GÉRALD TENENBAUM

Lois de répartition des diviseurs

Astérisque, tome 61 (1979), p. 205-212
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__205_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 61 (1979) p. 205-212

LOIS DE RÉPARTITION DES DIVISEURS

par

Gérald TENENBAUM

-:-:-:-

Une fois défini le concept de densité naturelle des suites d'entiers (1), qui peut s'interpréter dans un modèle probabiliste, toute une classe de problèmes trouvant leur origine en théorie des probabilités se pose à l'esprit : étant donnée une fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels, peut-on définir son "espérance" ? admet-elle un comportement déterminé pour "presque tous" les entiers ? peut-on caractériser, en particulier par sa "probabilité", l'ensemble des entiers pour lesquels f prend un ensemble de valeurs fixées ?

Si n désigne un nombre entier, le comportement de la fonction arithmétique $n \mapsto d(n)$ = nombre de diviseurs de n a été beaucoup étudié, notamment par Dirichlet pour sa valeur moyenne et par Hardy et Ramanujan pour son ordre normal - c'est-à-dire intuitivement son ordre de grandeur lorsque n parcourt une suite de densité unité. Nous nous sommes intéressés aux diviseurs des entiers sous un éclairage un peu différent, cherchant des renseignements non plus sur le nombre total des diviseurs d'un entier générique n mais sur leur répartition dans l'intervalle $[1,n]$.

Le premier exemple d'un tel travail se trouve chez Dickman [2] qui, en 1930, a étudié la densité de la suite des entiers n dont tous les diviseurs premiers

---

(1) si $\mathcal{A}$ désigne une suite d'entiers, on appelle densité (naturelle) de $\mathcal{A}$ la limite, lorsqu'elle existe, de la quantité x^{-1} card$\{n \leq x : n \in \mathcal{A}\}$ pour x infini ; les limites supérieure et inférieure sont appelées densités supérieure et inférieure.

sont inférieurs à $n^{1/t}$. Il montre que cette densité est égale à la valeur $\rho(t)$ d'une fonction continue (appelée depuis par certains auteurs fonction de Dickman) qui vérifie une équation différentielle aux différences :

$$(1) \qquad t\rho'(t) + \rho(t-1) = 0 .$$

Nous verrons plus loin que ce type d'équation joue un rôle important dans les problèmes de répartition des diviseurs.

En ce qui concerne la répartition des diviseurs quelconques (c'est-à-dire sans restriction de primalité) le seul résultat dont nous ayons eu connaissance est dû à Kátai, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que, relativement à une fonction additive (1) f, les diviseurs de n soient concentrés au voisinage de $\sqrt{n}$ (voir [5] et [6]) ; plus précisément, Kátai donne une propriété caractéristique des suites (n_k) pour lesquelles on a, pour tout ε positif,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{d(n_k)} \operatorname{card}\{d : d|n_k \text{ et } (\tfrac{1}{2}-\varepsilon) < \frac{f(d)}{f(n)} < (\tfrac{1}{2}+\varepsilon)\} = 1 .$$

Si l'on prend pour f la fonction logarithme, on obtient une caractérisation de la suite des entiers n dont, pour tout ε positif, presque tous les diviseurs sont dans l'intervalle $]n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}[$.

*

Dans le but d'étudier la répartition des diviseurs des entiers, une idée naturelle consiste à définir pour chaque entier n une variable aléatoire D_n, qui prend les valeurs $\frac{\log d}{\log n}$, lorsque d parcourt les diviseurs de n, avec probabilité uniforme $1/d(n)$ - remarquons au passage que l'un des avantages de cette définition réside en ceci : si la décomposition de n en facteurs premiers est $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, alors D_n est somme des variables indépendantes X_i prenant les valeurs 0, $(\log p_i)/(\log n)$, ..., $\alpha_i(\log p_i)/(\log n)$ avec probabilité uniforme $1/\alpha_i+1$. La fonction de répartition de la variable aléatoire D_n est définie sur $[0,1]$ par

$$\operatorname{Prob}(D_n \leq u) = \frac{1}{d(n)} \operatorname{card}\{d : d|n \text{ et } d < n^u\} .$$

(1) Une fonction définie sur les entiers est dite additive si elle vérifie la propriété

$$\operatorname{pgcd}(m,n) = 1 \Rightarrow f(mn) = f(m) + f(n) .$$

Une première approche du problème de la répartition des diviseurs consiste alors à étudier, pour tout u fixé dans $[0,1]$, la valeur moyenne en n de cette fonction de répartition. Dans un article écrit en commun avec Deshouillers et Dress [1], nous avons montré que, pour x infini, l'on a :

$$(2) \qquad \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \operatorname{Prob}(D_n \leq u) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc\,sin} \sqrt{u} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right).$$

On trouve ainsi une nouvelle interprétation de la loi de l'Arcsinus, bien connue en Probabilités notamment parce qu'elle intervient dans les problèmes de marche aléatoire.

La formule (2) incite à se demander si la loi de D_n ne tend pas vers celle de l'Arcsinus lorsque n parcourt une suite de densité unité. La réponse à cette question est négative : nous montrons [9] que, pour toute loi de probabilité μ sur $[0,1]$, la suite des entiers n pour lesquels la loi de D_n tend vers μ est de densité nulle. Qualitativement, cela signifie que la moyenne (2) est obtenue en ajoutant des lois individuelles aux comportements tous différents et qu'il n'existe pas de loi de répartition valable pour une proportion non négligeable d'entiers. Ce résultat est une conséquence facile du fait que la densité supérieure de la suite des entiers n ayant, pour un nombre positif α fixé, au moins un diviseur dans l'intervalle $[n^{\alpha}, n^{\alpha+\varepsilon}]$ tend vers 0 avec ε. Dans [9] nous montrons un résultat plus fort :

<u>Pour tout couple</u> (λ, t) <u>de</u> $[0,1]\times[1,+\infty[$, <u>la suite des entiers</u> n <u>ayant au moins un diviseur dans l'intervalle</u> $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ <u>possède une densité</u> $h(\lambda,t)$ <u>qui est une fonction continue pour</u> $(\lambda,t) \neq (1,1)$ <u>et qui vérifie</u>

$$(3) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists c(\varepsilon) \quad \forall t \geq 1+\varepsilon \quad h(\lambda,t) \leq c(\varepsilon)(1-\lambda)^{\delta} \left|\log(1-\lambda)\right|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

<u>où</u> $c(\varepsilon)$ <u>est une constante positive ne dépendant que de</u> ε <u>et où</u> δ <u>est égal à</u> $1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0{,}0860\ldots$.

Cela appelle plusieurs remarques :

tout d'abord, le fait que la densité $h(\lambda,t)$ existe montre que le cadre naturel pour l'étude de la répartition des diviseurs d'un entier n consiste bien à placer les diviseurs relativement aux puissances de n et, cela étant fait, que la répartition présente un certain caractère de régularité

. ensuite, l'exposant δ de la majoration (3) semble être optimal, à la lumière d'un résultat d'Erdös [4] qui montre, dans le cas où l'on choisit $\lambda = 1 - \frac{\log 2}{\log n}$, que le nombre correspondant d'entiers inférieurs à x est minoré pour tout ε positif et x assez grand par :

$$x \log x^{-\delta-\varepsilon}$$

. enfin, le remplacement des variables naturelles (α, β) variant dans $[0,1] \times [0,1]$ pour définir un intervalle $[n^{\alpha}, n^{\beta}[$ par les variables (λ, t) s'explique par le fait que la fonction analogue à $h(\lambda, t)$ n'est pas continue en $(\alpha, \beta) = (0,0)$ - nous verrons d'ailleurs que ces variables (λ, t) jouent un rôle privilégié lors de l'étude de la répartition des facteurs premiers.

La démonstration de l'existence de la densité $h(\lambda, t)$ se conduit en deux étapes : on trouve d'abord une majoration de la densité supérieure du type de (3) -en fait, pour la démonstration d'existence, il suffit d'une majoration qui tend vers 0 lorsque λ tend vers 1 - et on montre ensuite, en utilisant le principe d'inclusion-exclusion, que cette majoration implique l'existence et la continuité de la densité $h(\lambda, t)$. Lorsqu'on doit étudier une suite définie par des conditions sur les diviseurs dépendant d'un ou plusieurs paramètres, ce schéma de démonstration d'existence et continuité se retrouve très fréquemment ; cela méritait d'être souligné.

*

La majoration de la densité supérieure de la suite des entiers n ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ nécessite une étude préalable de la répartition des facteurs premiers.

Levin et Fainleb ont montré [7] que la suite des entiers n ayant exactement k facteurs premiers dans $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ possède une densité $f_k(\lambda, t)$ qui est une fonction continue de (λ, t) mais ils ne donnent aucun renseignement sur l'ordre de grandeur de $f_k(\lambda, t)$. Nous redémontrons, par une méthode directe et élémentaire, différente de celle de Levin et Fainleb, l'existence des densités $f_k(\lambda, t)$ et nous établissons l'encadrement suivant [9], valable pour $t \geq k+1$ et $0 \leq \lambda \leq 1$

$$(4) \qquad \frac{\lambda}{k!} \log^k \frac{1}{\lambda} \{1 - \frac{2}{\Gamma(t-k)}\} \leq f_k(\lambda, t) \leq \frac{\lambda}{k!} \log^k \frac{1}{\lambda} \{1 + \frac{2}{\Gamma(t-k)}\}$$

où Γ désigne la fonction d'Euler.

Qualitativement, cela signifie que le nombre des facteurs premiers d'un entier n qui appartiennent à l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ peut être, en première approximation considéré comme une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\log \frac{1}{\lambda}$ ([1]). D'une certaine manière, ce résultat précise un théorème d'Erdös [3] qui spécifie que, si $p_i(n)$ désigne le i-ème facteur premier distinct de n on a, en moyenne, $\log\log p_i(n) \sim i$: en effet, le nombre moyen de facteurs premiers dans $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ est bien égal à la moyenne $\log \frac{1}{\lambda}$ de la loi de Poisson.

L'encadrement (4) est obtenu par une méthode nouvelle pour ce type de problème : on détermine une relation liant $f_{k+1}(\lambda, t)$ et $f_k(\lambda, t)$, soit :

$$(5) \qquad f_{k+1}(\lambda, t) = \frac{1}{k+1} \int_{\lambda}^{1} f_k(\lambda, t-u) \frac{du}{u}$$

qu'on interprète comme un produit de convolution ; grâce à la transformation de Laplace, on en déduit des relations intégrales liant $f_k(\lambda, t)$ et la fonction de Dickman $t \longmapsto \rho(t)$, soit :

$$(6) \qquad \int_0^t f_k(\lambda, u)\ \rho(t-u)\, du = \frac{1}{k\,!} \int_0^t \rho\left(\frac{t-u}{\lambda}\right) \varphi_k(u)\, du$$

avec

$$\varphi_k(u) := \int_{\substack{[\lambda, 1]^k \\ \Sigma x_i \leq u}} \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_k}{x_k} \ ;$$

l'encadrement (4) est alors déduit de la combinaison de ces équations intégrales et de certaines équations aux dérivées partielles et aux différences, vérifiées par les f_k, qui dérivent, grâce aux relations (5), de

$$(7) \qquad t \frac{\partial}{\partial t} f_o(\lambda, t) = f_o(\lambda, t-1) - f_o(\lambda, t-\lambda) \ .$$

On notera que l'équation (7) est une généralisation de l'équation (1) car la fonction $(\lambda, t) \longmapsto \rho\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ vérifie (7) pour $t \leq 1$.

([1]) Sous la condition $t \geq k+1$ (qui pourrait d'ailleurs être remplacée par $t \geq k+\varepsilon$). Cette condition correspond en fait à l'hypothèse d'indépendance des facteurs premiers $p_1, \ldots, p_k$ dans $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ puisque, si $t<k$, la relation $p_1 \cdots p_k \leq n$ introduit une restriction supplémentaire.

En faisant tendre t vers l'infini dans (4) on voit que chaque densité $f_k(\lambda, t)$ admet une limite qui est une fonction continue de λ sur $[0,1]$. Pour les diviseurs quelconques, la densité analogue à $f_k(\lambda, t)$ n'est non identiquement nulle que pour $k=0$ [11] ; elle est alors égale à $1-h(\lambda, t)$. Nous montrons [10] que la fonction $h(\lambda, t)$ admet pour t infini une limite $h(\lambda)$ qui est une fonction continue de λ.
On a :

$$(8) \qquad (1-\lambda) \leq h(\lambda) \leq 6(1-\lambda)^{\delta} .$$

De plus, $h(\lambda)$ est également la limite, pour y infini, de la valeur $d(\lambda, y)$ de la densité de la suite des entiers ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[y^{\lambda}, y[$.

*

Un autre aspect de la répartition des diviseurs réside dans les propriétés de la fonction arithmétique définie, pour tout couple (λ, t) de $[0,1] \times [1, +\infty[$ par

$$\Delta(\lambda, t, n) := \mathrm{Prob}\left(\frac{\lambda}{t} \leq D_n < \frac{1}{t}\right) .$$

La formule (2) montre que cette fonction possède pour tout couple (λ, t) une valeur moyenne ; nous montrons [11] qu'elle possède une fonction de répartition, c'est-à-dire que, pour tout réel x, la suite des entiers n tels que

$$\Delta(\lambda, t, n) < x$$

possède une densité $H(x)$.

Cette densité a une propriété remarquable : la mesure de Stieljes dH est une combinaison linéaire infinie de mesures de Dirac aux points dyadiques $a 2^{-b}$ (a, b entiers) de l'intervalle $[0,1]$. Cela implique en particulier que si l'on se donne une fonction $n \longmapsto \psi(n)$ tendant vers l'infini arbitrairement lentement, il existe une suite d'entiers $\mathcal{a}$ de densité unité telle que, pour tout entier n de $\mathcal{a}$, le nombre des diviseurs dans $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ est soit nul, soit supérieur à $\frac{d(n)}{\psi(n)}$ (1).

Ce dernier résultat suggère que les diviseurs d'un entier "aléatoire" n sont

---

(1) Ce résultat est d'ailleurs optimal en ce sens que, sauf cas triviaux, on ne peut remplacer ψ par une fonction constante.

concentrés au voisinage d'un nombre restreint de diviseurs privilégiés et donc que la répartition des diviseurs possède des trous du type $[n^{\lambda_1}, n^{\lambda_2}[$ ne contenant aucun diviseur de n. Nous étudions [12] la taille maximale de la différence $(\lambda_2 - \lambda_1)$ pour un tel intervalle ; plus précisément, si nous désignons par

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_\tau = n$$

la suite croissante des diviseurs de n, nous montrons que la fonction arithmétique

$$n \longmapsto \log^{-1} n \max_{i=1}^{\tau-1} \log \frac{d_{i+1}}{d_i}$$

possède une fonction de répartition $f(x)$ dont l'ordre de grandeur est voisin de x lorsque x tend vers 0. On a :

$$c_1 x \log^{-1} \frac{1}{x} \leq f(x) \leq c_2 x \log \frac{1}{x} \tag{9}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes absolues positives.

La démonstration de ce résultat utilise des techniques semblables à celles des précédents. La borne inférieure de (9) est obtenue en introduisant une fonction de deux variables $f(x,t)$ qui minore $f(x)$ pour toute valeur de t et qui vérifie la relation

$$t \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = f\left(x \frac{t}{t-1}, t-1\right) . \tag{10}$$

On retrouve ainsi dans ce cas particulier l'importance des équations différentielles aux différences dans les problèmes liés à la répartition des diviseurs.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-M. DESHOUILLERS, F. DRESS, G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 1, à paraître à Acta Arithm. 36 (n° 4).

[2] K. DICKMAN, On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude, Ark. Mat. Astr. Fys. 22 (1930), 1-14.

[3] P. ERDÖS, On the distribution function of additive functions, Ann. of Math. 47 (1946), 1-20.

[4] P. ERDÖS, Sur une inégalité asymptotique en théorie des nombres, Vestnik Leningrad Univ. 13 (1960), 41-49 (en russe).

[5] I. KÁTAI, On the distribution of solutions of special diophantine equations, Mat. Lapok 20 (1969), 117-122 (en hongrois).

[6] I. KÁTAI, On the distribution of additive fonctions on the set of divisors, Publicationes Math. 24 (1-2) (1977), 91-96.

[7] B.V. LEVIN and A.S. FAINLEB, Applications of some integral equations to problems of number theory, Uspchi Mat. Nauk 22 (1967), n° 3 (135) 199-197) (= Russian Math Surveys 22 (1967), n° 3, 119-204).

[8] G. TENENBAUM, Sur deux fonctions de diviseurs, J. London Math. Soc. (2) 14 (1967), 521-526 et Corrigendum à mon article "sur deux fonctions de diviseurs" J. London Math. Soc. (2) 17 (1978), 212.

[9] G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 2, à paraître à Acta Arithm. 38 (n° 1).

[10] G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 3, à paraître à Acta Arithm. 39 (n° 1).

[11] G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 4, à paraître à Ann. Inst. Fourier.

[12] G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 5, soumis pour publication à Proc. London Math. Soc.

-:-:-:-

Gérald TENENBAUM
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique de
l'Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX