Astérisque

PIERRETTE CASSOU-NOGUES

Analogues p-adiques des fonctions Γ-multiples

Astérisque, tome 61 (1979), p. 43-55
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__43_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 61 (1979) p. 43-55

ANALOGUES p-ADIQUES DES FONCTIONS Γ-MULTIPLES

par

Pierrette CASSOU-NOGUÈS

-:-:-:-

Soit M une extension abélienne, réelle, finie d'un corps de nombres K totalement réel, de conducteur $\mathfrak{f}$. Soit $K_{\mathfrak{f}}$ l'ensemble des éléments α de K qui sont totalement positifs et congrus à 1 modulo $\mathfrak{f}$ (c'est-à-dire que $v_{\mathfrak{p}}(\alpha-1) \geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f})$ pour tout idéal $\mathfrak{p}$ divisant $\mathfrak{f}$).

Notons $I_{\mathfrak{f}}$ le groupe des idéaux fractionnaires de K, engendré par les idéaux premiers ne divisant pas $\mathfrak{f}$ et $P_{\mathfrak{f}}$ le sous-groupe des idéaux principaux engendrés par les éléments de $K_{\mathfrak{f}}$. Le groupe quotient $I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}$ est appelé le groupe des classes de rayon $\mathfrak{f}$ et est noté $R_{\mathfrak{f}}$. D'après la théorie du corps de classes, l'application d'Artin : $\mathfrak{a} \in I_{\mathfrak{f}} \longmapsto \sigma_{\mathfrak{a}} \in G(M/K)$ induit un homomorphisme surjectif de $R_{\mathfrak{f}}$ sur $G(M/K)$, le groupe de Galois de M sur K. Soit $\mathfrak{X}$ l'ensemble des caractères primitifs associés aux caractères du groupe de Galois de M sur K.

Pour $\chi \in \mathfrak{X}$, de conducteur $\mathfrak{f}(\chi)$, on définit :

$$L(\chi, s) = \sum_{(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}(\chi))=1} \chi(\sigma_{\mathfrak{a}})\, N\mathfrak{a}^{-s} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s)>1$$

où la sommation est prise sur les idéaux entiers $\mathfrak{a}$ de K, premiers à $\mathfrak{f}(\chi)$. On a encore :

$$L(\chi, s) = \sum_{\sigma \in G(M/K)} \chi(\sigma)\, \zeta_M(\sigma, s)$$

où $\zeta_M(\sigma, s)$ est la fonction zêta partielle associée à σ définie par

$$\zeta_M(\sigma, s) = \sum_{\substack{(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1 \\ \sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma}} N\mathfrak{a}^{-s} \qquad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1$$

où la sommation est prise sur les idéaux $\mathfrak{a}$ entiers, premiers à $\mathfrak{f}$, tels que $\sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma$. Si M est le corps de classes de rayon $\mathfrak{f}$ on notera

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s) = \zeta_M(\sigma_{\mathfrak{a}^{-1}}, s)$$

Shintani [13] a montré que l'on pouvait écrire

$$(1) \qquad \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s) = N\mathfrak{a}^{s} \sum_{L_{j,x}} Z(NL_{j,x}, s)$$

où les $L_{j,x}$ sont en nombre fini et de la forme

$$(2) \qquad L_{j,x}(y) = x + v_{j,1} y_1 + \dots + v_{j,r(j)} y_{r(j)} ,$$

$(v_{j,i} \in \mathfrak{a}\mathfrak{f}$, $v_{j,i} \gg 0$, $x = \Sigma x_i v_{j,i}$, $x_i \in \mathbb{Q}$, $0 < x_i \leq 1$, et $x \in \mathfrak{a}$, $x \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$ $)$
et

$$(3) \qquad Z(NL_{j,x}, s) = \sum_{m_1 = 0}^{\infty} \dots \sum_{m_{r(j)} = 0}^{\infty} N(L_{j,x}(m))^{-s} .$$

On peut montrer [13] que les fonctions $s \longmapsto Z(NL_{j,x}, s)$ se prolongent à tout le plan complexe en des fonctions méromorphes dont les valeurs aux entiers négatifs sont rationnelles, ce qui prouve la rationnalité de $\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, -k)$ pour tout entier k positif ou nul. Ce résultat avait déjà été démontré par Klingen [9] et Siegel [12] en utilisant la théorie des formes modulaires.

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal entier de K possédant la propriété suivante

$$(4) \quad \begin{cases} \text{(i)} & (\mathfrak{c}, \mathfrak{f}) = 1 \;;\; (\mathfrak{c}, \mathfrak{D}) = 1 \text{ où } \mathfrak{D} \text{ désigne la différente de } K \\ \text{(ii)} & (\mathfrak{c}, (v_{j,i})) = 1 \text{ pour tout } j \in J \text{ et tout } i \in \{1, 2, \dots, r(j)\} \\ \text{(iii)} & O_K/\mathfrak{c} \simeq Z/cZ \text{ si } c \text{ est un générateur positif de } \mathfrak{c} \cap Z . \end{cases}$$

Considérons

$$(5) \qquad \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s) = N\mathfrak{c}^{1-s} \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}, s) - \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s) .$$

Soit ν un élément de K tel que $\operatorname{Tr}_{K/Q}(\nu) = \frac{b}{c}$ où $(b, c) = 1$. On peut alors montrer que

$$(6) \qquad \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s) = N\mathfrak{a}^{s} \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} (\exp 2\pi i \operatorname{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\mu\nu x))\, Z(NL_{j,x}, \xi^{\mu}, s)$$

où $Z(NL_{j,x}, \xi^{\mu}, s) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_{r(j)}=0}^{\infty} \xi_{j,1}^{\mu m_1} \cdots \xi_{j,r(j)}^{\mu m_{r(j)}} NL_{j,x}(m)^{-s}$ et

$\xi_{j,1}, \ldots, \xi_{j,r(j)}$ sont des racines primitives c-ièmes de 1 .

Nous allons étudier une classe de séries de Dirichlet qui contient les fonctions $Z(NL_{j,x}, \xi^{\mu}, s)$. Ceci nous permet, en particulier, de retrouver (cor. 3) le théorème de Deligne et Ribet [6], sur l'existence d'une fonction p-adique $\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)$ telle que pour tout entier $k \geq 0$, $k \equiv -1 \mod \delta$ où $\delta | (p-1)$, $\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, -k) = \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, -k)$. On peut aussi obtenir l'existence d'analogues p-adiques des fonctions Γ-multiples et une formule remarquable (th. 6), généralisant celle de Ferrero [8], qui exprime $L'_p(\chi, 0)$ à l'aide de ces fonctions.

I. - Théorèmes généraux sur les séries de Dirichlet

Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION. - *On dira que le polynôme* $P \in K[X_1, \ldots, X_r]$ *possède la propriété* (∗), *si*

$$P(X) = (P_1(X) + a_1)^{\alpha_1} \ldots\ldots (P_t(X) + a_t)^{\alpha_t}$$

où

i) *les* P_i *sont des polynômes homogènes, de même degré strictement positifs, à* r *variables, à coefficients dans* K *positifs ou nuls,*

ii) *les* a_i *sont des éléments de* K *strictement positifs,*

iii) *les* α_i *sont des nombres entiers positifs ou nuls tels que* $\Sigma\, \alpha_i \neq 0$.

Considérons un polynôme $P \in K[X_1, \ldots, X_r]$ possédant la propriété (∗) et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ un r-uple formé de racines de l'unité différentes de 1 . Posons :

$$Z(P, \xi, s) = \sum_{n \in \mathbb{N}^r} P(n)^{-s}\, \xi_1^{n_1} \ldots \xi_r^{n_r} .$$

Il existe un σ_o tel que cette série converge dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \sigma_o$ et on se propose d'étudier son prolongement. Le résultat est le suivant :

THÉORÈME 1. - La fonction $s \mapsto Z(P, \xi, s)$ se prolonge à tout le plan complexe en une fonction holomorphe et pour tout entier $k \geq 0$,

$$Z(P, \xi, -k) = R(P^k)(\xi)$$

où $R(P^k)(T) \in K(T_1, \ldots, T_r)$ et $R(P^k)(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}^r} P^k(n)\, T^n$.

Remarques. - 1) $R(P^k)(T)$ est une fraction rationnelle de la forme [3]

$$R(P^k)(T) = \sum_{\text{fini}} \frac{\lambda_i(k)}{(1-T)^i}$$

où $(1-T)^i = (1-T_1)^{i_1} \ldots (1-T_r)^{i_r}$, $\lambda_i(k) \in K$.

Elle est donc bien définie pour $T = \xi$ et $R(P^k)(\xi) \in K(\xi_1, \ldots, \xi_r)$.

2) En fait si l'un des ξ_i est égal à 1, $Z(P, \xi, s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$. Les valeurs aux entiers négatifs appartiennent encore à $K(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ mais ne s'expriment plus de la même façon.

On suppose en outre que K est un corps de nombres.

Il est aisé de déduire de ce qui précède le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Si p est un nombre premier, tel que les ξ_i ne soient pas des racines de l'unité d'ordre une puissance de p, alors :

$$|Z(P, \xi, -k)|_{\mathfrak{p}} \leq \sup |P(n)^k|_{\mathfrak{p}}$$

pour tout premier $\mathfrak{p}$ de $K(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ au-dessus de p.

Soit p un nombre premier impair, $\mathbb{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire et $\mathbb{Z}_p$ son anneau de valuation. On note F l'algèbre des fonctions sur $\mathbb{Z}_p$, à valeurs dans un anneau complet $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}_p$, et U_1 le sous-groupe de $\mathbb{Z}_p^*$ formé des entiers p-adiques u tels que $u \equiv 1 \pmod p$. Si $u \in U_1$, on note f_u la fonction $s \mapsto u^s$. Les f_u $(u \in U_1)$ engendrent un sous $\mathcal{O}$-module L de F. Ils forment même une base de L et l'on peut identifier L à l'algèbre $\mathcal{O}[U_1]$ du groupe U_1. On définit maintenant $\bar{L}$ comme étant l'adhérence de L dans F pour la topologie de la convergence uniforme. Les éléments de $\bar{L}$ sont appelés fonctions d'Iwasawa.

Supposons maintenant $p=2$. Notons U_2 le sous-groupe de $\mathbb{Z}_2^*$, formé des entiers 2-adiques tels que $u \equiv 1 \mod 4$. L est l'algèbre engendré par les fonctions $f_u : s \mapsto u^s$ avec $u \in U_2$.

Soit p un nombre premier et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de K au-dessus de p .

DÉFINITION. - <u>On dira que</u> P <u>possède la propriété</u> $*\mathfrak{p}$ <u>si</u> :

i) P <u>possède la propriété</u> $*$

ii) <u>les coefficients des polynômes</u> P_i <u>appartiennent à</u> $\mathfrak{p}$

iii) <u>les</u> a_i <u>sont congrus à</u> 1 <u>mod</u> $\mathfrak{p}$.

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> p <u>un nombre premier tel que les</u> ξ_i <u>ne soient pas des racines de l'unité d'ordre une puissance de</u> p . <u>Soit</u> $\mathfrak{p}$ <u>un idéal premier de</u> K <u>au-dessus de</u> p <u>et</u> P <u>un polynôme de</u> $K[X_1, \ldots, X_r]$ <u>possédant la propriété</u> $*\mathfrak{p}$.

<u>Alors il existe une fonction d'Iwasawa unique</u> $Z_{\mathfrak{p}}(P, \xi, s)$ <u>telle que pour tout entier</u> $k \geq 0$

$$Z_{\mathfrak{p}}(P, \xi, -k) = Z(P, \xi, -k) .$$

II. - <u>Applications arithmétiques</u>

On reprend ici les notations de l'introduction.

Soient K <u>un corps de nombres totalement réel</u> et $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K . Soit $\mathfrak{a}$ un idéal entier de K , premier à $\mathfrak{f}$. On rappelle qu'il existe un nombre fini de $L_{j,x}$ telles que

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s) = N\mathfrak{a}^s \sum_{L_{j,x}} Z(NL_{j,x}, s)$$

où

$$L_{j,x}(y) = x + v_{j,1} y_1 + \ldots + v_{j,r(j)} y_{r(j)}$$

$(v_{j,i} \in \mathfrak{a}\mathfrak{f}, v_{j,i} \gg 0 , x = \sum x_i v_{j,i} , x_i \in \mathbb{Q} , 0 < x_i \leq 1 ,$ et $x \in \mathfrak{a} , x \equiv 1 \mod \mathfrak{f})$

$$Z(NL_{j,x}, s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^r} N(L_{j,x}(m))^{-s} .$$

1) Fonctions L p-adiques [3]

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal entier de K, possédant la propriété (4). On considère :

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s) = N\mathfrak{c}^{1-s}\,\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}, s) - \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s)$$

alors :

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s) = N\mathfrak{a}^{s}\sum_{\mu=1}^{c-1}\sum_{L_{j,x}} (\exp 2\pi i\,\mathrm{tr}(\mu\nu x))\; Z(NL_{j,x}, \xi_j^{\mu}, s)$$

où :

$$Z(NL_{j,x}, \xi_j^{\mu}, s) = \sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_{r(j)}=0}^{\infty} \xi_{j,1}^{\mu m_1}\cdots\xi_{j,r(j)}^{\mu m_{r(j)}}\, N(L_{j,x}(m))^{-s}$$

et les $\xi_{j,i}$ sont des racines primitives c-ièmes de l'unité. Les propriétés de $L_{j,x}$ permettent alors de dire que le polynôme $NL_{j,x}(X) \in K[X_1, \ldots, X_{r(j)}]$ possède la propriété (*), avec des polynômes P_i homogènes du premier degré et des α_i égaux à 1. Alors le théorème 1 permet d'écrire :

COROLLAIRE 1. - La fonction $s \longmapsto Z(NL_{j,x}, \xi^{\mu}, s)$ se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction holomorphe et l'on a :

$$Z(NL_{j,x}, \xi^{\mu}, -k) = R(NL_{j,x}^{k})(\xi^{\mu})$$

où

$$R(NL_{j,x}^{k})(T) = \sum_{n\in\mathbb{N}^r} NL_{j,x}(n)^k\, T^n .$$

Remarque. - Shintani [13] a montré que $s \longmapsto Z(NL_{j,x}, \xi^{\mu}, s)$ admettait un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, mais il a exprimé les valeurs aux entiers négatifs à l'aide de valeurs de polynômes de Bernoulli, sous une forme qui est directement inutilisable pour l'arithmétique.

On peut donc écrire :

$$(7) \qquad \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, -k) = N\mathfrak{a}^{-k}\sum_{\mu=1}^{c-1}\sum_{L_{j,x}} (\exp 2\pi i\,\mathrm{tr}(\mu\nu x))\; R((NL_{j,x})^{k})(\xi_j^{\mu}) .$$

Le théorème 2 donne le résultat suivant :

COROLLAIRE 2. - Si p ne divise pas c, $\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, -k)$ est p-entier pour tout $k \geq 0$.

Supposons que p soit un nombre premier de $\mathbb{Z}$ et que $\mathfrak{f}$ soit divisible par tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ de K au-dessus de p , alors $NL_{j,x}$ possède la propriété $*\mathfrak{p}$ pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}|(p)$. On en déduit :

COROLLAIRE 3. - <u>Si</u> p <u>est un nombre premier et si</u> $\mathfrak{f}$ <u>est divisible par tous</u> les <u>les idéaux premiers de</u> K <u>au-dessus de</u> p , <u>il existe une fonction d'Iwasawa unique</u> $Z_p(NL_{j,x}, \xi, s)$ <u>telle que pour tout nombre entier</u> k , $k \geq 0$

$$Z_p(NL_{j,x}, \xi, -k) = Z(NL_{j,x}, \xi, -k) .$$

Posons $\exp 2\pi i \operatorname{tr}(\nu x) = \xi_x$. Alors on peut définir :

$$\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s) = \langle N\mathfrak{a}\rangle^s \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^\mu \, Z_p(NL_{j,x}, \xi_j^\mu, s) \tag{8}$$

qui est une fonction d'Iwasawa (on écrit, si $a \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$, $a = \langle a\rangle \, \theta(a)$ où $\langle a\rangle \equiv 1 \mod p$ et $\theta^{p-1}(a) = 1$).

Soit χ un caractère primitif de conducteur $\mathfrak{f}$, on pose :

$$L_p(\chi, s) = \frac{1}{1 - \chi(\mathfrak{c})\langle N\mathfrak{c}\rangle^{1-s}} \sum_{\mathfrak{a} \in R_{\mathfrak{f}}} \chi(\mathfrak{a}^{-1}) \, \zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s) \tag{9}$$

Soit χ un caractère de conducteur $\mathfrak{f}_1$ et soit $\mathfrak{f} = \operatorname{ppcm}(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s)$ et χ' le caractère induit par χ sur $R_{\mathfrak{f}}$. On définit $L_p(\chi, s)$ par

$$L_p(\chi, s) = L_p(\chi', s) .$$

2) <u>Analogues des fonctions</u> Γ-<u>multiples</u>

Rappelons tout d'abord ce que sont les fonctions Γ-multiples complexes [1], [14].

Pour un r-uple $v = (v_1, \dots, v_r)$ de nombres positifs et pour un nombre positif a , on note :

$$Z(L_a, s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^r} L_a(m)^{-s} \quad \text{où} \quad L_a(m) = a + m_1 v_1 + \dots + m_r v_r .$$

On définit alors :

$$(11) \qquad -\mathrm{Log}\, \rho_r(v) = \lim_{a\to+0} \left[\frac{d}{ds} Z(L_a, s)\right]_{s=0} + \mathrm{Log}\, a \ ; \ \mathrm{Log} \frac{\Gamma_r(a,v)}{\rho_r(v)} = \frac{d}{ds}\left[Z(L_a, s)\right]_{s=0}.$$

On montre que, en tant que fonction de a, $\Gamma_r(a,v)^{-1}$ est une fonction entière d'ordre r. D'autre part, posons $\check{v}(i) = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_r)$. Alors la fonction Γ-multiple satisfait :

$$\mathrm{Log} \frac{\Gamma_r(a+v_i, v)}{\rho_r(v)} - \mathrm{Log} \frac{\Gamma_r(a,v)}{\rho_r(v)} = -\mathrm{Log} \frac{\Gamma_{r-1}(a, \check{v}(i))}{\rho_{r-1}(\check{v}(i))}$$

si $r>1$. Pour $r=1$

$$\mathrm{Log} \frac{\Gamma_1(a,v)}{\rho_1(v)} = \mathrm{Log} \frac{\Gamma(a/v)}{\sqrt{2\pi}} + \left(\frac{a}{v} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{Log}\, v\,.$$

Soit χ un caractère fidèle pair, de conducteur f du groupe de Galois d'une extension abélienne de $\mathbb{Q}$. On sait que la fonction Γ_1 est liée à $L(\chi, s)$ dans les formules suivantes :

$$(12) \qquad L'(\chi, 0) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a)\, \mathrm{Log} \frac{\Gamma_1(a,f)}{\rho_1(f)}$$

et

$$(13) \qquad L(\chi, 1) = \sum_{a=1}^{f} \chi(a) \frac{d}{dz}\left[\mathrm{Log} \frac{\Gamma_1(z,f)}{\rho_1(f)}\right]_{z=a}$$

Shintani a généralisé (12) de la manière suivante :

Soient $(v_{j,i})$ $(1\leq i\leq r,\ 1\leq j\leq n)$ des nombres réels positifs et soit $x = (x_1, \dots, x_r)$ un r-uple de nombres réels positifs. On pose :

$$L_{j,x}(y) = v_{j,1}(y_1+x_1) + \dots + v_{j,r}(y_r+x_r)$$

et

$$Z\left(\prod_{j=1}^{n} L_{j,x}, s\right) = \sum_{m\in\mathbb{N}^r} \prod_{j=1}^{n} L_{j,x}(m)^{-s}\,.$$

Pour chaque r-uple $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_r)$ d'entiers non négatifs, on pose :

$$C_\ell(A) = \sum_{j,k} \int_0^1 \left\{ \prod_{i=1}^{r} (v_{j,i} + v_{k,i} u)^{\ell_i - 1} - \prod_{i=1}^{r} v_{j,i}^{\ell_i - 1} \right\} \frac{du}{u}$$

où la sommation sur (j,k) est prise sur toutes les paires (j,k) d'entiers positifs avec $1\leq j, k\leq n$ et $j\neq k$.

Alors :

$$(14)\qquad \frac{d}{ds} Z\Big(\prod_{j=1}^{n} L_{j,x}, s\Big) = \operatorname{Log}\left\{\prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma_r(x.v_j, v_j)}{\rho_r(v_j)}\right\} + \frac{(-1)^r}{n} \sum_{\ell} C_\ell(A) \prod_{i=1} \frac{B_{\ell_i}(x_i)}{\ell_i\,!}$$

où la sommation sur ℓ est prise sur tous les r-uples d'entiers non négatifs qui satisfont $\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_r = r$ et où $x.v_j = \Sigma\, x_i v_{j,i}$.

Soient K un corps de nombres totalement réel et $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K . Soit $\mathfrak{a}$ un idéal entier de K , premier à $\mathfrak{f}$.

On a vu qu'il existait un nombre fini de $L_{j,x}$ telles que :

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s) = N\mathfrak{a}^{s} \sum_{L_{j,x}} Z(\check{N}L_{j,x}, s) .$$

Ici, on ne va pas définir un analogue p-adique des fonctions Γ-multiples pour chaque x , mais on va directement associer une fonction Γ à l'idéal $\mathfrak{a}$ (pour la construction des fonctions Γ-multiples, associées à x , voir [4]). Posons, pour tout $\sigma \in S$ où S est l'ensemble des n plongements de K dans $\mathbb{R}$.

$$\beta_{\mathfrak{f}}^{\sigma}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s) = \frac{1}{n} N\mathfrak{a}^{s} \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu}\, Z(L_{j,x}^{\sigma}, \xi_j^{\mu}, ns)$$

où :

$$L_{j,x}^{\sigma}(y) = x^{\sigma} + v_{j1}^{\sigma} y_1 + \ldots + v_{j,r(j)}^{\sigma}\, y_{r(j)} .$$

Cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour tout entier $k \geq 0$,

$$\beta_{\mathfrak{f}}^{\sigma}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, -k) = \frac{1}{n} N\mathfrak{a}^{-k} \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu}\, R(L_{j,x}^{\sigma\ kn})(\xi_j^{\mu}) .$$

On sait aussi que si p ne divise pas c , $n\beta_{\mathfrak{f}}^{\sigma}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, k)$ est p-entier et que si $\mathfrak{f}$ est divisible par (p), il existe une fonction $\beta_{p,\mathfrak{f}}^{\sigma}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)$ unique telle que, $n\beta_{p,\mathfrak{f}}^{\sigma}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)$ soit une fonction d'Iwasawa, et pour tout entier $k \geq 0$, $k \equiv -1 \mod p-1$

$$\beta_{p,\mathfrak{f}}^{\sigma}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, -k) = \beta_{\mathfrak{f}}^{\sigma}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, -k) .$$

PROPOSITION 4.-

$$\left[\frac{d}{ds} \zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)\right]_{s=0} = \sum_{\sigma \in S} \left[\frac{d}{ds} \beta_{p,\mathfrak{f}}^{\sigma}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)\right]_{s=0}$$

et

$$\forall \sigma \in S \qquad \zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, 0) = n\, \beta_{p,\mathfrak{f}}^{\sigma}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, 0) .$$

Preuve. - Par définition :

$$\zeta_{p,\mathfrak{f}}(a^{-1}, \mathfrak{c}, -s) = <Na>^s \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu} R(NL_{j,x}^s)(\xi_j^{\mu}) .$$

D'où :

$$-\left[\frac{d}{ds}\zeta_{p,\mathfrak{f}}(a^{-1}, \mathfrak{c}, -s)\right]_{s=0} = \mathrm{Log} <Na> \zeta_{p,\mathfrak{f}}(a^{-1}, \mathfrak{c}, 0) + \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu} R(\mathrm{Log}_p NL_{j,x})(\xi_j^{\mu}) .$$

Donc :

$$-\left[\frac{d}{ds}\zeta_{p,\mathfrak{f}}(a^{-1}, \mathfrak{c}, s)\right]_{s=0} = \mathrm{Log} <Na> \zeta_{p,\mathfrak{f}}(a^{-1}, \mathfrak{c}, 0) + \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \sum_{\sigma} \xi_x^{\mu} R(\mathrm{Log}\ L_{j,x}^{\sigma})(\xi_j^{\mu}) .$$

D'autre part :

$$\beta_{p,\mathfrak{f}}^{\sigma}(a^{-1}, \mathfrak{c}, -s) = \frac{1}{n} <Na>^s \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu} R(L_{j,x}^{\sigma\, ns})(\xi_j^{\mu}) .$$

Alors :

$$-\left[\frac{d}{ds}\beta_{p,\mathfrak{f}}^{\sigma}(a^{-1}, \mathfrak{c}, -s)\right]_{s=0} = \mathrm{Log} <Na> \beta_{p,\mathfrak{f}}^{\sigma}(a^{-1}, \mathfrak{c}, 0) + \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu} R(\mathrm{Log}\ L_{j,x}^{\sigma})(\xi_j^{\mu}) .$$

D'autre part, on a::

$$\zeta_{p,\mathfrak{f}}(a^{-1}, \mathfrak{c}, 0) = \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu} R(1)(\xi_j^{\mu})$$

et

$$\beta_{p,\mathfrak{f}}^{\sigma}(a^{-1}, \mathfrak{c}, 0) = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{L_{j,x}} \xi_x^{\mu} R(1)(\xi_j^{\mu}) .$$

Donc la proposition 4 est démontrée.

Supposons maintenant que l'idéal c, qui vérifie (4) soit tel que $\mathfrak{c} = (\alpha)$ avec $\alpha \equiv 1(\mathfrak{f})$ et $\alpha \gg 0$.

Puisque

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s) = N\mathfrak{c}^{1-s}\, \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}, s) - \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s)$$

on a :

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s) = \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)/(N\mathfrak{c}^{1-s} - 1)$$

et

$$\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s) = \zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)/(N\mathfrak{c}^{1-s} - 1)\ .$$

Cette fonction ne dépend plus de l'idéal $\mathfrak{c} = (\alpha)$ ni de l'idéal $\mathfrak{a}$ dans sa classe de rayon mod $\mathfrak{f}$.

PROPOSITION 5.-

$$\left[\frac{d}{ds}\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s)\right]_{s=0} = \sum_{\sigma\in S} \left[\frac{d}{ds}\frac{\beta^{\sigma}_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)}{(N\mathfrak{c}^{1-s} - 1)}\right]_{s=0}\ .$$

Preuve. -

$$\left[\frac{d}{ds}\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, s)\right]_{s=0} = \frac{N\mathfrak{c}\ \mathrm{Log} N\mathfrak{c}}{(N\mathfrak{c} - 1)^2}\,\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, 0) + \frac{1}{N\mathfrak{c} - 1}\left[\frac{d}{ds}\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)\right]_{s=0}$$

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\beta^{\sigma}_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)}{(N\mathfrak{c}^{1-s} - 1)}\right]_{s=0} = \frac{N\mathfrak{c}\ \mathrm{Log} N\mathfrak{c}}{(N\mathfrak{c} - 1)^2}\,\beta^{\sigma}_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, 0) + \frac{1}{N\mathfrak{c} - 1}\left[\frac{d}{ds}\beta^{\sigma}_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)\right]_{s=0}$$

$$\sum_{\sigma}\left[\frac{d}{ds}\frac{\beta^{\sigma}_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)}{(N\mathfrak{c}^{1-s} - 1)}\right]_{s=0} = \frac{N\mathfrak{c}\ \mathrm{Log}\ N\mathfrak{c}}{(N\mathfrak{c} - 1)^2}\,\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, 0)$$

$$+ \frac{1}{N\mathfrak{c} - 1}\sum_{\sigma}\left[\frac{d}{ds}\beta^{\sigma}_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)\right]_{s=0}\ .$$

On déduit donc de la proposition 5 que :

$$\sum_{\sigma\in S}\left[\frac{d}{ds}\frac{\beta^{\sigma}_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)}{(N\mathfrak{c}^{1-s} - 1)}\right]_{s=0}$$

ne dépend plus de $\mathfrak{c}$ et ne dépend que de la classe de rayon de $\mathfrak{a}$ mod $\mathfrak{f}$.

DÉFINITION. - On pose :

$$L\Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}) = \sum_{\sigma\in S}\left[\frac{d}{ds}\frac{\beta^{\sigma}_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}^{-1}, \mathfrak{c}, s)}{(N\mathfrak{c}^{1-s} - 1)}\right]_{s=0}\ .$$

THÉORÈME 6. - Soient χ un caractère et $\mathfrak{f}$ le ppcm du conducteur de χ et de $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$. Soit χ' le caractère induit par χ sur $R_{\mathfrak{f}}$. Alors :

$$L'_p(\chi, 0) = \sum_{\mathfrak{a} \in R_{\mathfrak{f}}} \chi'(\mathfrak{a}) \, L\Gamma_{p,\mathfrak{f}}(\mathfrak{a}) .$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARNES E.W., On the theory of the multiple gamma function, Tran. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374-425.

[2] CASSOU-NOGUÈS P., Fonctions L p-adiques d'une extension abélienne d'un corps totalement réel, Journées d'analyse ultramétrique 1976, Marseille-Luminy, exposé n° 9.

[3] CASSOU-NOGUÈS P., Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et des fonctions zêta p-adiques, (à paraître Inv. Math.).

[4] CASSOU-NOGUÈS P., Fonctions Γ-multiples p-adiques (à paraître).

[5] CASSOU-NOGUÈS P., Etude de certaines séries de Dirichlet (à paraître).

[6] DELIGNE P., RIBET K., Values of abelian L-functions at negative integers (à paraître).

[7] DIAMOND J., The p-adic Log gamma function and p-adic Euler constants (à paraître in Trans. A.M.S.).

[8] FERRERO B. and GREENBERG R., On the behaviour of p-adic L functions at s = 0 (à paraître).

[9] KLINGEN H., Über die Werte der Dedekindsche Zetafunktion, Math. Annalen, t. 145 (1962), p. 265-272.

[10] MORITA Y., A p-adic analogue of the Γ-function, J. Fac. Science Univ. Tokyo, 22, 1975.

[11] SERRE J.-P., Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques "Modular functions of one variable III" (1972) Antwerpen p. 191-268, Berlin, Springer Verlag (1973) (Lecture Notes in Mathematics, 350).

[12] SIEGEL C.L., Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. K 1, t. 3 (1970), p. 15-56.

[13] SHINTANI T., On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number at non positive integers, J. of Fac. of Sc., Univ. of Tokyo, section 1, t. 23 (1976), p. 393-417.

[14] SHINTANI T., On values at $s = 1$ of certain L-functions of totally real algebraic number fields, Algebraic Number Theory International Symposium, Kyoto 1976, S Iyanaga Ed.

-:-:-:-

Pierrette CASSOU-NOGUÈS
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique de
l'Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX