta-\frac{2}{i}\,\varphi'_0(y))\; e^{A'_1 h_1}\frac{d}{dt}\,e^{-A'_1 h_1})\,\frac{\partial}{\partial x} + $$
$$+\; e^{A'_1 h_1}\frac{d}{dt}\,(e^{-A'_1 h_1})\,\frac{\partial}{\partial\eta}$$

Avec $e_1(t,x,\eta) = \chi(t,x,\eta)\; e(t,x,\eta,\lambda)\; /\; \varphi'_t(t,x,\eta)$ où $\chi(t,x,\eta)$ est une fonction presque analytique sur $\eta = \eta(t,x)$ supportée par $\{(t,x)|\; q(x, \frac{2}{i}\,\varphi'_0(x)) \geq 2\;\delta_0\; e^{-A_0\, h_1}\}$ (dont les dérivées croissent comme $e^{h_2(t)}$ où $h_2(t) = o(t)$ et $h_1 = o(h_2)$). La contribution du second membre de (3.38) vérifie (3.35). L'autre zone :

$$I = \int_{\Gamma'_{t,y}} (1-\chi(t,x,\eta))\; e^{i\lambda(y\eta-\varphi)}\; e\; v\; dx\wedge d\eta$$

Le support de $1-\chi(t,x,\eta)$ est contenu (par la construction de χ) dans $\{(t,x)|$ $q(x, \frac{2}{i}\,\varphi'_0(x)) < \delta_0\; e^{-A_0\, h_1}\}$. On trouve alors $x_1 \in q^{-1}(0)$ tel que $d(x,x_1) \leq c\;\delta_0$ $e^{-A_0\, h_1(t)}$ et aussi $\int_0^{-t} |H_q(\rho(s,x_1, \frac{2}{i}\,\varphi'_0(x_1))|\;|ds| \geq \varepsilon'_{0/2}$. D'après l'hypothèse $(H_1)_b$ relativement à ε'_0, il existe un voisinage V de x_0 et $\tilde{V}_1$ de x_0 tq $x_1 \in V\cap q^{-1}(0)$ entraîne $y(t,x_1) \notin \tilde{V}_1$. Soit $V_2 \subset\subset V$ tel que $|v(x,\lambda)| \leq e^{\lambda\varphi_0(x)}\,\mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$ uniformément sur tout compact disjoint de V_2 et $V_2 \subset\subset V'_2 \subset\subset V$; la contribution de $x \notin V'_2$ à I est à décroissance rapide ; pour $x \in V'_2$ on trouve $x_1 \in V$ avec $d(x,x_1) \leq C\;\delta_0\; e^{-A_0\, h_1(t)}$ et donc $y(t,x_1) \notin \tilde{V}_1$, comme $|x_1 - x(t,y)| \leq C\;\delta_0\; e^{-A_0\, h_1(t)} + C\; e^{Ch(t)}|\eta-\frac{2}{i}\,\varphi'_0(y)|$, si on ne conserve que la contribution essentielle de I on obtiendra $|y - y(t,x_1)| \leq C'\;\delta_0$ si δ_0 a été choisi assez petit $y \notin V_3$ où $V_3 \subset \tilde{V}_1$.

En définitive on a prouvé : si $\widetilde{WF}(v) \subset V_2$, et $y \in V_3$

$$\left|\int_0^{+\infty} R'_N(t,y,\lambda)dt\right| \leqslant C_N \lambda^{-N} e^{\lambda\varphi_o(y)} \quad \forall N .$$

On a désigné par $\widetilde{WF}(v)$ pour $v \in H_{\varphi_o}(\mathcal{V})$ l'ensemble de $\mathcal{V}$ dont le complémentaire par rapport à $\mathcal{V}$ est $\{x \in \mathcal{V} |$ il existe un voisinage de x dans lequel $|v(x,\lambda) e^{-\lambda\varphi_o(x)}$ soit à décroissance rapide$\}$.

Proposition : Il existe des voisinages V_2 et V_3 de x_o , une constante $c > 0$ telles que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $v \in H_{\varphi_o}(\mathcal{V})$ si $\widetilde{WF}(v) \subset V_2$ et $y \in V_3$

$$\left|\left(-\frac{D_t}{\lambda} E + EQ\right) v(y,\lambda)\right| \leqslant C_N \lambda^{-N} e^{-ct} \exp(\lambda \varphi_o(y)) .$$

IV - La trace sur t = 0 - La propagation des singularités

1) On calcule la trace sur t = 0 de la solution obtenue :

$$E(0)\, v(y,\lambda) = \int_{\Gamma'_{o,y}} e^{i\lambda(y\eta-\varphi(o,x,\eta))}\, e_o(o,x,\eta)\, v(x,\lambda)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{n/2} dx\wedge d\eta$$

$\varphi(o,x,\eta) = x.\eta + \mathcal{O}((\eta - \frac{2}{i}\varphi_o'(x))^\infty)$. Négligeant $\mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$ lorsque v décrit un borné de $H_{\varphi_o}(V)$ on remplace φ par $x.\eta$ (en réduisant éventuellement $\Gamma'_{o,y}$). On trouve par ailleurs que $\Gamma'_{o,y}$ est défini par $\left|\eta - \frac{2}{i}\varphi_o'(y)\right| \leqslant \delta$, $\eta - \frac{2}{i}\varphi_o'(y) = i\,\mu\,(\overline{y-x})$, que l'on peut déformer négligeant encore $\mathcal{O}(\lambda^{-\infty})$ dans le circuit habituel Γ'_y : $\left|\eta - \frac{2}{i}\varphi_o'(y)\right| \leqslant \delta_o$, $\eta - \frac{2}{i}\varphi_o'(y) = i\,R(\overline{y-x})$ où $R > 0$ est choisi convenablement.

Soit $E'(o)\, v(x,\lambda) = \int_{\Gamma'_x} e^{i\lambda(x-y)\eta}\, e_o(o,y,\eta)\, v(y,\lambda)\, \frac{dy\wedge d\eta}{(2\pi\lambda^{-1})^n}$. Reprenant le calcul de I 2) on montre que pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$E'(o)\, I_1 u = \int e^{i\lambda\varphi(x,z)}\, \chi_1(z)\, K_1(x,z,\lambda)\, u(z)\, dz \text{ modulo } \overset{V_1}{\sim} 0$$

où $K_1(x,z,\lambda)$ est un symbole classique presque analytique sur M, pour lequel

$$K_1^o(x_o,z(x_o)) = a_o(x_o,z_o)\, e_o(o,x_o,\tfrac{2}{i}\varphi_o'(x_o)) \neq 0$$

2) On va étudier le $\widetilde{WF}$ d'une expression

$$(Ev)(y,\lambda) = \int_o^{+\infty} dt \int_{\Gamma'_{t,y}} e^{+i\lambda(y\eta-\varphi(t,x,\eta))}\, e(t,x,\eta,\lambda)\, v(x,\lambda)\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n dx\wedge d\eta$$

où $e(t,x,\eta,\lambda) \in S^{m,c}_{c\ell}$, supp $e \subset \mathcal{U}'$.

Si V est un voisinage de $y \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$C_V(y) = \left\{x(t,\bar{y}) \mid \bar{y} \in V \cap q^{-1}(0) \text{ , } t \geqslant 0 \text{ et } \int_o^t |H_q(\rho(s,\bar{y},\tfrac{2}{i}\varphi_o'(\bar{y}))|\ |ds| \leqslant \delta\right\}$$

qui est compact.

On va prouver que s'il existe V tel que $C_V(y) \cap \widetilde{WF}(v) = \phi$ et si $y \notin \widetilde{WF}(v)$ alors

$y \notin \widetilde{WF}(Ev)$. On écrit $Ev = E^I v + E^{II} v$ où on a introduit la troncature pour $t \leqslant \varepsilon'$ dans E^I et pour $t \geqslant \frac{\varepsilon'}{2}$. Comme $y \notin \widetilde{WF}(v)$, il y a un voisinage $|y-x| \leqslant \varepsilon$ qui ne rencontre pas $\widetilde{WF}(v)$ si $|\bar{y}-y| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ le long de $\Gamma'_{t,\bar{y}}$ on a $|x-x(t,\bar{y})| \leqslant C\, e^{Ch(t)} |\eta - \frac{2}{i} \varphi_0'(\bar{y})|$, ce qui fait que pour la contribution de $\Gamma'_{t,\bar{y}}$ provenant de $|\eta - \frac{2}{i} \varphi_0'(\bar{y})|$ assez petit on aura $|x-y| \leqslant \varepsilon$ si ε' est assez petit par rapport à ε et donc une intégrale à décroissance rapide, l'autre contribution de l'intégrale est également à décroissance rapide. On a donc prouvé que $y \notin \widetilde{WF}(E^I v)$.

On va prouver maintenant si $C_V(y) \cap \widetilde{WF}(v) = \phi$ alors $y \notin \widetilde{WF}(E^{II} v)$

$$E^{II} v(\bar{y},\lambda) = \int \omega(t)\, dt \int_{\Gamma'_{t,\bar{y}}} e^{i\lambda(\bar{y}\eta - \varphi)}\, e\, v\, \frac{dx \wedge d\eta}{(2\pi\lambda^{-1})^n}$$

Etant donné des nombres δ_0 et $A_0 > 0$, comme dans la partie précédente on montre en utilisant des intégrations par parties en t, que modulo $O(\lambda^{-\infty})$ on peut se réduire à

$$E^{III} v(\bar{y},\lambda) = \int \omega(t)\, dt \int_{\Gamma'_{t,\bar{y}}} (1-\chi(t,x,\eta))\, e^{i\lambda(\bar{y}\eta - \varphi)}\, e\, v\, dx \wedge d\eta$$

où le support de $1-\chi$ est contenu dans $\left\{(t,x,\eta) \mid q(x, \frac{2}{i} \varphi_0'(x)) < \delta_0\, e^{-A_0 h_1(t)}\right\}$. Si $(x,\eta) \in \Gamma'_{t,\bar{y}}$, $(t,x,\eta) \in \operatorname{supp}[(1-\chi)e]$, on peut déterminer $x_1 \in q^{-1}(0)$ tel que $|x-x_1| < C\, \delta_0\, e^{-A_0 h_1(t)}$ et donc aussi $\int_0^{-t} |H_q(\rho(s,x_1, \frac{2}{i} \varphi_0'(x_1)))|\, |ds| \leqslant \delta$, le point $y_1 = y(t,x_1)$ satisfait à :

$$|y(t,x_1) - y(t,x)| \leqslant 2 \exp(h(t))\, |x-x_1| \text{ et } |y(t,x) - y(t,x(t,\bar{y}))| \leqslant$$
$$\leqslant K\, e^{Kh(t)}\, |\eta - \tfrac{2}{i} \varphi_0'(\bar{y})|$$

Dans la contribution de $\Gamma'_{t,\bar{y}}$ sur laquelle $|\eta - \frac{2}{i} \varphi_0'(y)|$ est assez petit on trouve que $|y(t,x_1) - \bar{y}| \leqslant \varepsilon$ (on peut réaliser n'importe quel ε par un choix convenable de δ_0, A_0 et de la partie du chemin $\Gamma'_{t,\bar{y}}$). On aura choisi ε assez petit pour que si $|y-\bar{y}| < \frac{\varepsilon}{2}$ $y(t,x_1) \in V$ donc $x_1 = x(t,y_1) \in C_V(y)$, comme $C_V(y)$ est un compact disjoint de $\widetilde{WF}(v)$, on pourra obtenir aussi $x \in L \subset\subset \widetilde{WF}(v)^c$; et donc l'intégrale portant sur cette partie de $\Gamma'_{t,\bar{y}}$ est à décroissance rapide. Comme il en est de même de l'autre condition, on a prouvé que $y \notin \widetilde{WF}(E^{II}v)$.

Posant $C(y) = \bigcap_{V \text{ vois. de } y} C_V(y)$, on a prouvé

$$\widetilde{WF}(Ev) \subset \widetilde{WF}(v) \cup \left\{y \,\middle|\, C(y) \cap \widetilde{WF}(v) \neq \phi\right\}$$

Ayant exprimé le $\widetilde{WF}$ d'une paramétrixe à gauche, on termine la preuve comme dans [1] en ayant effectué au préalable une microlocalisation dans ω (assez petit) à l'aide d'un o.p.d. de symbole $\omega(x, \frac{\xi}{\lambda})$ où $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ a son support près du point $p_0 = (x^0, \xi^0)$ $\xi^0 \neq 0$.

Appendice 1

Soit $\varphi(x,\beta)$ où $\beta = (\beta_x,\beta_\xi)$ une fonction C^∞ au voisinage de $(x_0;x_0,-\frac{\xi_0}{|\xi_0|}\rho_0)$ où $\rho_0 > 0$, satisfaisant à :

- $\operatorname{Im}\varphi(x,\beta) \geqslant C(x-\beta_x)^2$
- $\varphi = 0$ quand $x = \beta_x$ et $\varphi'_x = \beta_\xi$

Si $a(x,\beta,\lambda)$ est un symbole classique elliptique au point (x_0,β_0), on pose $(Tu)\ (\beta,\lambda) = \int u(x)\ e^{i\lambda\varphi(x,\beta)}\ a(x,\beta,\lambda)dx$. Il est équivalent de dire :

(i) Il existe un voisinage de β_0 dans lequel $Tu(\beta,\lambda)$ est à décroissance rapide en λ.

(ii) $(x_0,\xi^0) \notin WF(u)$.

Démonstration

Prouvons d'abord que (i) $\Rightarrow$ (ii).

On pose $\tilde{a}(x,\alpha) = a(x;\alpha_x,\frac{\alpha_\xi}{|\alpha_\xi|}\rho_0,|\alpha_\xi|)$ qui est un symbole pour $|\alpha_\xi|$ assez grand et $\Psi(x,y,\alpha) = |\alpha_\xi|\ (\varphi(x,\alpha_x,\frac{\alpha_\xi}{|\alpha_\xi|}\rho_0) - \varphi(y,\alpha_x,\frac{\alpha_\xi}{|\alpha_\xi|}\rho_0)$ qui est une phase homogène dans un domaine conique qui contient $(x_0,x_0,-\xi_0)$. On désigne par $\chi(\alpha)$ une fonction à support dans un voisinage conique assez petit de $(x_0,-\xi_0)$ dans lequel (Tu) $(\alpha_x,\frac{\alpha_\xi}{|\alpha_\xi|}\rho_0,\lambda)$ soit $O(\lambda^{-\infty})$. Soit $(Au)(y) = \int e^{i\psi(x,y,\alpha)}\ \tilde{a}(x,\alpha)\ \chi(\alpha)\ u(x)\ dx\ d\alpha$. Il résulte de la théorie des O.I.F à phase complexe que A est un opérateur pseudo-différentiel elliptique (x_0,ξ_0), comme $Av \in C^\infty$, le résultat cherché est établi.

La preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i) est élémentaire (arguments de phase stationnaire) et est omise.

Appendice 2

Le symbole $p(x,\xi) = \frac{1}{2}\ (B(x,\xi)\xi',\xi') + (A(x,\xi)(\xi''+ix''\xi\eta),\xi''-ix'',\xi\eta)$ où B est symétrique sur $\mathbb{R}^p$ et non dégénérée qδ $x''=\xi^\eta=\xi'=0$ et A est auto adjointe positive quand $\xi''=\xi''=\xi'=0$ satisfait les hypothèses (H_1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.J. Duistermaat - L. Hörmander :
Fourier Integral operators II ,
Acta Math. 128 - 183 - 269 (1972).

[2] L. Hörmander :
Fourier Integral operators ,
Acta Math. 127 - 79 - 183 (1971).

[3] L. Hörmander :
The Cauchy problem for differential equations with double characteristics ,
Journal d'Analyse Mathématique (1977).

[4] V. Ia Ivrï :
Wave fronts of solutions of some hyperbolic pseudo-differential equations , *(en russe)*
Trudi Mosk, 39 - 83-112 (1979) et 39 - 49 - 82 (1979).

[5] B. Lascar - R. Lascar :
Propagation des singularités pour des équations hyperboliques à caractéristique de multiplicité au plus double et singularités masloviennes II ,
A paraître au Journal d'Analyse Mathématique.

[6] R. Lascar :
Propagation des singularités des solutions pseudo-différentielles à caractéristiques de multiplicité variables ,
Lecture Notes in Math. n° 856 - Springer Verlag (1981).

[7] A. Melin - J. Sjöstrand :
Fourier integral operators with complex valued phase functions ,
Lecture Notes in Maths. n° 459 - 121 - 213 , Springer Verlag (1975).

[8] J. Sjöstrand :
On the eigenvalues of a class of hypo-elliptic operators IV ,
Annals de l'Institut Fourier 30-2 (1980) - 109-169.

[9] J. Sjöstrand :
Analytic singularities and Microhyperbolic Boundary value problems ,
Math. Ann. 254, 211 - 256 (1980).

[10] J. Sjöstrand :
Propagation des singularités analytiques des solutions d'équations pseudo-différentielles ,
Cours professé à l'Université Paris Sud Orsay en 1981 , à paraître.

B.LASCAR

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau Cedex
France

J.SJÖSTRAND

Université Paris-Sud
Centre d'Orsay
Mathématique, Bat.425
91405 Orsay Cedex
France