

Astérisque

PETER DRAXL

Corps gauches à involution de deuxième espèce

Astérisque, tome 61 (1979), p. 63-72

http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__63_0

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORPS GAUCHES À INVOLUTION DE DEUXIÈME ESPÈCE

par Peter DRAXL

§ 1. INTRODUCTION

Soit A une algèbre simple de rang fini sur son centre K à involution I de deuxième espèce (la référence principale dans cette situation est [1], Ch.X). Notons

$$S_I(A) := \{a \in A \mid a^I = a\} \quad \text{et} \quad k := K \cap S_I(A) \quad (1),$$

alors K/k est une extension quadratique séparable à groupe de Galois $\{1, I|_K\}$, et $S_I(A)$ est un espace vectoriel de dimension $n^2 = |A:K|$ sur k . On définit (J une autre involution du même type)

$$I \sim J, \text{ si et seulement si } I|_K = J|_K,$$

et l'on montre facilement que $I \sim J$ équivaut à l'existence d'un élément $t \in S_I(A)$ tel que l'on ait

$$a^J = ta^I t^{-1} \quad (a \in A).$$

Notons maintenant

$$\Sigma_I(A) := \text{sous-groupe du groupe multiplicatif } A^* \text{ engendré par } S_I(A),$$

alors un calcul simple donne

$$\Sigma_I(A) = \Sigma_J(A), \text{ si } I \sim J.$$

(1) La notation $:=$ utilisée ici signifie "égale par définition".

En outre on note $\text{Nrd}_{A/K}$ la norme réduite, et l'on démontre (voir p. ex. [7], Prop. 1 pour la première inclusion et [3], (3.3), p. 27 pour la seconde)

$$[A^*, A^*] \subseteq \Sigma_I(A) \subseteq \text{Nrd}_{A/K}^{-1}(k^*) ,$$

donc le groupe

$$\text{USK}_1(A, \tilde{I}) := \text{Nrd}_{A/K}^{-1}(k^*) / \Sigma_I(A)$$

ne dépend que de la classe \tilde{I} de l'involution I modulo la relation \sim , et il est appelé (voir [11])

groupe réduit de Whitehead de A par rapport à I .

C'est un analogue du groupe réduit de Whitehead de A

$$\text{SK}_1(A) := \text{Nrd}_{A/K}^{-1}(\{1\}) / [A^*, A^*] ,$$

et les deux groupes sont liés par l'homomorphisme

$$(1) \quad \Omega: \text{SK}_1(A) \longrightarrow \text{USK}_1(A, \tilde{I})$$

qui est induit par l'inclusion.

Quant aux groupes USK_1 les propriétés suivantes sont bien connues:

0° En général on a $\text{USK}_1(A, \tilde{I}) \neq 1$ (voir [8], [5] et [6]) .

1° Soit l/k une extension finie disjointe de K/k , et soit $L := K \otimes k = Kl$, alors il existe des homomorphismes

$$\text{USK}_1(A, \tilde{I}) \xrightleftharpoons[\pi_L]{\iota_L} \text{USK}_1(A \otimes_K L, \tilde{I} \otimes \text{id})$$

tels que l'on ait $\pi_L \circ \iota_L = |L:K| \cdot \text{id}$ ([4], Lemma 4) .

2° $\text{USK}_1(A, \tilde{I})$ est un groupe de torsion à exposant divisant l'indice $i(A)$ de A (cela résulte de 1°) ⁽²⁾ .

3° Soit K/k une extension quadratique séparable, et soit A

(2) $i(A) := \sqrt{|D:K|}$, où D est le corps gauche avec $A = M_r(D)$.

une algèbre simple de rang fini sur son centre K . Pour que A admette une involution I de deuxième espèce avec $K \cap S_I(A) = k$, il faut et il suffit que $\text{cor}_{K/k}(A) = 0$ dans le groupe de Brauer de k (voir p. ex. [9], p.93).

Par conséquent, d'après 2° et 3° il n'est pas intéressant de parler de USK_1 sur un corps local (comme la corestriction est toujours injective là; voir p. ex. [10], Ch. XI, Prop. 1 et Ch. XIII, Th. 1).

4° Soit $A = M_r(D)$ (D un corps gauche), alors il existe des involutions J de A et i de D telles que l'on ait $I \sim J$ et $(d_{\mu\nu})^J = (d_{\nu\mu}^i)$. En outre le déterminant de Dieudonné induit un isomorphisme (voir [4], Lemma 3)

$$\text{USK}_1(A, \tilde{I}) \cong \text{USK}_1(D, \tilde{i}) .$$

5° Soit $A \cong A_1 \otimes_K A_2$ avec $\text{pgcd}(i(A_1), i(A_2)) = 1$, alors il existe des involutions I_ν de A_ν telles que l'on ait $I \sim I_1 \otimes I_2$, et l'on a

$$\text{USK}_1(A, \tilde{I}) \cong \text{USK}_1(A_1, \tilde{I}_1) \times \text{USK}_1(A_2, \tilde{I}_2)$$

(c'est une conséquence de 1°).

6° Dans le cas "i(A) impair" l'homomorphisme Ω dans (1) est surjectif (en fait, $\text{Nrd}_{A/K}(a) = \text{Nrd}_{A/K}(a)^I$ implique l'existence de $b \in \text{Nrd}_{A/K}^{-1}(\{1\})$ avec $a = a^I b$, donc $a^2 = (aa^I)b$ avec $aa^I \in \Sigma_I(A)$; le reste est clair d'après 2°).

Nous disons que k vérifie la

condition (\forall) ,

lorsque les conditions suivantes sont vérifiées:

quel que soit L/k extension finie séparable, quel que soit E corps gauche de rang fini sur son centre L , et si un groupe Γ des automorphismes de L sur k est, ou bien

cyclique d'ordre premier impair, ou bien non-cyclique d'ordre 4, et tel que $\text{Nrd}_{E/L}(E^*)$ soit stable sous l'opération de Γ , alors

$$H^1(\Gamma, \text{Nrd}_{E/L}(E^*)) = 0 .$$

Si un corps vérifie la condition C_2^0 (voir p. ex. [4], p.373), alors il vérifie la condition (v) d'après un théorème classique de Noether et Hilbert. En outre les corps globaux vérifient la condition (v) d'après un théorème de M. Eichler en arithmétiques (voir [2], p.120, avant-dernière ligne).

Le but de cette conférence est de démontrer simultanément les deux résultats suivants:

THÉORÈME. Soit A une algèbre simple de rang fini sur son centre

K à involution I de deuxième espèce, alors

- (i) l'exposant de $\text{USK}_1(A, \tilde{I})$ divise $\frac{i(A)}{i(A)'}$, où on a noté $i(A)'$ le plus grand diviseur de $i(A)$ sans facteur carré;
- (ii) $\text{USK}_1(A, \tilde{I}) = 1$, si K vérifie la condition (v).

Le résultat (i) est une amélioration de 2^0 (voir aussi [6], 2.8), tandis que le résultat (ii) est une généralisation simultanée d'un théorème de V. I. Jančevskiĭ ([4], Th.1) et d'un théorème de C.T.C. Wall ([12], Th.2). Comme on va prouver (i) et (ii) en même temps, et comme cette démonstration sera très courte (voir § 4.), je pense qu'il est intéressant de démontrer ici ce théorème bien que les résultats n'en soient pas complètement inattendus.

§ 2. SUR LE GROUPE DE KLEIN

Soit $\Gamma = \{1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ le groupe de Klein, c'est-à-dire $\sigma_0 = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$ et $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$. Posons $\Gamma_1 := \{1, \sigma_1\}$

($i = 0, 1, 2$), et soit M un Γ -module à droite. Si on note $\hat{H}^r(./.)$ ($r \in \mathbb{Z}$) les groupes de cohomologie au sens de Tate et $\eta: M \longrightarrow M^{\Gamma_0}$ (= sous-module des éléments invariants sous Γ_0) la norme, alors

PROPOSITION 1. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow M^{\Gamma_1} + M^{\Gamma_2} \longrightarrow \eta^{-1}(M^\Gamma) \xrightarrow{\alpha} \hat{H}^{-1}(\Gamma/\Gamma_1, M^{\Gamma_1}) \xrightarrow{\beta} \hat{H}^{-1}(\Gamma_2, M) ,$$

induit par $m \longmapsto m \xrightarrow{(1-\sigma_2)} m \longmapsto m$.

En fait, à partir de l'identité

$$(2) \quad (1+\sigma_0)(1-\sigma_1) = (1-\sigma_2)(1-\sigma_1) \text{ dans } \mathbb{Z}[\Gamma]$$

on obtient - quel que soit $x \in \eta^{-1}(M^\Gamma)$ -

$$0 = x \begin{matrix} (1+\sigma_0)(1-\sigma_1) \\ \Gamma_1 \end{matrix} = x \begin{matrix} (1-\sigma_2)(1-\sigma_1) \\ \Gamma_1 \end{matrix} ,$$

donc $x \begin{matrix} (1-\sigma_2) \\ \Gamma_1 \end{matrix} \in M^{\Gamma_1}$ et $\eta_{\Gamma/\Gamma_1}(x \begin{matrix} (1-\sigma_2) \\ \Gamma_1 \end{matrix}) := x \begin{matrix} (1-\sigma_2)(1+\sigma_2) \\ \Gamma_1 \end{matrix} = 0$,

c'est-à-dire ceci permet de définir α comme ci-dessus, et l'on en tire immédiatement

$$\beta \circ \alpha = 0 .$$

Réciproquement, soit $\beta(\bar{y}) = \bar{0}$ (avec $y \in M^{\Gamma_1}$ tel que l'on ait $y \begin{matrix} (1+\sigma_2) \\ \Gamma_1 \end{matrix} = \eta_{\Gamma/\Gamma_1}(y) = 0$), c'est-à-dire il existe $x \in M$ avec $y = x \begin{matrix} (1-\sigma_2) \\ \Gamma_1 \end{matrix}$, donc - en utilisant (2) encore une fois -

$$0 = y \begin{matrix} (1-\sigma_1) \\ \Gamma_1 \end{matrix} = x \begin{matrix} (1-\sigma_2)(1-\sigma_1) \\ \Gamma_1 \end{matrix} = x \begin{matrix} (1+\sigma_0)(1-\sigma_1) \\ \Gamma_1 \end{matrix} ,$$

ce qui veut dire

$$\bar{y} = \alpha(x) \text{ et } \eta(x) \in M^\Gamma .$$

Finalement soit $\alpha(x) = \bar{0}$; il existe donc $y \in M^{\Gamma_1}$ tel que $x \begin{matrix} (1-\sigma_2) \\ \Gamma_1 \end{matrix} = y \begin{matrix} (1-\sigma_2) \\ \Gamma_1 \end{matrix}$, par conséquent $x = y + z$ avec $z \in M^{\Gamma_2}$.

Ceci implique

$$\text{Ker } \alpha = M^{\Gamma_1} + M^{\Gamma_2} ,$$

c.q.f.d..

Maintenant on regarde le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \hat{H}^{-1}(\Gamma/\Gamma_1, M^{\Gamma_1}) & & \\
 & & & & \cong & & \\
 & & & & \searrow \beta & & \\
 0 & \searrow & & & & & \hat{H}^{-1}(\Gamma_2, M) \\
 & & H^1(\Gamma/\Gamma_1, M^{\Gamma_1}) & & & & \\
 & & \swarrow \text{inf} & & & & \\
 & & & & & & \\
 0 & \longrightarrow & H^1(\Gamma/\Gamma_2, M^{\Gamma_2}) & \xrightarrow{\text{inf}} & H^1(\Gamma, M) & \xrightarrow{\text{res}} & H^1(\Gamma_2, M) \quad .
 \end{array}$$

Le pentagone est commutatif et les deux suites sont exactes (voir p. ex. [10], Ch. VII, §6.). En utilisant convenablement la Prop. 1 ci-dessus on en déduit:

PROPOSITION 2. $\mathfrak{N}^{-1}(M^\Gamma)/(M^{\Gamma_1} + M^{\Gamma_2}) \cong \text{Ker } \beta \cong$
 $\cong \text{inf}(H^1(\Gamma/\Gamma_1, M^{\Gamma_1})) \cap \text{inf}(H^1(\Gamma/\Gamma_2, M^{\Gamma_2})) \subseteq H^1(\Gamma, M) .$

COROLLAIRE. $H^1(\Gamma, M) = 0$ implique $\mathfrak{N}^{-1}(M^\Gamma) = M^{\Gamma_1} + M^{\Gamma_2} .$

EXEMPLES.

(A) Soit L/k une extension galoisienne à groupe de Galois Γ ; soient $K_i := L^{\Gamma_i}$ ($i = 0, 1, 2$), et soit $N := N_{L/K_0}$. Alors, d'après un théorème classique de Noether et Hilbert, le corollaire donne $N^{-1}(k^*) = K_1^* \cdot K_2^* .$

(B) Soit L/k comme ci-dessus, et soit E un corps gauche de rang fini sur son centre L tel que $\text{Nrd}_{E/L}(E^*)$ soit stable sous l'opération de Γ . Alors, si k vérifie la condition (∇), on obtient

$$N^{-1}(k^*) \cap \text{Nrd}_{E/L}(E^*) = (K_1^* \cap \text{Nrd}_{E/L}(E^*)) \cdot (K_2^* \cap \text{Nrd}_{E/L}(E^*)) .$$

En fait, l'exemple (B) donne la motivation pour la notion "condition (∇)".

§ 3. QUELQUES SUITES EXACTES

Supposons $A = D =$ corps gauche avec $i(A) = i(D) = 2^r$, et

supposons en sus

- (3) l'existence d'une extension quadratique séparable l/k telle
que $l \subseteq S_I(D)$, donc $l \not\subseteq K$.

Posons

$L := Kl$ et $E := Z_D(L)$ = commutant de L dans D ,
 alors L est le centre du corps gauche E avec $i(E) = 2^{r-1}$, et
 L/k est une extension galoisienne à groupe de Galois Γ (= le
 groupe de Klein, voir § 2.). Soient $\Gamma_0 = \{1, \sigma_0\} := \text{Gal}(L/k)$ et
 $\Gamma_1 = \{1, \sigma_1\} := \text{Gal}(L/l)$, alors on obtient $K_0 = k$ et $K_1 = l$
 (au sens de l'exemple (A) dans § 2.). D'autre part notre involu-
 tion I induit sur E une involution $i := I|_E$ de deuxième
 espèce avec $L \cap S_I(E) = l = K_1$, c'est-à-dire $\sigma_1 = i|_L$. Enfin
 le théorème de Skolem et Noether permet de trouver un élément

$$g \in D^* \text{ tel que } \lambda^{\sigma_0} = g\lambda g^{-1} \quad (\lambda \in L \subseteq E \subseteq D) .$$

Maintenant la définition $d^{I_0} := g d^{I_0} g^{-1}$

nous donne sur D une involution I_0 de deuxième espèce avec
 $I_0 \sim I$, et - par restriction - sur E une involution $i_0 := I_0|_E$
 de deuxième espèce avec

$$i_0 \not\sim i \text{ et } l_0 := L \cap S_{i_0}(E) = K_2 \quad (\text{au sens de l'exemple (A)} \\ \text{dans § 2.) ,}$$

c'est-à-dire $\sigma_2 = \sigma_1 \sigma_0 = \sigma_0 \sigma_1 = i_0|_L$.

On va utiliser les abréviations suivantes:

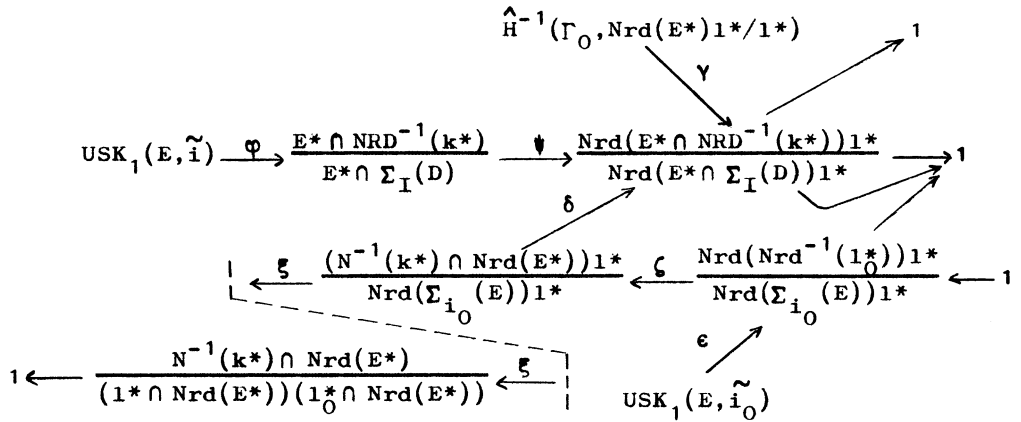
$$\text{NRD} := \text{Nrd}_{D/K} , \text{Nrd} := \text{Nrd}_{E/L} \text{ et } N := N_{L/K} .$$

À partir des formules

$$\text{NRD}|_E = N \cdot \text{Nrd} \quad (\text{voir [3], p.28}) - \text{ donc } \text{Nrd}(E^* \cap \text{NRD}^{-1}(k^*)) \Rightarrow \\ \text{Nrd}(\text{NRD}^{-1}(1_0^*)) = 1_0^* \cap \text{Nrd}(E^*) \subseteq N^{-1}(k^*) \cap \text{Nrd}(E^*) = \dots ,$$

$\Sigma_{i_0}(E) \subseteq \Sigma_{I_0}(D) = \Sigma_I(D)$ (c'est clair), et
 $\text{Nrd}(E^*)^{(1-\sigma_0)} \subseteq \text{Nrd}(E^* \cap [D^*, D^*]) \subseteq \text{Nrd}(E^* \cap \Sigma_I(D))$ (voir [3],
 p.50),

on obtient par un calcul simple les cinq suites exactes ci-dessous:



- avec:
- γ induit par l'identité
 - φ induit par l'inclusion
 - ψ induit par Nrd modulo 1^*
 - ξ induit par l'application $\forall \lambda \mapsto \nu$ ($\lambda \in 1^*$ et $\nu \in N^{-1}(k^*) \cap \text{Nrd}(E^*)$)
 - δ induit par l'identité
 - ζ induit par l'inclusion
 - ϵ induit par Nrd modulo 1^*

Comme application on en tire:

(4) l'exposant de $\frac{E^* \cap \text{NRD}^{-1}(k^*)}{E^* \cap \Sigma_I(D)}$ divise le double de l'exposant
de $\text{USK}_1(E, \tilde{i})$;

(5) $i(A) = i(D) = 2$ (c'est-à-dire $r = 1$ et $E = L$) implique
 $E^* \cap \text{NRD}^{-1}(k^*) = E^* \cap \Sigma_I(D)$ (voir 2° et l'exemple (A), § 2.) ;

(6) $\text{USK}_1(E, \tilde{i}) = \text{USK}_1(E, \tilde{i}_0) = 1$ implique $E^* \cap \text{NRD}^{-1}(k^*) =$
 $= E^* \cap \Sigma_I(D)$, si k vérifie la condition (∇) (voir l'exemple
 (B) dans § 2.).

§ 4. LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

D'après 4^o, 5^o et 6^o dans § 1. on peut se restreindre au cas

$$A = D = \text{corps gauche avec } i(A) = i(D) = 2^r$$

(voir p. ex. (6.10), (6.11) et (6.12) dans [3], p.52/53, et lignes 12 à 14 sur p.121 dans [2]).

Maintenant, en utilisant convenablement 1^o et 2^o, un résultat classique montre que pour démontrer le théorème il suffit de supposer

(3) (voir § 3.) et de démontrer

$$(7) \quad \text{l'exposant de } \frac{E^* \cap \text{NRD}^{-1}(k^*)}{E^* \cap \Sigma_I(D)} \text{ divise } 2^{r-1},$$

et

$$(8) \quad E^* \cap \text{NRD}^{-1}(k^*) = E^* \cap \Sigma_I(D), \text{ si } k \text{ vérifie la condition (v).}$$

Mais pour $r = 1$ les deux assertions sont vraies d'après (5), et pour $r > 1$ on utilise une récurrence sur r , ce qui donne (7) resp. (8) en utilisant (4) resp. (6), c.q.f.d..

RÉFÉRENCES

- [1] A.A. ALBERT - Structure of Algebras - AMS Coll. Publ. 24, New York (1939).
- [2] P. DRAXL - SK₁ über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen - J. reine u. angew. Math. 293/294, 116-142 (1977).
- [3] P. DRAXL, M. KNESER (éditeurs) - SK₁ von Schiefkörpern - Seminar Bielefeld-Göttingen, SS 1976 (distribué par Math. Inst. d. Univ. Göttingen, Bunsenstr. 3/5, D-3400 Göttingen).
- [4] V.I. JANČEVSKIĀ - Simple Algebras with Involution, and Unitary Groups - Math. USSR Sbornik 22, 372-385 (1974).
- [5] V.I. JANČEVSKIĀ - On Reduced Unitary K-Theory - Soviet Math.

- Dokl. 17, 1220-1223 (1976).
- [6] V.I. JANČEVSKIĀ - K-théorie réduite unitaire et corps gauches sur un corps valué henselien à valuation discrète (en russe) - Izv. Akad. Nauk SSSR 42, 879-918 (1978).
- [7] V.P. PLATONOV, V.I. JANČEVSKIĀ - The Structure of Unitary Groups and the Commutator Group of a Simple Algebra over Global Fields - Soviet Math. Dokl. 14, 132-136 (1973).
- [8] V.P. PLATONOV, V.I. JANČEVSKIĀ - On the Kneser-Tits Conjecture for Unitary Groups - Soviet Math. Dokl. 16, 1456-1460 (1975).
- [9] C. RIEHM - The Corestriction of Algebraic Structures - Inventiones math. 11, 73-98 (1970).
- [10] J.-P. SERRE - Corps locaux - Paris (1962).
- [11] J. TITS - Groupes de Whitehead de groupes algébriques simples sur un corps - Séminaire Bourbaki 505 (1976/77).
- [12] C.T.C. WALL - On the Commutator Subgroups of Certain Unitary Groups - J. of Algebra 27, 306-310 (1973).

Peter DRAXL
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Postfach 8640
D-4800 Bielefeld