Daniel Bertrand

Fonctions modulaires et indépendance algébrique (II)

Astérisque, tome 61 (1979), p. 29-34
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__29_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 61 (1979) p. 29-34

FONCTIONS MODULAIRES ET INDEPENDANCE ALGEBRIQUE (II).

par
Daniel BERTRAND

Soit, pour $k = 1,2$ et 3, E_{2k} la série d'Eisenstein normalisée de poids $2k$:

$$E_{2k}(q) = 1 + (-1)^k(4k/B_k) \sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k-1}(q^n/(1-q^n)) \quad ,$$

où B_k désigne le k-ième nombre de Bernoulli. Les récents travaux de G. V. Choodnovsky sur les constantes de la théorie des fonctions elliptiques de Weierstrass fournissent des résultats d'indépendance algébrique concernant les valeurs de ces séries. Nous en établissons ici des versions p-adiques (théorèmes 1 et 3). Nous généralisons et précisons ainsi les résultats de [3].

De même que dans [2] et [3], c'est aux fonctions elliptiques de Tate (cf. [8]) que l'on fait jouer le rôle habituel des fonctions de Weierstrass. Mais ces fonctions admettent deux singularités essentielles, et les majorations analytiques de la théorie des nombres transcendants doivent être adaptées à cette nouvelle situation. Nous ferons ainsi appel au lemme de Schwarz sur les couronnes établi dans [2] et au lemme sur les zéros de "polynômes elliptiques" de [3]. Nous poursuivons ce programme en donnant des estimations analytiques des coefficients de ces polynômes (lemmes 1 et 2), dont le principe remonte aux travaux de Fel'dman et Masser (cf. [6]). On peut alors calquer les démonstrations sur les méthodes de Choodnovsky.

§ 1. INDEPENDANCE ALGEBRIQUE

Soit Ω un corps ultramétrique complet de caractéristique nulle, et de caractéristique résiduelle non nulle. L'idéal maximal $\mathfrak{M}$ de son anneau d'entiers est le domaine d'analyticité des séries E_{2k} .

Théorème 1 : Soit q un élément non nul de $\mathfrak{M}$. Le degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(E_2(q), E_4(q), E_6(q))$ sur $\mathbb{Q}$ est ≥ 2.

Esquisse de la démonstration : Précisons tout d'abord quelques notations et définitions :

- on désigne par $| \ |$ la valeur absolue (ultramétrique) de Ω ,
- par taille d'un polynôme à coefficients entiers rationnels, on entend le maximum de ses degrés partiels et des logarithmes des valeurs absolues archimédiennes de ses coefficients.
- pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la couronne $\{z \in \Omega, \ |q|^n \leq |z| \leq |q|^{-n}\}$. Si f est une fonction analytique sur $\mathcal{C}_n$, on pose : $\|f\|_n = \sup_{z \in \mathcal{C}_n} |f(z)|$.
- on note Θ la fonction thêta fondamentale définie dans [8], formule (6), ζ sa dérivée logarithmique pour l'opérateur de dérivation $D = z(d/dz)$, et $\wp$ la dérivée de $-\zeta$, de sorte que, si K désigne le corps $\mathbb{Q}(E_2(q), E_4(q), E_6(q))$, l'algèbre $K[\zeta, \wp, D\wp]$ est stable par D.
- les lettres $c_1, c_2, \dots$ désignent des nombres réels > 0 effectivement calculables en fonction de q.

Supposons que, contrairement à la conclusion du théorème 1, le corps K soit une extension algébrique d'une extension transcendante (cf. [2]) $\mathbb{Q}(\omega)$, et soit N un entier $> c_1$. Le principe des tiroirs de Dirichlet permet de construire un polynôme non nul $Q(X,Y)$, de degrés partiels $\leq L = [c_2 N]$, dont les coefficients sont des éléments de $\mathbb{Z}[\omega]$, de degrés $\leq c_3 N$, de tailles $\leq c_4 N \operatorname{Log} N$, tel que la fonction $F = Q(\zeta, \wp)$ admette les points $\{-q^n ; n = 0, \dots, N\}$ pour zéros d'ordre $\geq c_3 N$. En vertu du lemme de Schwarz ([2], lemme 2), on a alors : $\|\Theta^{3L} F\|_{c_5 N} \leq \exp(-c_6 N^3)$.

Dans ces conditions, une majoration ([3], lemme) du nombre de zéros de F sur la couronne $\mathcal{C}_{c_5 N}$ assure l'existence d'un élément non nul Q_N de $\mathbb{Z}[X]$, de degré $\leq c_6 N$, de taille $\leq c_7 N \operatorname{Log} N$, tel que $|Q_N(\omega)| \leq \exp(-c_8 N^3)$.

L'existence d'une telle suite de polynômes $\{Q_N ; N \geq c_1\}$ contredit le lemme 10 de [1] (analogue p-adique de critère de transcendance de Gel'fond). ■

Soient $J(q)$ la fonction modulaire $1728(1-(E_6^2(q)/E_4^3(q))^{-1}$, et θ l'opérateur de Ramanujan $q(d/dq)$. Des formules classiques permettent d'énoncer le théorème 1 sous la forme équivalente suivante : pour tout élément $q \neq 0$ de $\mathfrak{M}$, le degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(J(q), \theta J(q), \theta^2 J(q))$ sur $\mathbb{Q}$ est ≥ 2. En particulier (cf. [3], théorème 1), si $J(q)$ est algébrique, les nombres $\theta J(q)$ et $\theta^2 J(q)$ sont algébriquement indépendants. C'est cet énoncé que nous précisons au paragraphe 3. Nous utiliserons à cet effet une mesure de transcendance de $\theta J(q)$.

§ 2. UNE MESURE DE TRANSCENDANCE

L'énoncé suivant est l'analogue p-adique d'un résultat d'E. Reyssat ([7], théorème 1 (12)) sur le quotient par π des périodes des fonctions elliptiques de Weierstrass. Il améliore le théorème 2 de [3], dont la démonstration était fondée sur l'étude des points de torsion des courbes elliptiques. La nouvelle démonstration s'inspire de la démarche de [7].

Théorème 2 : Soit q un élément non nul de $\mathfrak{M}$, tel que $J(q)$ soit algébrique. Il existe un nombre réel $C_1 > 0$, effectivement calculable en fonction de q, tel que, pour tout élément non nul P de $\mathbb{Z}[X]$, de taille $\leq t$, on ait :

$$|P(\theta J(q))| > \exp(-C_1 t^2 (\mathrm{Log} t)^4) .$$

Esquisse de la démonstration : on reprend les notations du paragraphe 1. De plus :

- l'hypothèse faite sur $J(q)$ amène à normaliser les fonctions de Tate de la façon suivante : on pose $\gamma = (E_4(q)/E_6(q))^{1/2}$ et $\varphi = \gamma^2(\wp + (E_2(q)/12))$. Alors l'équation différentielle algébrique satisfaite par φ, relativement à l'opérateur $\Delta = \gamma D$, est définie sur le corps de nombres $\mathbb{Q}(J(q))$.
- pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des translatés du disque $-1+\mathfrak{M}$ par les éléments $\{q^\nu, \nu = -n, \dots, 0\}$ du groupe multiplicatif $\Omega^\times$. Si f est une fonction analytique sur $\mathcal{E}_n$, on pose : $M(f, \mathcal{E}_n) = \sup_{z \in \mathcal{E}_n} |f(z)|$.

Supposons, ce qui revient à contredire la conclusion du théorème 2, qu'il existe un nombre algébrique α, dont le polynôme minimal sur $\mathbb{Z}$ a une taille $t \geq c_1$, tel que $|\gamma - \alpha| \leq \exp(-t^2(\mathrm{Log} t)^4)$, et posons :

$L_1 = [t]$, $L_2 = [c_2 \mathrm{Log} t]$. Le principe des tiroirs permet de construire un polynôme non nul $Q(X,Y)$, de degrés partiels $\leq L_1, L_2$ respectivement, dont les coefficients sont des éléments de $\mathbb{Z}[\alpha]$, de degrés majorés par le degré d de α, de tailles $\leq c_3 t (\mathrm{Log} t)((t/d) + \mathrm{Log}\, t)$, tel que la fonction $F(z) = Q(z,\varphi(z))$ vérifie :

$$\|\Theta^{2L_2} F\|_{[t]} \leq \exp(-c_4 t^2 (\mathrm{Log} t)^3) .$$

Cette inégalité permet de majorer $M(F, \mathcal{E}_{[t]})$. Or on a :

Lemme 1 : Soit Q un élément de $\Omega[X,Y]$, de degrés partiels $\leq L_1$, L_2 respectivement. Les coefficients de Q sont, en valeur absolue, majorés par

$$M(Q(z,\varphi(z)), \mathcal{E}_{L_1}) \exp(c(L_1^2 + L_2)),$$

où $c = c(q)$ désigne un nombre réel > 0.

La majoration déduite du lemme 1 est incompatible avec la majoration de la taille des coefficients de Q. ■

§ 3. UNE MESURE D'INDEPENDANCE ALGEBRIQUE

Dans la démonstration ci-dessous, la construction des polynômes R_N suit la méthode de Gel'fond et Fel'dman ([5], p.498), telle qu'elle a été adaptée au cas elliptique par Choodnovsky. Nous renvoyons à [1] pour les analogues p-adiques des lemmes sur les résultants utilisés dans [5].

Théorème 3 : Soit q un élément non nul de $\mathfrak{M}$ tel que $J(q)$ soit algébrique. Il existe un nombre réel $C_2 > 0$, effectivement calculable en fonction de q, tel que, pour tout élément non nul P de $\mathbb{Z}[X,Y]$, de taille $\leq t$, on ait :

$$|P(\theta J(q), \theta^2 J(q))| > \exp(-C_2 t^6 (\mathrm{Log} t)^{24}).$$

Esquisse de la démonstration : On reprend les notations des paragraphes 1 et 2. De plus :

- on pose $\xi = \gamma(\zeta + 1/2)$.

Soit N un entier $\geq c_1$. On commence par construire un polynôme non nul $Q(X,Y)$, de degrés partiels $\leq L = [c_2 N]$, dont les coefficients sont des éléments de $\mathbb{Z}[\theta J(q), \theta^2 J(q)]$, de degrés partiels $\leq c_2 N$, de tailles $\leq c_3 N \operatorname{Log} N$, tel que la fonction $F = Q(\xi, \varphi)$ admette les points $\{-q^n ; n = 0, \ldots, N\}$ pour zéros d'ordre $\geq c_4 N$. On a alors : $\| \Theta^{3L} F \|_{c_5 N} \leq \exp(-c_6 N^3)$. Par ailleurs :

<u>Lemme 2</u> : <u>Soit Q un élément de $\Omega[X,Y]$, de degrés partiels $\leq L_1, L_2$. Les coefficients de Q sont, en valeur absolue, majorés par</u> :

$$M(Q(\xi,\varphi), \mathcal{E}_{L_1}) \exp(c'(L_1 \operatorname{Log} L_1 + L_2)),$$

<u>où</u> $c' = c'(q)$ <u>désigne un nombre réel</u> > 0.

Soit alors P un élément non nul de $\mathbb{Z}[X,Y]$ (que l'on peut, sans perte de généralité, supposer irréductible), de taille $\leq t$, et tel que $|P(\theta J(q), \theta^2 J(q))| < \exp(-t^6 (\operatorname{Log} t)^{24})$. Le lemme 2, joint à la majoration du nombre de zéros de F utilisée au paragraphe 1, permet, lorsque l'entier N est $\leq c_7 t^2 (\operatorname{Log} t)^8$, de lui associer un élément non nul R_N de $\mathbb{Z}[X,Y]$, de degrés partiels $\leq c_8 N$, de taille $\leq c_9 N \operatorname{Log} N$, <u>premier à</u> P, et tel que :

$$|R_N(\theta J(q), \theta^2 J(q))| < \exp(-c_{10} N^3).$$

Considérons alors le résultant, par rapport à Y, des polynômes $R_{[c_7 t^2 (\operatorname{Log} t)^8]}$ et P. C'est un élément non nul S de $\mathbb{Z}[X]$, de degré $\leq c_{11} t^3 (\operatorname{Log} t)^8$, de taille $\leq c_{12} t^3 (\operatorname{Log} t)^9$, et tel que

$$|S(\theta J(q))| < \exp(-c_{13} t^6 (\operatorname{Log} t)^{24}).$$

D'après le théorème 2, la taille t de P est donc bornée. ∎

Signalons pour conclure que Choodnovsky a récemment amélioré l'analogue complexe du théorème 3 (cf. [4], théorème 5.7) : il peut ainsi y remplacer l'exposant 6 par 4,2, et même, annonce-t-il, par 3.

***

[1] W. W. Adams : Transcendental numbers in the p-adic domain, Amer. J. Math., 88, 1966, pp.279-308.

[2] D. Bertrand : Séries d'Eisenstein et transcendance, Bull. Soc. Math. France, 104, 1976, pp.309-321.

[3] D. Bertrand : Modular functions and algebraic independence, Proc. Conf. "p-adic Analysis", Nijmegen, 1978.

[4] G. V. Choodnovsky : Algebraic grounds for the proof of algebraic independence... Part I. Preprint (1978).

[5] A. O. Gel'fond, N. I. Fel'dman : Sur une mesure de transcendance mutuelle de certains nombres, Izv. A. N. SSSR, Ser. mat., 14, 1950, pp. 493-500 [en russe].

[6] D. Masser : Elliptic functions and transcendance, Springer 1975, Lecture Notes in Maths. No 437.

[7] E. Reyssat : Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielle , à paraître.

[8] P. Roquette : Analytic theory of elliptic functions over local fields, Hamburger Math. Einzel.,1, 1970.

Daniel BERTRAND
Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex (France)