

Astérisque

ALBERT FATHI

Appendice : Formules explicites sur les feuilletages mesurés

Astérisque, tome 66-67 (1979), p. 120-126

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__120_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__120_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPENDICE

FORMULES EXPLICITES SUR LES FEUILLETAGES MESURÉS

par Albert FATHI

Sur le double pantalon, on considère les courbes K, K', K'' (figure 15) .

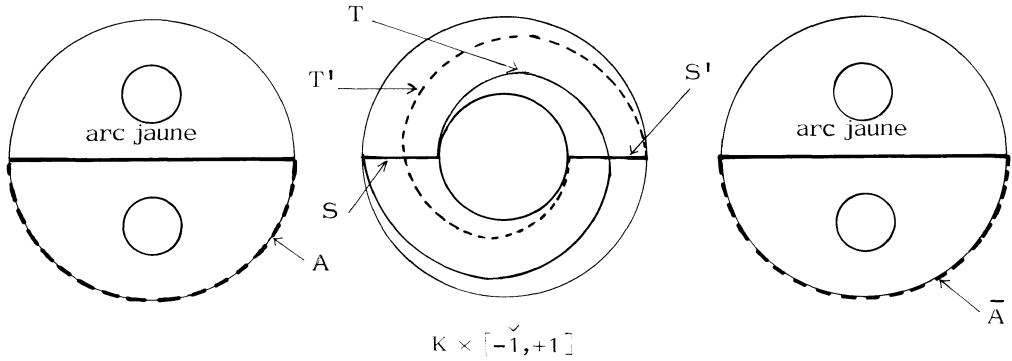


Figure 15

$$K' \simeq \text{arc jaune} \cup S \cup \text{arc jaune} \cup S'$$

$$K'' \simeq \text{arc jaune} \cup T \cup \text{arc jaune} \cup T'$$

A et $\bar{A}$ sont du même côté par rapport à K'

Pour un feuilletage en forme normale par rapport à cette décomposition, on a défini trois nombres (m, s, t) , en plus des quatre mesures des courbes du bord (voir IV. 5).

Proposition. Il existe des formules continues, positivement homogènes de degré 1, calculant s et t en fonction des mesures minimales des classes d'isotopie $[K]$, $[K']$, $[K'']$ et des courbes du bord du double pantalon.

Démonstration. On utilise les notations suivantes : m est la longueur de K , s, t, s', t', a et $\bar{a}$ sont les longueurs des arcs S, T, S', T', A et $\bar{A}$, définis en III. 3 et en IV. 5 et rappelés sur la figure 15 .

Affirmation 1. Si $m \neq 0$, on peut calculer s et t en fonction de $\alpha = s + s'$, $\beta = t + t'$, m , a et $\bar{a}$.

On trivialise l'anneau $K \times [-1, +1]$ de sorte que la projection sur K feuillette comme le feuilletage donné. Dans le revêtement $\mathbb{R} \times [-1, +1]$ de l'anneau, le groupe agissant comme la translation par m , on a une figure telle que 16, où on a porté la longueur des segments (de droite) réalisant la plus petite longueur des arcs

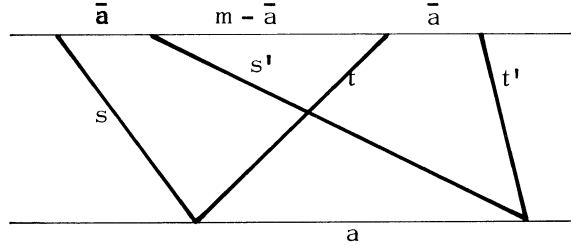


Figure 16

relevant $S, T, \dots$. Des raisons géométriques évidentes impliquent que les extrémités supérieures de ces arcs apparaissent toujours dans l'ordre indiqué. On rappelle aussi ce qui est visible sur la figure :

$$(m, s, t) \in \partial(\leq \nabla), \quad (m, s', t') \in \partial(\leq \nabla).$$

D'où il suit que $(2m, \alpha, \beta) \in (\leq \nabla)$. Donc on a :

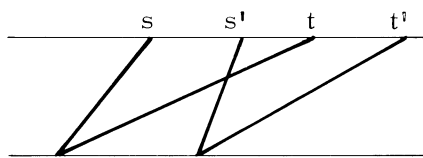
$$\begin{aligned} \alpha &\leq \beta + 2m \\ \beta &\leq \alpha + 2m \\ 2m &\leq \alpha + \beta \end{aligned}$$

et, bien sûr, $m \geq a$; $m \geq \bar{a}$. De plus, $(s, s', \bar{a}, a)$ et $(t, t', \bar{a}, a)$ sont les longueurs des côtés de quadrilatères dégénérés ; donc, on a :

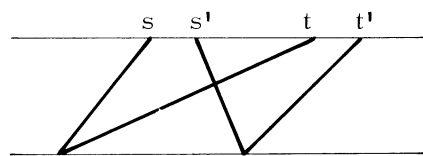
$$\alpha, \beta \geq |a - \bar{a}|.$$

On décrit les configurations possibles en termes de l'angle que fait chaque brin avec l'horizontale dans le revêtement universel. On exclut quelques configurations en remarquant que si S fait un angle $\leq \pi/2$, alors T' ne peut faire un angle $> \pi/2$ sinon on aurait $a > m$.

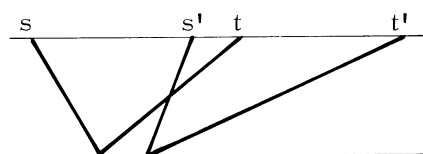
I



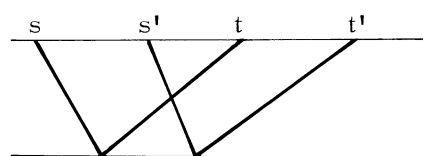
II



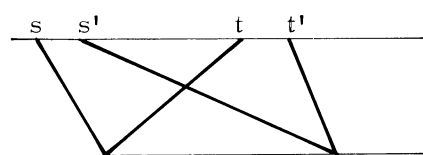
III



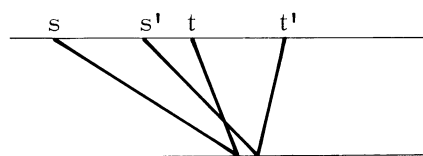
IV



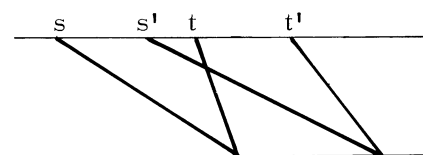
V



VI



VII



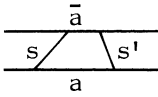
La configuration I est caractérisée par : $\beta = \alpha + 2m$; de plus on a :

$$\begin{cases} \beta \geq \alpha \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = a - \bar{a} \\ t = s + m \\ t' = s' + m . \end{cases}$$

En effet, compte tenu de $(m, s, t) \in \partial(\leq \nabla)$, $(m, s', t') \in \partial(\leq \nabla)$, on voit que $\beta = \alpha + 2m$ impose $t = s + m$ et $t' = s' + m$, ce qui détermine la configuration I.

La configuration II est caractérisée par : $\alpha = a - \bar{a}$; de plus on a :

$$\begin{cases} \beta \geq \alpha \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = \beta - 2m \\ t = s + m \\ t' = m - s' . \end{cases}$$

En effet, $s + s' + \bar{a} = a$ détermine  ; comme $a < m$, l'angle de T' est sûrement inférieur à $\pi/2$.

Des raisonnements analogues permettent d'établir les caractérisations des autres cas.

La configuration III est caractérisée par : $\alpha = \bar{a} - a$; de plus on a :

$$\begin{cases} \beta \geq \alpha \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = 2m - \beta \\ t = m - s \\ t' = s' + m . \end{cases}$$

La configuration IV est caractérisée par : $\alpha + \beta = 2m$; de plus, on a :

$$\begin{cases} s + s' = \alpha \\ s - s' = \bar{a} - a \\ t = m - s \\ t' = m - s' . \end{cases}$$

La configuration V est caractérisée par : $\beta = a - \bar{a}$; de plus on a :

$$\begin{cases} \alpha \geq \beta \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = \bar{a} - a \\ t = m - s \\ t' = m - s' \end{cases} .$$

La configuration VI est caractérisée par : $\beta = \bar{a} - a$; de plus on a :

$$\begin{cases} \alpha \geq \beta \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = \bar{a} - a \\ t = s - m \\ t' = m - s' \end{cases} .$$

La configuration VII est caractérisée par : $\alpha = \beta + 2m$; de plus on a :

$$\begin{cases} \alpha \geq \beta \\ s + s' = \alpha \\ s - s' = \bar{a} - a \\ t = s - m \\ t' = s' - m \end{cases} . \quad \square$$

En calculant un peu, on voit que dans les cas I, II, III, IV on a :

$$(*) \quad \begin{cases} s = \left| m + \frac{\bar{a} - a - \beta}{2} \right| \\ t = \frac{a - \bar{a} + \beta}{2} \end{cases} ,$$

et que dans les cas IV, V, VI, VII on a :

$$(**) \quad \begin{cases} s = \frac{\alpha + \bar{a} - a}{2} \\ t = \left| m + \frac{a - \bar{a} - \alpha}{2} \right| \end{cases} .$$

On introduit alors un cône positif fermé de $\mathbb{R}_+^5$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \{ (\alpha, \beta, m, a, \bar{a}) \in \mathbb{R}_+^5 \mid (\alpha, \beta, 2m) \in (\leq \nabla), m \geq a, m \geq \bar{a}, \\ \alpha \geq |a - \bar{a}|, \beta \geq |a - \bar{a}| ; \text{l'une des égalités suivantes est vérifiée :} \\ \alpha = |a - \bar{a}|, \beta = |\bar{a} - a|, \alpha = \beta + 2m, \alpha + \beta = 2m, \beta = \alpha + 2m \} . \end{aligned}$$

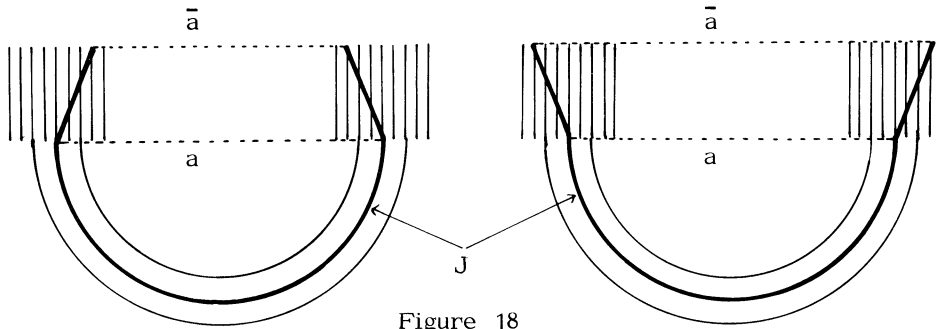


Figure 18

On y voit $\alpha = |a - \bar{a}|$. En analysant de manière analogue ce qui se passe avec $\bar{J}$, on obtient la preuve de l'affirmation. $\square$

Si $m = 0$, les formules précédentes deviennent $k' = \alpha + j + \bar{j}$ et $k'' = \beta + j + \bar{j}$. Si on regarde les modèles, on voit qu'elles agrèent à la géométrie ; dans cette observation, ne pas oublier le cas où un des pantalons échappe au support du feuilletage ; dans ce cas, les trois mesures de son bord sont nulles ainsi que la longueur des arcs jaunes.

Remarque fondamentale. L'appendice est universel ! Précisément, on peut changer l'arc jaune pour chaque type de feuilletage du pantalon standard en n'importe quel autre arc qui a les propriétés suivantes :

- 1) Il reste dans la même classe d'isotopie ;
- 2) Il réalise le minimum de longueur transverse dans cette classe.

Un nouveau choix d'arcs jaunes sur les modèles conduit Γ à un nouvel homéomorphisme de classification $\theta : I_{\star}(\mathfrak{M}\mathcal{F}) \rightarrow B - \{0\}$. Celui-ci sera construit à partir des formules de l'appendice qui restent identiques à elles-mêmes. Le seul changement réside dans l'expression de la longueur de l'arc A associé à chaque arc jaune.

On définit $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ par les formules $(*)$ si $\beta \geq \alpha$ et par les formules $(**)$ si $\beta \leq \alpha$. Il est facile de voir que les deux formules coïncident si $\alpha = \beta$. D'autre part, si (s, t) sont les coordonnées de φ , on voit que (s, t) appartient à $\mathbb{R}_+^2$ et que (m, s, t) appartient à $\partial(\leq \nabla)$.

L'intérêt d'introduire $\mathbb{C}$ est de montrer que l'application θ se prolonge à un sous-cône fermé de $\mathbb{R}_+^3$.

Remarquons que si $m = 0$ (et par conséquent, $a = 0$, $\bar{a} = 0$), on obtient pour les formules ci-dessus :

$$s = t = \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2},$$

ce qui coïncide avec ce que dit la géométrie. $\square$

Posons $k' = I(\mathfrak{F}, \mu; [K'])$, $k'' = I(\mathfrak{F}, \mu; [K''])$, j et $\bar{j}$ les longueurs des arcs jaunes J et $\bar{J}$ des pantalons contenant respectivement A et $\bar{A}$.

Affirmation 2. Si $m \neq 0$, on a $\alpha = \text{Sup}(|a - \bar{a}|, k' - j - \bar{j})$ et $\beta = \text{Sup}(|a - \bar{a}|, k'' - j - \bar{j})$.

D'abord, par définition de k' , on a $\alpha + j + \bar{j} \geq k'$ et on avait déjà vu $\alpha \geq |a - \bar{a}|$. Si J et $\bar{J}$ sont de longueurs non nulles (ce qui signifie pour les arcs choisis qu'ils passent par des singularités), on remplace facilement $J \cup S \cup \bar{J} \cup S'$ par une courbe quasi-transverse de même longueur ; dans ce cas, $k' = \alpha + j + \bar{j}$. Si J est de longueur nulle (morceaux de feuille lisse) et si S et S' , partent de part et d'autre de J , on remplace $S \cup J \cup S'$ par une transversale de même mesure (figure 17).

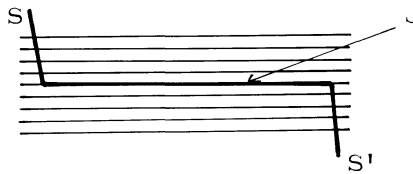


Figure 17

Si S et S' partent du même côté de J , on a l'un des deux configurations de la figure 18.