BERNARD ORIAT

Généralisation du "Spiegelungssatz"

Astérisque, tome 61 (1979), p. 169-175
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__169_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 61 (1979) p. 169-175

GENERALISATION DU "SPIEGELUNGSSATZ"

par
Bernard Oriat

La propriété qui nous intéresse ici est celle énoncée par Leopoldt dans [3]. Nous la rappelons dans les paragraphes I et II. Dans le paragraphe III nous montrons comment nous avons essayé d'en obtenir une généralisation. Dans le dernier paragraphe un principe analogue est appliqué pour déduire du théorème de Stickelberger une propriété d'annulation de classes d'idéaux réelles.

I Spiegelungsrelation.

Soit L/k une extension galoisienne finie de corps de nombres, de groupe de Galois G. On suppose que L contient toutes les racines n^{eme} de 1. Soit M/L une extension abélienne d'exposant divisant n. C'est une extension de Kummer ; désignons par W son radical, c'est-à-dire l'ensemble des w de L tels que $\sqrt[n]{w}$ appartienne à M. On suppose que W est stable par G, c'est-à-dire que M/k est galoisienne. Le groupe G opère, en tant que groupe de Galois, sur W, donc sur W/L^{*n}. D'autre part on peut le faire opérer par conjugaison sur $Gal(M/L)$. Ainsi les deux groupes W/L^{*n} et $Gal(M/L)$ sont des $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[G]$ modules.

D'autre part, soit ζ_n une racine primitive $n^{ème}$ de 1 et $<\zeta_n>$ le groupe multiplicatif qu'elle engendre. On définit un homomorphisme χ^* de G dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ par l'égalité :

$\zeta_n^{\sigma} = \zeta_n^{\chi^*(\sigma)}$, pour tout σ de G.

Les deux groupes W/L^{*n} et $\mathrm{Hom}\left(Gal(M/L), <\zeta_n>\right)$, groupe dual de $Gal\ (M/L)$, sont canoniquement isomorphes. Si α est l'isomorphisme en question, rappelons qu'il est défini par : $\alpha\left(wL^{*n}\right)(u) = w^{u-1}$, pour tout u de $Gal\ (M/L)$. Nous pouvons maintenant énoncer la "Spiegelungsrelation" [3] :

<u>Théorème</u> : Pour tout w de W, tout τ de G et tout u de $Gal\ (M/L)$, on a

l'égalité :

$$\alpha\Big((wL^{*n})^{\tau}\Big)(u) = \alpha(wL^{*n})\Big(u^{\chi^{*}(\tau)\tau^{-1}}\Big).$$

Définition de l'involution du miroir. On peut définir dans l'algèbre de groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[G]$ une involution en faisant correspondre à $x = \sum_{\tau\in G} a_\tau \tau$, l'élément $\bar{x} = \sum_{\tau\in G} a_\tau \chi^{*}(\tau)\tau^{-1}$. Nous l'appelons : involution du miroir. Si G est abélien, il s'agit d'un automorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[G]$. La "Spiegelungs-relation" peut s'écrire à l'aide de cette involution sous la forme :

$$\alpha\Big((wL^{*n})^{x}\Big)(u) = \alpha(wL^{*n})(u^{\bar{x}})\ ;$$

pour tout w de W, tout u de Gal (M/L) et tout x de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[G]$.

Utilisation de la "Spiegelungsrelation" : Dans la suite, la situation décrite ci-dessus est utilisée de la façon suivante : L'extension M/L est non ramifiée. Son groupe de Galois est donc, par la théorie du corps de classes, isomorphe en tant que G-module, à un groupe quotient du groupe des classes de L. Si w appartient à W, alors l'idéal de L qu'il engendre est une puissance $n^{\text{ème}}$ d'un idéal $\mathfrak{a}$ de L. En associant à w la classe de l'idéal $\mathfrak{a}$, on définit une application de W/L^{*n} dans le groupe des classes de L. Le noyau de cet homomorphisme s'exprime alors à l'aide d'un groupe d'unités de L. On dispose ainsi d'un moyen de comparer un quotient du groupe des classes d'idéaux de L (ou d'un sous-corps de L) à un sous-groupe du groupe des classes de L (ou d'un sous-corps de L). De plus, si x annule le premier groupe, alors $\bar{x}$ annule le deuxième.

II Le "Spiegelungssatz" de Leopoldt [3].

Soit ℓ un nombre premier. Dans ce paragraphe on prend $n = \ell$ et on pose l'hypothèse suivante : ℓ ne divise pas le degré $[L : k]$.

Soit ψ un caractère ℓ-adique de G et $1_\psi = \frac{1}{[L:k]}\sum_{\tau\in G}\psi(\tau)\tau^{-1}$ l'idempotent de $\mathbb{Q}_\ell[G]$ associé. Il y a une correspondance biunivoque entre les idempotents de $\mathbb{Q}_\ell[G]$ et les idempotents de $\mathbb{F}_\ell[G]$ déduite de l'application canonique de $\mathbb{Z}_\ell[G]$ sur $\mathbb{F}_\ell[G]$. Si on confond un idempotent avec son résidu modulo ℓ, on voit que l'image $\bar{1}_\psi$ de 1_ψ par l'involution du miroir est un idempotent associé à un caractère $\bar{\psi}$ de G. Ce caractère $\bar{\psi}$ peut être défini de la façon suivante : Soit θ l'unique homomorphisme de G dans $\mathbb{Z}_\ell^{*}$

défini par $\zeta_\ell^\tau = \zeta_\ell^{\theta(\tau)}$ pour tout τ de G. On a alors $\bar\psi = \theta\psi^{-1}$ et l'application $\psi \to \bar\psi$ est une involution de l'ensemble des caractères ℓ-adiques de G.

Soit $\mathcal{H}(L)$ le ℓ-groupe des classes de L. A chaque caractère ψ, on associe le groupe $\mathcal{H}(L)^{1_\psi}$. Le "Spiegelungssatz" compare les ℓ-rangs (notés $\dim_\ell$) des groupes $\mathcal{H}(L)^{1_\psi}$ et $\mathcal{H}(L)^{1_{\bar\psi}}$. Introduisons encore E(L) groupe des unités de L et $\mathcal{E}(L) = E(L)/E(L)^\ell$.

<u>Théorème</u> : Si ℓ ne divise pas $[L : k]$ et si ψ est un caractère ℓ-adique de G, alors on a l'inégalité :

$$\dim_\ell \mathcal{H}(L)^{1_\psi} - \dim_\ell \mathcal{H}(L)^{1_{\bar\psi}} \leq \dim_\ell \mathcal{E}(L)^{1_{\bar\psi}}.$$

III <u>Généralisation du Spiegelungssatz</u> [4].

Dans cette généralisation on ne fait plus l'hypothèse : ℓ ne divise pas $[L : k]$, posée dans [3]. Les idempotents 1_ψ ne sont plus des éléments entiers et la notation $\mathcal{H}(L)^{1_\psi}$ n'a plus de sens. Soit maintenant ℓ un nombre premier impair. On désigne par n une puissance de ℓ. L'extension L/k est supposée abélienne de groupe de Galois G. On suppose toujours que L contient toutes les racines $n^{\text{ème}}$ de 1.

Les groupes d'idéaux et d'unités considérés sont attachés maintenant, non plus à un caractère ℓ-adique du groupe G, mais à un idéal I de l'algèbre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[G]$. Définissons le corps K_I comme le corps intermédiaire entre L et k tel que $\mathrm{Gal}(L/K_I) = \{\sigma \,;\, \sigma \in G \,;\, \sigma - 1 \in I\}$. Si $\mathcal{H}(K_I)$ est le ℓ-groupe des classes d'idéaux de K_I, le groupe $\mathcal{H}^I$ est défini comme le plus grand quotient de $\mathcal{H}(K_I)/\mathcal{H}(K_I)^n$ annulé par I. De même, si $\mathcal{H}(K_I)^{(n)}$ est le sous-groupe de $\mathcal{H}(K_I)$ formé des éléments h de $\mathcal{H}(K_I)$ tels que $h^n = 1$, $\mathcal{H}_I$ est défini comme le plus grand sous-groupe de $\mathcal{H}(K_I)^{(n)}$ annulé par I.

<u>Remarque</u> : Ces définitions généralisent la définition précédente : en effet si ℓ ne divise pas $[L : k]$ et si ψ est un caractère ℓ-adique de G, soit I l'idéal de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[G]$ engendré par $1-1_\psi$. Alors on vérifie que les groupes $\mathcal{H}^I$, $\mathcal{H}_I$ et $\mathcal{H}^{1_\psi}$ ont même ℓ-rang.

De la même façon, désignons par $E(K_I)$ le groupe des unités de K_I, $\mathcal{E}(K_I)$ le quotient $E(K_I)/E(K_I)^n$ et $\mathcal{H}_I$ le plus grand sous-groupe de

$\mathcal{E}(K_I)$ annulé par I. Précisons enfin que $\bar{I}$ désigne l'image de I par l'involution du miroir et que $\dim_m$ désigne le m-rang.

Théorème. Pour toute puissance de ℓ, notée m et comprise entre ℓ et n, on a l'inégalité :

$$\dim_m \mathcal{H}^I - \dim_m \mathcal{H}_{\bar{I}} \leq \dim_\ell \mathcal{E}_{\bar{I}} + 1.$$

De plus, si l'une ou l'autre des hypothèses suivantes est vérifiée :

- Le degré $[L : K_I]$ est premier à ℓ,
- Le corps $K_{\bar{I}}$ ne contient pas de racine primitive $\ell^{\text{ème}}$ de 1 ; alors

on a plus précisément :

$$\dim_m \mathcal{H}^I - \dim_m \mathcal{H}_{\bar{I}} \leq \dim_\ell \mathcal{E}_{\bar{I}}.$$

Remarquons que le changement de I en $\bar{I}$ ne permute pas $\mathcal{H}^I$ et $\mathcal{H}_{\bar{I}}$. Ainsi, obtenir une minoration de la différence $\dim_m \mathcal{H}^I - \dim_m \mathcal{H}_{\bar{I}}$ est, dans ce cadre plus général, un autre problème. Pour énoncer l'un des résultats obtenus, introduisons un groupe d'unités locales : Soient $\ell_1, \dots, \ell_t$ les idéaux de $K_I \cap K_{\bar{I}}$ au-dessus de ℓ et D_j le groupe de décomposition de ℓ_j dans l'extension L/k. Soit $\bar{I}(j) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[D_j] \cap \bar{I}$ et U_j le groupe des unités principales du complété de $K_{\bar{I}}$ en un idéal au-dessus de ℓ_j. Soit $\mathcal{U}_{\bar{I}(j)}$ le plus grand sous-module de U_j/U_j^n annulé par $\bar{I}(j)$. Soit s le nombre de générateurs de l'image de l'idéal $\bar{I}$ par l'application restriction de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[G]$ à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[\mathrm{Gal}(K_{\bar{I}}/k)]$. Désignons par $(K_I)_o$ le corps intermédiaire entre K_I et $K_I \cap K_{\bar{I}}$, maximal tel que $[(K_I)_o : K_I \cap K_{\bar{I}}]$ soit premier à ℓ.

Théorème. Si aucun idéal, au-dessus de ℓ, n'est totalement décomposé dans $(K_I)_o/K_I \cap K_{\bar{I}}$ et si $K_{\bar{I}}$ ne contient pas de racine primitive $\ell^{\text{ème}}$ de 1, alors, on a :

$$-\sum_{j=1}^{t} \dim_\ell \mathcal{U}_{\bar{I}(j)} - (s-1)\dim_\ell \mathcal{E}(K_{\bar{I}}) \leq \dim_m \mathcal{H}^I - \dim_m \mathcal{H}_{\bar{I}},$$

pour toute puissance de ℓ, notée m et comprise entre ℓ et n.

On trouvera dans [4] d'autres inégalités minorant la différence $\dim_m \mathcal{H}^I - \dim_m \mathcal{H}_{\bar{I}}$, valables sous d'autres hypothèses. Mais, en l'absence d'hypothèse, nous ne savons pas minorer cette différence.

IV Annulation de classes d'idéaux réelles.

Nous désignons toujours par ℓ un nombre premier impair. Soit

χ un caractère réel de conducteur f et ψ le caractère ℓ-adique issus de χ. Notons $Q_\ell^{(\chi)}$ le corps obtenu en adjoignant à Q_ℓ les valeurs prises par χ et $Z_\ell^{(\chi)}$ l'anneau des entiers de ce corps. On associe à ψ un groupe de classes d'idéaux de la façon suivante :

Soit K_χ le sous-corps de $Q^{(f)}$ tel que Gal $(Q^{(f)}/K_\chi)$ soit égal à Ker χ. (Le caractère χ étant considéré comme un homomorphisme de Gal $(Q^{(f)}/Q)$ dans $Q_\ell^{(\chi)*}$). Soit $G = \text{Gal}\ (K_\chi/Q)$. On peut encore considérer χ comme un homomorphisme de G dans $Q_\ell^{(\chi)*}$. Nous notons χ_1 son prolongement Z_ℓ-linéaire à $Z_\ell[G]$. C'est un homomorphisme d'anneaux, de $Z_\ell[G]$ dans $Z_\ell^{(\chi)}$ et il est surjectif. Si on considère ψ comme un caractère de G et si 1_ψ est l'idempotent de $Q_\ell[G]$ associé à ψ, le noyau de χ_1 est égal à $Z_\ell[G] \cap (1-1_\psi)Q_\ell[G]$. Si $\mathcal{H}(K_\chi)$ est le ℓ-groupe des classes de K_χ, notons $\mathcal{H}^\psi$ le plus grand quotient de $\mathcal{H}(K_\chi)$ annulé par le noyau de χ_1. Ainsi $\mathcal{H}^\psi$ est un module sur $Z_\ell^{(\chi)}$.

Le résultat suivant est démontré par G. Gras dans [2] :

<u>Théorème</u> : Si ℓ est un nombre premier impair, si χ est un caractère réel différent de 1 et si ℓ ne divise pas l'ordre de χ, alors $\mathcal{H}^\psi$ est, en tant que $Z_\ell^{(\chi)}$-module, annulé par $L_\ell(1,\chi)$, valeur en 1 de la fonction L ℓ-adique relative à χ.

<u>Remarque</u> : En fait, le résultat obtenu en [2] est plus précis : Il concerne un groupe de classes généralisées, correspondant par la théorie du corps de classes à une extension non ramifiée, sauf en ℓ, de K_χ.

Nous avons démontré que l'hypothèse "ℓ ne divise pas l'ordre de χ" peut être remplacée par l'hypothèse : "l'ordre de χ n'est pas une puissance de ℓ".

La démonstration de cette propriété utilise toujours les mêmes principes : en voici le résumé : Décomposons le conducteur f de χ sous la forme $f = f_o n_o$ avec f_o premier à ℓ et n_o puissance de ℓ. Soit n une puissance de ℓ, supérieure à n_o. On désigne par L_n le corps obtenu en ajoutant à K_χ toutes les racines $n^{\text{ème}}$ de 1 et on pose $G_n = \text{Gal}\ (L_n/Q)$. On introduit l'extension non ramifiée, M_n/L_n, qui correspond par le corps de classes au groupe de classes $\mathcal{H}^\psi/(\mathcal{H}^\psi)^n$ et on construit comme indiqué au paragraphe I, un homomorphisme de $\mathcal{H}^\psi/(\mathcal{H}^\psi)^n$ dans le ℓ-groupe des classes de L_n. (Les corps M_n, L_n, $\mathbb{Q}$ correspondent à M, L et k). Comme K_χ est réel, cet homomorphisme est injectif. Le groupe des classes de L_n est annulé par l'idéal de Stickelberger de L_n. On en déduit que l'image par l'involution du miroir (de $L_n/\mathbb{Q}$) de l'idéal de Stickelberger annule le groupe $\mathcal{H}^\psi/(\mathcal{H}^\psi)^n$.

Désignons par $\left(\frac{L_n}{\cdot}\right)$ le symbole d'Artin attaché à L_n et choisissons un entier a_o premier à f_o et à ℓ, tel que $\chi(a_o)$ ne soit pas une racine de 1 d'ordre une puissance de ℓ. Introduisons les éléments suivants de l'algèbre $\mathbb{Q}_\ell\,[G_n]$:

$$x_n = \frac{1}{f_o n \varphi(n)}\left[1 - \left(\frac{L_n}{a_o}\right) a_o^{\varphi(n)}\right] \sum_{\substack{1\le a\le f_o n \\ (a,f_o n)=1}} a^{\varphi(n)}\left(\frac{L_n}{a}\right)$$

$$\text{et } y_n = \frac{1}{f_o n}\left[1 - \left(\frac{L_n}{a_o}\right)^{-1} a_o\right] \sum_{\substack{1\le a\le f_o n \\ (a,f_o n)=1}} a\left(\frac{L_n}{a}\right)^{-1},$$

où φ désigne l'indicateur d'Euler. On vérifie facilement qu'il s'agit d'éléments de $\mathbb{Z}_\ell\,[G_n]$ et la démonstration de la proposition suivante est élémentaire :

Proposition. Les résidus modulo n de x_n et y_n sont des éléments de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\,[G_n]$, images l'un de l'autre par l'involution du miroir attachée à l'extension $L_n/\mathbb{Q}$.

Mais y_n appartient à l'idéal de Stickelberger de L_n et on en déduit donc que x_n annule $\mathcal{H}^\psi/(\mathcal{H}^\psi)^n$. Si maintenant on cherche l'image de x_n par χ_1, on voit que cet élément va s'écrire sous la forme d'un produit :

$$\chi_1(x_n) = \left[1 - \chi(a_o)\, a_o^{\varphi(n)}\right]\left[\frac{1}{f_o n \varphi(n)} \sum_{\substack{1\le a\le f_o n \\ (a,f_o n)=1}} a^{\varphi(n)}\chi(a)\right]$$

dont le premier terme est une unité de $\mathbb{Z}_\ell^{(\chi)}$. On reconnaît dans le deuxième l'approximation ℓ-adique de $L_\ell(1,\chi)$ telle qu'elle est donnée dans [1]. Il reste pour obtenir le résultat annoncé à "faire tendre n vers l'infini".

Bibliographie.

[1] Fresnel J. Nombres de Bernouilli et fonctions L p-adiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 17, 2 (1967).

[2] Gras G. Annulation du groupe des ℓ-classes généralisées d'une extension abélienne réelle de degré premier à ℓ. A paraître aux Ann. Inst. Fourier (1979).

[3] Leopoldt H. W. Zur Struktur der ℓ-Klassengruppe galoischer Zahlkörper, Journal für die reine und Angew. Math. 199 (1958).

[4] Oriat B. et Satgé Ph. Un essai de généralisation du "Spiegelungssatz", à paraître.

Bernard Oriat
Mathématiques (ERA 07 06 54)
Faculté des Sciences
25030 BESANCON Cedex