Astérisque

JEAN-LOUIS VERDIER

Spécialisation des classes de Chern

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 149-159
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__149_0>

Séminaire E.N.S. (1978-1979)

Exposé n° 7

SPÉCIALISATION DES CLASSES DE CHERN

par J.-L. VERDIER

Tous les espaces, variétés, schémas de cet exposé sont séparés.

1. Spécialisation des classes d'homologie.

Soient D un disque ouvert de $\mathbb{C}$, $o \in D$ son centre, $X \xrightarrow{\pi} D$ un morphisme analytique. On dit que π est une flèche de spécialisation topologique si, au-dessus de $D - \{o\}$, π est une fibration topologique localement triviale. Soit $\eta \in D - \{o\}$ un point qu'on appellera le point général. Les groupes de cohomologie à support compact des fibres de π sont les fibres d'un faisceau $R^i\pi_!\mathbb{Z}$ d'image directe à support propre qui est lui-même le faisceau de cohomologie d'un complexe $R\pi_!\mathbb{Z}$. On a des morphismes de complexes :

$$\begin{tikzcd} R\Gamma(D, R\pi_!\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & (R\pi_!\mathbb{Z})_\eta \\ (R\pi_!\mathbb{Z})_o \arrow[ur, dashed, "\sigma^*"'] & \end{tikzcd}$$

La flèche verticale est un isomorphisme car les faisceaux $R^i\pi_!\mathbb{Z}$ sont localement constants sur $D - \{o\}$. On en déduit un morphisme σ^* par commutativité du diagramme. Ce morphisme σ^* induit en passant à la cohomologie des morphismes

$$\sigma^* : H^i_c(X_o) \longrightarrow H^i_c(X_\eta) \quad ,$$

et en dualisant et en passant à la cohomologie

$$\sigma^* : H_i(X_\eta) \longrightarrow H_i(X_o) \quad ,$$

(homologie localement finie).

Ces morphismes sont appelés les morphismes de spécialisation. Le morphisme

σ^* est un homomorphisme d'algèbres. On a une formule de projection

$$\sigma_*(\sigma^*\alpha \cap a) = \alpha \cap \sigma_*(a) \quad .$$

Lorsque π est plat, on a $\sigma_*([X_\eta]) = [X_0]$ où $[X_\eta]$ et $[X_0]$ désignent les classes fondamentales [1] .

Soient $X_i \xrightarrow{\pi_i} D$, $i = 1,2$, deux morphismes de spécialisation topologique, $p : X_1 \longrightarrow X_2$ un morphisme propre, $p : X_{1,\eta} \longrightarrow X_{2,\eta}$ et $p_o : X_{1,0} \longrightarrow X_{2,0}$ les morphismes induits par p sur les fibres en 0 et η respectivement. Il résulte immédiatement des définitions qu'on a

$$\begin{cases} \sigma^* \circ p^* = p_\eta^* \circ \sigma^* \\ \sigma_* p_{\eta *} = p_{o*} \sigma_* \end{cases}$$

Nous dirons qu'un morphisme $\pi : X \longrightarrow D$ est <u>compactifiable</u> s'il existe un morphisme propre $\bar{\pi} : \bar{X} \longrightarrow D$ et une immersion ouverte $i : X \hookrightarrow \bar{X}$ tels que $\bar{\pi} \circ i = \pi$ et que $\bar{X} - i(X)$ soit un fermé analytique de $\bar{X}$. Soit $\pi : X \longrightarrow D$ un morphisme compactifiable. Il résulte du théorème d'isotopie [2] que, en se restreignant à un disque ouvert non vide convenable $D' \subset D$ de centre 0 , π devient un morphisme de spécialisation topologique.

On appellera alors <u>point général</u> de D relativement à π , un point quelconque de $D' - \{0\}$.

Nous dirons qu'un morphisme $\pi : X \longrightarrow D$ est de <u>nature algébrique</u> s'il existe une variété algébrique X' , une fonction algébrique $\pi' : X' \longrightarrow \mathbb{C}$, un plongement analytique $i : D \hookrightarrow \mathbb{C}$ telles que π soit la restriction de π' à D . Il résulte d'un théorème de Magata qu'un morphisme de nature algébrique est compactifiable.

2. <u>Les faisceaux de monodromie locale</u>.

Soient X un espace topologique, $\pi : X \longrightarrow D$ une application continue. On a $\pi_1(D - \{0\}) \simeq \mathbb{Z}$. Notons $\mathbb{Z}\langle 0 \rangle$ le faisceau associé à la représentation régulière de $\pi_1(D - \{0\})$ et prolongé par 0 sur D . Posons alors $\mathbb{Z}<\pi> = \pi^{*}\mathbb{Z}<0>$. Pour tout faisceau de groupes commutatifs F sur X , on pose

$$\psi(F) = \mathcal{H}om_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}<\pi>, F)/X_0 .$$

Soit $\gamma \in \pi_1(D-\{0\})$ le générateur canonique. Comme $\pi_1(D-\{0\})$ opère sur $\mathbb{Z}<\pi>$, γ induit un automorphisme encore noté γ , de $\psi(F)$. Le faisceau $\psi(F)$ sur la fibre X_0 est appelé le faisceau de <u>monodromie locale</u> de F et $\gamma : \psi(F) \longrightarrow \psi(F)$ est appelé l'<u>automorphisme de monodromie</u>, de sorte que $\psi(F)$ est un $\mathbb{Z}[\gamma,\gamma^{-1}]$ faisceau sur X_0 .

En passant aux catégories dérivées, on obtient un foncteur $R\psi$ qui associe à tout complexe borné inférieurement, de faisceaux $F^{\bullet}$ sur X , un complexe $R\psi(F^{\bullet})$ de $\mathbb{Z}[\gamma,\gamma^{-1}]$-faisceaux sur X_0 . On pose alors

$$R^{i}\psi(F^{\bullet}) = H^{i}(R\psi(F^{\bullet})) .$$

Lorsqu'il convient de préciser, on pose $\psi(F) = \psi_{\pi}(F)$.

Soient $\pi_i : X_i \longrightarrow D$, $i = 1,2$, deux applications continues, $p : X_1 \longrightarrow X_2$ une application propre telle que $\pi_1 = \pi_2 \circ p$, $p_0 : X_{1,0} \longrightarrow X_{2,0}$ l'application induite par p sur les fibres en 0 . Il résulte immédiatement des définitions que, pour tout faisceau F sur X , on a un isomorphisme canonique

$$p_{0,*}\,\psi_{\pi_1}(F) \simeq \psi_{\pi_2}(p_*(F))$$

et que, pour tout complexe $F^{\bullet}$, on a un isomorphisme canonique

$$(2.1) \qquad R_{p_{0,*}} \circ R\psi_{\pi_1}(F^{\bullet}) = R\psi_{\pi_2} \circ R_{p_*}(F^{\bullet})$$

PROPOSITION 2.2.- <u>Soient</u> $\pi : X \longrightarrow D$ <u>un morphisme analytique</u>, $F^{\bullet}$ <u>un complexe borné de faisceaux à cohomologie analytiquement constructible</u> [3] <u>et de type fini sur</u> $\mathbb{Z}$. <u>Alors pour tout</u> i , $R^{i}\psi(F^{\bullet})$ <u>est un faisceau analytiquement constructible de type fini sur</u> $\mathbb{Z}$. <u>Si, de plus,</u> π <u>est de nature algébrique et si</u> $F^{\bullet}$ <u>est la restriction d'un complexe algébriquement constructible</u> [loc. cit.], <u>alors les</u> $R^{i}\psi(F^{\bullet})$ <u>sont des faisceaux algébriquement constructibles</u>.

Par un dévissage standard [loc. cit.] , on se ramène grâce à 2.1 , au cas où

1) X est lisse ,

2) $F^{\bullet}$ est un faisceau localement constant sur $X - Y$, où Y est un diviseur à croisements normaux,

3) on a $F^{\bullet} = R_{j_*} j^* F$ où $j : X - Y \hookrightarrow X$ est l'inclusion canonique,

4) la fibre X_0 est un diviseur à croisements normaux et $(X_0)_{red} \subset Y$.

Rappelons de plus que la propriété d'être analytiquement (resp. algébriquement) constructible est locale (resp. Zariski-locale).

On peut donc supposer de plus qu'il existe sur X des fonctions $Z_1,\ldots,Z_p$, dont les différentielles sont indépendantes en tout point de X , telles que

5) Y soit défini par l'équation $Z_1,\ldots,Z_p = 0$,

6) il existe des entiers $m_i \geqslant 0$ tels que X_0 soit définie par l'équation $\prod_1^p Z_i^{m_i} = 0$.

Soit $W = \{ x \in X \mid Z_i(x) = 0 \ , \ 1 \leqslant i \leqslant p \}$. Il suffit de montrer que $R^i\psi(F)/W$ est localement constant de type fini sur $\mathbb{Z}$. Soit $x_0 \in W$. Il existe un voisinage ouvert V de x_0 dans X tel que $\pi_1(V-V\cap Y)$ soit un groupe commutatif libre engendré par p générateurs $\gamma_1,\ldots,\gamma_p$. Sur $V - V \cap Y$, le faisceau $F^{\bullet}$ est associé à une représentation de $\pi_1(V-V\cap Y)$ dans un $\mathbb{Z}$-module de type fini M .

Soit $\pi_* : \pi_1(V-V\cap Y) \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'homomorphisme qui envoit γ_i sur m_i , R la représentation de $\pi_1(V-V\cap Y)$ déduite de la représentation régulière de $\mathbb{Z}$ par π_* . Le faisceau $\mathbb{Z}<\pi>$ restreint à $V - V \cap Y$ est associé à R . On a

$$R\mathcal{H}om(\mathbb{Z}<\pi>, F^{\bullet}) \simeq R_{j_*} R\mathcal{H}om(\mathbb{Z}<\pi>/V-V\cap Y, F^{\bullet})$$ et, par suite, $R^i\psi(F^{\bullet})/W \cap V$ est le faisceau constant de fibre

2.3 $$\mathrm{Ext}^i_{\pi_1(V-V\cap Y)}(R,M) \ .$$

Comme R est un $\mathbb{Z}(\pi_1\ V-V\cap Y))$-module de type fini et M un $\mathbb{Z}$-module de type fini, les groupes $\mathrm{Ext}^i_{\pi_1(V-V\cap Y)}(R,M)$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}$, d'où la proposition.

Remarque 2.4.- Il résulte de la formule 2.3. qu'on a, en tout point $x \in W\cap V$

$$\sum (-1)^i \ \mathrm{rg}(R^i\psi(F^\cdot)_x) = k \ \mathrm{rg}\ M$$

où k est un nombre entier indépendant de M.

3. Spécialisation des fonctions.

Soit X un espace analytique (resp. algébrique). Notons $K(X)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux analytiquement (resp. algébriquement) constructibles de type fini sur $\mathbb{Z}$, $C(X)$ le groupe des fonctions analytiquement (resp. algébriquement) constructibles sur X, $\chi_X : K(X) \longrightarrow C(X)$ l'unique homomorphisme de groupes qui associe à toute classe $[F]$ de faisceau constructible la fonction $x \longmapsto \mathrm{rg}(F_x)$. Soit $p : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces analytiques. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\chi_X} & C(X) \\ {\scriptstyle p_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ K(Y) & \xrightarrow{\chi_Y} & C(Y) \end{array}$$

où $p_* : K(X) \longrightarrow K(Y)$ est induit par le foncteur R_{p_*} et où $p_* : C(X) \longrightarrow C(Y)$ a été défini dans l'exposé 1. En effet cette assertion équivaut à montrer que, pour tout X, lisse, compactifiable, tout faisceau localement constant F sur X de rang n, on a

$$\text{(3.2)} \qquad \sum_i (-1)^i \ \mathrm{rg}\ H^i_c(X,F) = n \sum (-1)^i \ \mathrm{rg}\ H^i_c(X,\mathbb{Z}) \ .$$

et cette dernière égalité résulte du fait qu'il existe une triangulation finie de X qui trivialise F.

Soit $\pi : X \longrightarrow D$ un morphisme. Notons

(3.3) $\qquad \psi^{r} : K(X) \longrightarrow K(X_0)$

l'homomorphisme induit par le foncteur $R\psi$ suivi de l'oubli de l'automorphisme de monodromie

PROPOSITION 3.4.- <u>Il existe un homomorphisme</u>

$$\sigma_* : K(X) \longrightarrow C(X_0)$$

<u>et un seul tel que le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\chi_X"'] & K(X_0) \arrow[d, "\chi_{X_0}"] \\ C(X) \arrow[r, "\sigma_*"] & C(X_0) \end{tikzcd}$$

<u>soit commutatif</u>.

L'homomorphisme $\sigma_* : C(X) \longrightarrow C(X_0)$ est appelé <u>l'homomorphisme de spécialisation</u>.

Pour démontrer l'assertion, on se ramène par un dévissage standard et une récurrence sur la dimension de X, à démontrer le fait suivant : soient X lisse, $\pi : X \longrightarrow D$ un morphisme tel que X_0 soit un diviseur à croisements normaux, $Y \subset X$ un diviseur à croisements normaux tel que $(X_0)_{red} \subset Y$, $j : X - Y \hookrightarrow X$ l'injection canonique, M_1, M_2 deux faisceaux localement constants de <u>même rang</u> sur $X - Y$, $F_i^{\bullet} = R_{j*} M_i$. Alors $\chi_{X_0}(R\psi(F_1^{\bullet})) = \chi_{X_0}(R\psi(F_2^{\bullet}))$. Cette dernière égalité résulte de la remarque 2.4.

COROLLAIRE 3.5.- <u>Soient</u> $\pi : X \longrightarrow D$ <u>un morphisme de nature algébrique et</u> $f : X \longrightarrow \mathbf{Z}$ <u>la restriction d'une fonction algébriquement constructible</u>. <u>Alors</u> $\sigma_*(f) : X_0 \longrightarrow \mathbf{Z}$ <u>est algébriquement constructible</u>.

Résulte de 3.4 et 2.2.

COROLLAIRE 3.6.- <u>Soient</u> $\pi_i : X_i \longrightarrow D$ <u>deux morphismes</u>, $p : X_1 \longrightarrow X_2$ <u>un morphisme propre tel que</u> $\pi_2 \circ p = \pi_1$, $f : X_1 \longrightarrow \mathbf{Z}$ <u>une fonction analytiquement constructible. Alors on a</u>

$$p_{o*}\sigma_* f = \sigma_* p_* f \quad .$$

Résulte de 3.4 et 2.1 .

4. Calcul de la fonction spécialisée.

Soient $\pi : X \longrightarrow D$ un morphisme analytique et $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction analytiquement constructible. Il existe une famille localement finie de sous-espaces fermés $Y_i \subset X$ telle que

$$f = \sum_i n_i 1_{Y_i} \quad .$$

Par additivité, il suffit donc, pour calculer $\sigma_*(f)$, de savoir calculer $\sigma_*(1_{Y_i})$. Par commutation de la spécialisation aux images directes (3.6), il suffit donc de savoir calculer $\sigma_*(1_X)$. Soit $x \in X_0$. Choisissons un plongement local de X au point x dans un espace vectoriel et pour tout $\varepsilon > 0$, notons $B(x,\varepsilon)$ la trace sur X d'une boule de rayon ε centrée en x . Soit $\eta \in D$, $\eta \neq 0$. Pour tout $t \in]0,1]$, $t\eta \in D - \{0\}$. Notons $X_{t\eta}$ la fibre de X au-dessus de $t\eta$.

PROPOSITION 4.1.- <u>Il existe un</u> ε_0 , $0 < \varepsilon_0 \leq 1$, <u>un entier</u> m <u>tel que pour tout</u> (t,ε) , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < t < \varepsilon^m$, <u>on ait</u>

$$\sigma_*(1_X)(x) = \chi(B(x,\varepsilon) \cap X_{t\eta})$$

<u>où</u> χ <u>désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré</u>.

Soit $Q = \{ (t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^2 \ , \ 0 < t \leq 1 \ , \ 0 < \varepsilon \}$ et soit $q : Z \longrightarrow q$ l'espace naturel dont la fibre en (t,ε) est $X_{t\eta} \cap B(x,\varepsilon)$. Il résulte du théorème d'isotopie pour les morphismes analytiques réels entre parties sous-analytiques que, quitte à se restreindre à des ε petits, il existe une triangulation sous-analytique de Q qui trivialise q [2] . Il existe donc un ε_0 , $0 < \varepsilon_0 \leq 1$, et un entier m tel que, au-dessus de l'ouvert $\{ (t,\varepsilon) | 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ , \ 0 < t < \varepsilon^m \}$ q soit une fibration topologique triviale dont la fibre en chaque point est une partie sous-analytique. En particulier sur cet ouvert, la fonction $(t,\varepsilon) \longmapsto \chi(B(x,\varepsilon) \cap X_{t\eta})$ est définie et constante.

Par définition de $\sigma_*(1_X)$, on a

$$\sigma_*(1_X)(x) = \sum_i (-1)^i \operatorname{rg} \varinjlim_{x\in V} \operatorname{Ext}^i(V-V\cap X_0, \mathbb{Z}<\pi> , \mathbb{Z})$$

où V parcourt un système fondamental de voisinages de x . Pour tout ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ et tout ρ , $0<\rho<\varepsilon^m/2$, posons $V(\rho,\varepsilon) = B(x,\varepsilon)\cap\pi^{-1}(\rho D)$. Pour tout ε , il existe un $\rho(\varepsilon)$ tel que $V(\rho,\varepsilon) - V(\rho,\varepsilon)\cap X_0 \longrightarrow \rho D - \{0\}$ soit une fibration topologique localement triviale. On constate alors que les $V(\rho,\varepsilon)$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, $0<\rho<\rho(\varepsilon)$ forment un système fondamental de voisinage de x et que les systèmes inductifs

$$V(\rho,\varepsilon) \longmapsto \operatorname{Ext}^i(V(\rho,\varepsilon) - V(\rho,\varepsilon)\cap X_0, \mathbb{Z}<\pi> , \mathbb{Z})$$

sont constants de valeurs $H^i(B(x,\varepsilon)\cap X_{\rho_m})$, d'où la proposition.

5. Spécialisation de classes de Chern.

Soient $\pi : X \longrightarrow D$ un morphisme, $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ une fonction analytiquement constructible. Nous dirons que (f,π) est <u>compactifiable</u> s'il existe une compactification $\bar{\pi} : \bar{X} \longrightarrow D$ de π telle que la fonction $\bar{f}$ obtenue en prolongeant f par zéro sur $\bar{X} - X$ soit analytiquement constructible.

Lorsque π est de nature algébrique et lorsque f est la restriction d'une fonction algébriquement constructible, (f,π) est compactifiable.

Soit (f,π) un couple compactifiable. Quitte à se restreindre à un disque ouvert non vide D' de centre 0 , suffisamment petit, on peut supposer qu'il existe un nombre fini de sous-espaces analytiques fermés Y_i compactifiables, tels que

$$f = \sum_i n_i 1_{Y_i} .$$

Grâce au théorème d'isotopie, on peut supposer, quitte à se restreindre encore à un disque plus petit D'' , que les restrictions de π à $X - X_0$, $Y_i - Y_{i,0}$ sont des fibrations topologiques localement triviales sur

$D'' - \{0\}$. Un point η de $D'' - \{0\}$ sera appelé un point général relativement à (f, π) .

THÉORÈME 5.1.- <u>Soient</u> $\pi : X \longrightarrow D$ <u>un morphisme analytique</u>, $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ <u>une fonction analytiquement constructible. On suppose que</u> (f, π) <u>est compactifiable. Soit</u> $\eta \in D - \{0\}$ <u>un point général relativement à</u> (f, π), X_η <u>la fibre de</u> X <u>au-dessus de</u> η , f_η <u>la restriction de</u> f <u>à</u> X . <u>On a alors</u>

$$\sigma_* C.(f_\eta) = C.(\sigma_* f)$$

En d'autres termes, on peut donc dire que sous les hypothèses du théorème, la formation des classes d'homologie de Chern commute aux spécialisations.

Démontrons le théorème. Par additivité sur f , on peut supposer que $f = 1_Y$. En utilisant les propriétés de commutation des spécialisations aux images directes pour les classes d'homologies (n° 1) et les fonctions (3.6) , on se ramène au cas $f = 1_X$. Il existe alors, quitte à se restreindre à un disque plus petit, des espaces analytiques <u>lisses</u> Z_α et des morphismes propres en nombre fini $p_\alpha : Z_\alpha \longrightarrow X$ tels que $1_X = \sum_\alpha m_\alpha p_{\alpha *} 1_{Z_\alpha}$ (exp. 1), et que $Z_\alpha \longrightarrow D$ soit compactifiable. Quitte à se restreindre à un disque encore plus petit convenable, on peut supposer que les $\pi \circ p_\alpha$ sont des morphismes de spécialisation topologique.

En appliquant à nouveau l'additivité et la commutation de la spécialisation aux images directes, on se ramène au cas où X est lisse. On peut alors construire une modification $X' \xrightarrow{p} X$ de X qui est un isomorphisme en dehors de X_0 et telle que la fibre X'_0 soit un diviseur à croisements normaux et à composantes irréductibles lisses. La fonction $p_* 1_{X'}$, vaut 1 sur $X - X_0$ et par suite $\sigma_*(p_* 1_{X'}) = \sigma_*(1_X)$. On peut donc supposer X lisse et X_0 diviseur à croisements normaux. Soit $Z_1^{m_1}, \ldots, Z_p^{m_p}$ une équation locale de X_0 où $Z_1, \ldots, Z_p$ font partie d'un système de coordonnées. Posons $D'_i = \{Z_i = 0 , Z_k \neq 0 , k \neq i\}$. Alors on vérifie facilement que $\sigma_*(1_X) = \sum_i m_i 1_{D'_i}$, et par suite que $\sigma_*(1_X)$ est la fonction constructible suivante :

Soient $(D_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ les composantes irréductibles de X_0 . Soient m_i les multiplicités des D_i . Alors

$$\sigma_*(1_X) = \sum_i^k m_i \, 1_{D_i} - \sum_{i,j}(m_i+m_j)\, 1_{D_i\cap D_j} + \sum_{i,j,k}(m_i+m_j+m_k)\, 1_{D_i\cap D_j\cap D_k} + \cdots \quad .$$

Par ailleurs X_η est lisse et le fibré normal à X_η est trivial. Donc $C.(X_\eta) = C^\bullet(T_X)\cap [X_\eta] \in H_*(X_\eta)$ où T_X est le fibré tangent à X .

Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} & H^*(X) \arrow[dl, "i_0^*"'] \arrow[dr, "i_\eta^*"] & \\ H^*(X_0) \arrow[rr, "\sigma^*"] & & H^*(X_\eta) \end{tikzcd}$$

est commutatif, il résulte de la formule de projection que

$$\sigma_*(C^\bullet(T)\cap [X_\eta]) = C^\bullet(T)\cap \sigma_*[X_\eta] \quad ,$$

et comme $\pi : X \longrightarrow D$ est plat, on a $\sigma_*[X_\eta] = [X_0]$. Donc

$$\sigma_*(C.(X_\eta)) = C^\bullet(T)\cap [X_0] \quad .$$

Le théorème résulte donc du lemme suivant :

<u>Lemme</u> 5.2.- <u>On a</u>

$$C^\bullet(T)\cap [X_0] = C.\Big(\sum_1^k m_i\, 1_{D_i} - \sum_{i<j}(m_i+m_j)\, 1_{D_i\cap D_j} + \cdots\Big) \quad .$$

C'est un calcul qui utilise les ingrédients suivants.

Soit, pour tout i , N_i le fibré de rang 1 sur X dont le faisceau des sections est $O(D_i)$. Le fibre N_i induit sur D_i le fibré normal. Le fibré $\bigotimes_{i=1}^k N_i^{m_i}$ est trivial. Soit $T_{i_1,\dots,i_\ell}$ le fibré tangent à $D_{i_1}\cap \dots \cap D_{i_\ell}$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow T_{i_1\dots i_\ell} \longrightarrow T_X|D_{i_1\dots i_\ell} \longrightarrow N_{i_1}\oplus\dots\oplus N_{i_\ell}|D_{i_1\dots i_\ell} \longrightarrow 0 \quad .$$

Notons $[D_i] \in H_*(X_0)$ la classe fondamentale de D_i dans X_0 . De ce qui précède résulte alors

$$(5.3) \qquad C.(1_{D_i\cap D_{i_2}\dots\cap D_{i_\ell}}) = \frac{C^\bullet(T_X)\cup c^1(N_{i_2})\cup\dots\ c^1(N_{i_\ell})}{C^\bullet(N_{i_1})\cup\dots\cup C^\bullet(N_{i_\ell})}\cap [D_{i_1}] \quad ,$$

(5.4) $\quad \sum_1^k m_i\, c^1(N_i) = 0$.

Rappelons qu'on a évidemment

(5.5) $\quad c^\bullet(N_i) = 1 + c^1(N_i)$

(5.6) $\quad [X_0] = \sum m_i [D_i]$.

Pour tout ℓ posons

$$S(\ell) = c_\bullet\Big(\sum_1^k m_i 1_{D_i} - \sum_{i_1<i_2} (m_{i_1}+m_{i_2}) 1_{D_{i_1}\cap D_{i_2}} + \dots - (-1)^\ell \sum_{i_1<\dots<i_\ell} (m_{i_1}+\dots+m_{i_\ell}) 1_{D_{i_1}\cap\dots D_{i_\ell}}\Big)$$

Démontrons par récurrence sur ℓ la relation $R(\ell)$:

$$c^\bullet(T_X)\cap[X_0]-S(\ell) = -(-1)^\ell \sum_{i_1<\dots<i_\ell} (m_{i_1} c^1(N_{i_1})+\dots+m_{i_\ell} c^1(N_{i_\ell}))c_\bullet(1_{D_{i_1}\cap\dots D_{i_\ell}}) .$$

D'après (5.6) , on a

$$c^\bullet(T_X)\cap[X_0] = \sum_1^k m_i \frac{c^\bullet(T_X)}{c^\bullet(N_i)} c^\bullet(N_i)\cap[D_i] .$$

Donc, d'après (5.3) , on a

$$c^\bullet(T_X)\cap[X_0] = \sum_1^k m_i\, c^\bullet(N_i)\cap c_\bullet(1_{D_i}) ,$$

ce qui, par (5.5) , entraîne $R(1)$. D'après (5.4) , on a

$$\sum_{j\in\{i_1,\dots i_\ell\}} m_j\, c^1(N_j) = -\sum_{k\notin\{i_1,\dots i_\ell\}} m_k\, c^1(N_k) .$$

Donc $R(\ell)$ entraîne

$$c^\bullet(T_X)\cap[X_0]-S(\ell) = (-1)^\ell \sum_{i_1<\dots<i_{\ell+1}} \sum_{p=1}^{\ell+1} m_{i_p} c^1(N_{i_p})\cap c_\bullet(1_{D_{i_1}\cap\dots\cap D_{i_p}\cap\dots\cap D_{i_{\ell+1}}}) .$$

D'après (5.3) , on a donc

$$c^\bullet(T_X)\cap[X_0] - S(\ell) = (-1)^\ell \sum_{i_1<\dots<i_{\ell+1}} \sum_{p=1}^{\ell+1} m_{i_p} c^\bullet(N_{i_p})\cap c_\bullet(1_{D_{i_1}\cap\dots\cap D_{i_{\ell+1}}}) ,$$

ce qui, d'après (5.5) , entraîne $R(\ell+1)$; ce qu'il fallait démontrer. Pour ℓ assez grand, le deuxième membre de $R(\ell)$ est nul ; d'où le lemme.

[1] Séminaire de Géométrie analytique, Astérisque 36-37, exp. VI, p. 47 .

[2] J.-L. VERDIER, Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inventiones math. 36, (1976) p. 295-312 .

|3| Séminaire de Géométrie analytique, Astérisque 36-37, exp. VI, p. 6 .