Astérisque

GILLES LACHAUD

Le prolongement analytique d'un type de fonctions zeta généralisées

Astérisque, tome 61 (1979), p. 109-119
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__61__109_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 61 (1979) p. 109-119

LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'UN TYPE DE FONCTIONS ZETA GÉNÉRALISÉES

par

Gilles LACHAUD

1. C.L. Siegel a démontré en 1925 le résultat suivant (cf. [M2]) : si $F \in \underline{Z}[X,Y]$ est une forme binaire irréductible sur $\underline{Q}$ de degré $d \geq 3$, la série

$$Z_o(s,F) = \Sigma\ |F(x,y)|^{-s}$$

où la sommation porte sur les $(x,y) \in \underline{Z}^2$ tels que $(x,y) \neq (0,0)$, converge pour $\mathrm{Re}\ s > 2/d$, et se prolonge en une fonction méromorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re} s > 1/(d-1)$, avec un seul pôle au point $s = 2/d$ de résidu

$$V_o = \frac{2}{d} \int |F(1,x)|^{-2/d}\ dx.$$

Ce résultat a été repris et généralisé en 1934 par K. Mahler (cf. encore [M2]): Soit M un ensemble fini de nombres premiers, posons

$$Q(x,y) = \prod_{p \in M} |F(x,y)|_p^{-1}$$

en notant $|x|_p$ la valeur absolue p-adique d'un $x \in \underline{Q}$, et soit $\underline{Z}^2(M)$ l'ensemble des vecteurs $(x,y) \in \underline{Z}^2$ tels que $(x,y,p) = 1$ pour tout $p \in M$. Alors la série

$$Z_M(s,F) = \Sigma\ \{Q(x,y)/|F(x,y)|\}^{-s}$$

où l'on somme sur les $(x,y) \in \underline{Z}^2(M)$, a les mêmes propriétés que la série $Z_o(s,F)$, mis à part que cette fois-ci le résidu au point $2/d$ est égal à

$$V_o \prod_{p \in M} V_p,$$

où on a posé, pour $p \in M$,

$$V_p = \int |F(x,y)|^{-2/d}\ dx\ dy$$

l'intégrale portant sur les $(x,y) \in \underline{Z}_p^2$ tels que $\max(|x|_p, |y|_p) = 1$.

Mahler dit sans préciser que si F est anisotrope sur $\underline{R}$ et sur $\underline{Q}_p$ pour tout $p \in M$, alors la série $Z_M(s,F)$ se prolonge analytiquement à tout le plan complexe, le seul pôle étant en $s = 2/d$, et que pour voir cela on peut utiliser "un vieux théorème de Mellin". Mais ce "vieux théorème de Mellin" avait déjà été repris par Mahler dans [M1], et ne permet pas de traiter le cas où il y a des places ultramétriques (Il fournit seulement le prolongement analytique de $Z_o(s,F)$).

Nous allons démontrer ici un résultat de ce type.

2. On va supposer que $F(X) = F(X_1,\ldots,X_n)$ est un polynôme à n variables et à coefficients entiers, qui est quasi-homogène, ce qui veut dire qu'il existe des entiers $k,k_1,\ldots,k_n$ tels que l'identité formelle

$$\text{(QH)} \qquad F(T^{k_1}X_1,\ldots,T^{k_n}X_n) = T^k\, F(X)$$

soit satisfaite.

Dans cette hypothèse, il est naturel de supposer que le pgcd de $k_1,\ldots,k_n$ est égal à 1.

On peut faire la remarque suivante. Supposons que F soit <u>anisotrope sur $\underline{Q}$</u> (rappelons qu'un polynôme $F \in K[X]$ est dit <u>anisotrope sur le corps</u> K si les relations $x \in K^n$ et $F(x) = 0$ impliquent $x = 0$). Alors si F vérifie la relation (QH), les nombres $k,k_1,\ldots,k_n$ sont déterminés de façon unique par F. En effet, si on remplace toutes les variables par 0 sauf une, disons X_i, le polynôme $F(0,\ldots,X_i,\ldots,0)$ est non nul ; si d_i est le degré de ce polynôme, la relation (QH) montre que c'est en fait un monôme et implique l'identité $d_i k_i = k$; on voit donc que k est le ppcm de $d_1,\ldots,d_n$, d'où l'assertion. Introduisons les notations suivantes. Si M est un ensemble fini de nombres premiers, on pose, pour $p \in M$ et pour $x \in \underline{Q}_p^n$,

$$\|x\|_p = \mathrm{Max}\,(|x_1|_p,\ldots,|x_n|_p) \ ;$$

et on note $\underline{Z}^n(M)$ l'ensemble des $x \in \underline{Z}^n$ tels que $\|x\|_p = 1$ pour tout $p \in M$, autrement dit tels que

$$(x_1,\ldots,x_n,p) = 1 \quad \text{si} \quad p \in M$$

Si $F \in \underline{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ est un polynôme à n variables, on posera, pour $x \in \underline{Q}^n$,

$$F_M(x) = |F(x)|_0 \prod_{p\in M} |F(x)|_p$$

On a alors le théorème suivant :

<u>Théorème</u>. <u>Soit</u> $F \in \underline{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ <u>vérifiant la relation</u> (QH) <u>et soit</u> M <u>un ensemble fini de nombres premiers</u>. <u>Supposons</u> F <u>anisotrope sur</u> $\underline{R}$ <u>et sur</u> Q_p <u>lorsque</u> $p \in M$ <u>Alors la série</u>

$$(1) \qquad Z_M(s,F) = \sum_{x\in \underline{Z}^n(M)} F_M(X)^{-s}$$

<u>converge pour</u> Res > $\kappa = (k_1+\ldots+k_n)/k$ <u>et se prolonge en une fonction méromorphe dans le plan complexe, avec un unique pôle en</u> $s = \kappa$, <u>de résidu égal à</u>

$$(2) \qquad V_M = V_0 \prod_{p\in M} V_p \ ,$$

où

$$(3) \qquad V_0 = \int e^{-F(x)}\, dx \ ,$$

et où

$$(4) \qquad V_p = \int_{\|x\|_p=1} |F(x)|_p^{-\kappa}\, dx \ .$$

Remarques. 1) Ce résultat est connu lorsque F est homogène et lorsqu'il n'y a pas de places ultramétriques (c'est-à-dire lorsque $M = \phi$). En voici un bref historique sous ces hypothèses. Le cas des formes quadratiques est classique : ce sont des fonctions zêta d'Epstein. Lorsque F est homogène de degré supérieur à 2, ce résultat a été obtenu par Mellin puis généralisé par Mahler, (cf [M1]), en utilisant la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin. Ensuite Bochner (cf. [B]), dont l'article a été développé par Randol (cf. [R]), a démontré ce résultat en appliquant la formule de Poisson à la fonction F^{-s} convenablement régularisée. Bochner voit la fonction $Z_o(s,F)$ comme la trace de la fonction Zêta de l'opérateur $F(\partial/\partial x)$ (qui est elliptique puisque F est anisotrope sur $\underline{R}$) sur l'espace compact $\underline{R}^n/\underline{Z}^n$ (Le cas étudié ici, lorsque $M = \phi$, est celui des opérateurs semi-elliptiques). Enfin, An (cf. [A]) a obtenu ce résultat en reprenant la méthode de Riemann : c'est celle que nous allons utiliser.

2) Supposons F homogène de degré d. Si F est anisotrope sur le corps $\underline{F}_p$ pour tout $p \in M$, autrement dit si $x \in \underline{Z}^n(M)$ implique $|F(x)|_p = 1$, alors la fonction $Z_M(s,F)$ s'exprime simplement en fonction de $Z_o(s,F)$; supposons pour simplifier que M soit réduit à un seul nombre premier p. On a alors

$$\begin{aligned} Z_o(s,F) &= \sum_{\underline{Z}^n} F(x)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{x\in\underline{Z}^n(p)} F(p^k x)^{-s} \\ &= (1-p^{-ds})^{-1} \sum_{x\in\underline{Z}^n(p)} F(x)^{-s} \\ &= (1-p^{-ds})^{-1}\, Z_p(s,F) \end{aligned}$$

Mais une forme homogène peut être anisotrope sur $\underline{Q}_p$ sans l'être sur $\underline{F}_p$; considérons, par exemple, la forme

$$F(x,y) = x^2 + a\, y^2,$$

avec $a = p^k u$ où $(u,p) = 1$ lorsque $p \neq 2$. Si k est impair, ou bien si k est pair et si $-u$ n'est pas un carré de $\underline{F}_p$, alors F est anisotrope sur $\underline{Q}_p$, mais $|F(0,1)|_p = p^{-k}$.

3) Voici un exemple d'application du théorème. Soit q un nombre entier, notons $\phi_q(X)$ le q-ième polynôme cyclotomique, de degré $\phi(q)$, et posons

$$\Phi_q(X,Y) = X^{\phi(q)}\, \phi_q(Y/X).$$

Puisque ϕ_q n'a aucune racine réelle, la forme Φ_q est anisotrope sur $\underline{R}$; et si $p \not\equiv 1$ (mod. q) elle est aussi anisotrope sur $\underline{Q}_p$. Posons

$$F(X,Y) = \Phi_q(cX^d, Y^{d'})$$

où c, d, d' sont des entiers naturels ; si $p \not\equiv 1$ (mod. q) pour tout $p \in M$, le couple (F,M) satisfait aux hypothèses du théorème.

4) A l'aide du théorème d'Ikehara (cf. [Lg], ch. XV), on déduit immédiatement du théorème le

<u>Corollaire</u>. <u>Posons, pour</u> $t > 0$,

$$N(t) = \# \{x \in \underline{Z}^n(M) \mid F_M(x) \leq t\}.$$

<u>On a alors</u>

$$N(t) \sim \kappa^{-1} V_M t^{\kappa}$$

<u>lorsque</u> t <u>tend vers l'infini</u>.

On peut préciser ce résultat : on renvoie à [L] pour plus de détails sur ce genre d'estimations.

2 . Pour démontrer le théorème, on va introduire la <u>série thêta</u> :

$$\theta_M(t,F) = \sum_{x \in \underline{Z}^n(M)} \exp(-tF_M(x)) \qquad (t>0) \; ; \tag{5}$$

On passe de cette série à la fonction $Z_M(s,F)$ par une transformation de Mellin :

$$Z_M(s,F) = \int_0^\infty t^{s-1} \theta_M(t,F)\, dt \, , \tag{6}$$

tous problèmes de convergence mis à part.

Puisque par hypothèse le polynôme F est anisotrope sur $\underline{Q}_p$, il existe un nombre $c_p > 0$ tel que

$$|F(x)|_p \geq c_p \tag{7}$$

lorsque $x \in \underline{Q}_p^n$ et $\|x\|_p = 1$. En notant c_M le produit des c_p, on a donc, lorsque $x \in \underline{Z}^n(M)$,

(8) $$F_M(x) \geq c_M\ |F(x)|.$$

Posons par ailleurs, pour $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \underline{R}^n$,

(9) $$|x|_d = \Sigma\ |x_i|^{d_i},$$

où $d_i = k/k_i$, les nombres $k, k_1,\ldots,k_n$ étant ceux qui figurent dans la relation (QH). L'ensemble des $x \in \underline{R}^n$ tels que $|x|_d = 1$ est compact. La fonction F ne change pas de signe sur $\underline{R}^n - \{0\}$ puisqu'elle est anisotrope sur $\underline{R}$. On supposera, quitte à changer F en $-F$, que $F(x) > 0$ si $x \neq 0$. Si on note c_o la borne inférieure de F sur le compact $|x|_d = 1$, qui est strictement positive puisque F est anisotrope sur $\underline{R}$, la relation (QH) implique

(10) $$F(x) \geq c_o\ |x|_d$$

Il s'ensuit que l'on a, avec $c = c_o c_M$,

(11) $$F_M(x) \geq c|x|_d \text{ si } x \in \underline{Z}^n(M).$$

Ceci montre que la série $\theta_M(t,F)$ converge pour $t > 0$, puisque la relation (11) implique

(12) $$\theta_M(t,F) \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{\underline{Z}} \exp\ (-ct|x|^{d_i})$$

En suivant la méthode habituelle, on va couper l'intégrale (6) en deux en posant

$$Z_M^+(s,F) = \int_1^\infty t^{s-1}\ \theta_M(t,F)\ dt\ ,$$

$$Z_M^-(s,F) = \int_0^1 t^{s-1}\ \theta_M(t,F)\ dt\ ;$$

la relation (12) montrant que

$$\theta_M(t,F) << t^{-N}$$

quel que soit $N > 0$ lorsque t tend vers l'infini, on en déduit que la fonction Z_M^+ est une fonction entière. Pour étudier la fonction Z_M^-, on va utiliser le résultat suivant, en reprenant les notations du théorème :

Lemme 1. Lorsque t tend vers 0, on a, pour tout $N > 0$,

(13) $\theta_M(t,F) = t^{-\kappa} V_M + O(t^N)$

Il s'ensuit que l'intégrale Z_M^- converge pour Res > κ (doù la convergence de la série $Z_M(s,F)$ dans le même domaine) et se prolonge au plan complexe avec un pôle en $s = \kappa$ de résidu V_M ; Le théorème est donc complètement démontré une fois établi le lemme, ce qu'on va faire maintenant.

Pour cela, nous allons écrire la série $\theta(t,F)$ dans le formalisme adélique (cf. [Lg] et [W] .

Pour tout nombre premier p, on note ϕ_p (resp. ψ_p) la fonction caractéristique de l'ensemble $\|x\|_p \leq 1$ de $\underline{Q}_p^n$ (resp. de l'ensemble $\|x\|_p = 1$). Soit $\underline{A}$ l'anneau des adèles de $\underline{Q}$; pour $x = (x_p) \in \underline{A}^n$, on pose

$$\psi_M(x) = \prod_{p\in M} \psi_p(x_p) \prod_{p\notin M} {}_p(x_p)$$

de telle sorte que

$$\underline{Z}^n(M) = \{x \in \underline{Q}^n | \psi_M(x) = 1\}$$

La fonction $F_M(x)$ s'étend naturellement à $\underline{A}^n$ si on pose

$$F_M(x) = |F(x_o)|_o \ \Pi |F(x_p)|_p ,$$

et il vient

$$\theta_M(t,F) = \sum_{x\in Q^n} \psi_M(x) \ e^{-tF_M(x)}$$

Pour obtenir le comportement asymptotique de $\theta(t,F)$ lorsque t tend vers 0, on va appliquer la formule de Poisson à la fonction

$$E_t(x) = \psi_M(x) \exp(-tF_M(x)) \quad (x \in \underline{A}^n)$$

pour cela vérifions que la fonction E_t satisfait aux conditions qui permettent de lui appliquer cette formule. Pour une fonctión f définie sur $\underline{A}^n$, on a la relation

$$\sum_{x\in Q^n} f(x) = \sum_{\xi\in Q^n} \hat{f}(\xi)$$

dès que f satisfait les quatre hypothèses suivantes(cf. [Lg] ch. XIV § 6 , et [W] ch. VII § 2) :

a) f est intégrable ;

b) la série $\sum_{x \in \underline{Q}^n} f(x+y)$ converge uniformément si y est dans un compact de $\underline{A}^n$;

c) $\hat{f}$ est intégrable ;

d) la série $\sum_{\xi \in \underline{Q}^n} |\hat{f}(\xi)|$ converge.

Tout d'abord la fonction E_t est intégrable puisqu'elle est majorée, vu la relation (11), par la fonction décomposable

$$\psi_M(x_f) \cdot \exp(-ct|X_o|_d)$$

en notant x_f la projection d'un $x \in \underline{A}^n$ sur le produit des facteurs ultramétriques ; et cette dernière fonction, qui est dans l'espace des fonctions standard sur $\underline{A}^n$ (cf. [W], loc. cit., déf. 3) vérifie les conditions a) et b) ; il en va donc de même pour la fonction E_t.

<u>Lemme 2</u>. <u>La fonction</u> $\hat{E}_t(\xi)$ <u>est nulle si</u> ξ_f <u>est hors d'un compact</u> ; <u>on a</u>

$$\hat{E}_t(0) = V_M\, t^{-\kappa} \; ; \tag{14}$$

<u>et pour tout</u> $N > 0$,

$$\hat{E}_t(\xi) \ll t^{N-\kappa}\, |\xi_o|_d^{-N} \, . \tag{15}$$

Admettons le lemme 2, et soit C la fonction caractéristique du compact hors duquel $\hat{E}_t$ est nulle. On a donc

$$\hat{E}_t(\xi) \ll C(\xi_f)\, |\xi_o|_d^{-N}$$

ce qui prouve que $\hat{E}_t$ est intégrable et que la condition c) d'application de la formule de Poisson est satisfaite.

Vérifions la condition d) : puisque $\hat{E}_t$ n'est non nulle que lorsque ξ_f est dans un compact, elle n'est non nulle pour $\xi \in \underline{Q}^n$ que lorsque ξ est dans un réseau Γ de $\underline{Q}^n$; si w est un entier tel que $\Gamma \subset w\underline{Z}^n$, on a donc, vu la relation (15), et en sommant sur $\xi \neq 0$,

$$(16) \qquad \sum_{\xi\in\underline{Q}^n} \widehat{E}_t(\xi) << t^{N-\kappa} \sum_{\xi\in\underline{Z}^n} |w\xi_o|_d^{-N} ,$$

on peut donc appliquer la formule de Poisson à E_t ; il vient

$$\theta_M(t,F) = \sum_{x\in Q^n} E_t(x) = \sum_{\xi\in Q^n} \widehat{E}_t(\xi) = \widehat{E}_t(0) + \sum_{\xi\neq 0} \widehat{E}_t(\xi)$$
$$= V_M\, t^{-\kappa} + R(t) ,$$

où $R(t)$ est l'expression de gauche de la formule (16) ; d'où la relation (13) du lemme 1.

Il ne reste donc plus qu'à démontrer le lemme 2. Remarquons tout d'abord que la Formule de Taylor, le fait que F soit anisotrope sur $\underline{Q}_p$, et l'inégalité ultramétrique impliquent qu'il y a un nombre $\varepsilon_p > 0$ tel que, lorsque $x,y \in \underline{Q}_p^n$, on ait

$$|F(x+y)|_p = |F(x)|_p$$

dès que $\|x\|_p = 1$ et $\|y\|_p \leq \varepsilon_p$. Il s'ensuit que la fonction E_t est constante sur les classes $x+K$, où K est le sous-groupe ouvert compact de $\underline{A}_p^n$ des points $x = (x_p)$ vérifiant $\|x_p\|_p \leq 1$ si $p \notin M$ et $\|x_p\|_p \leq \varepsilon_p$ si $p \in M$. Si $\widehat{K}$ est le sous-espace dual de K, il s'ensuit (cf. la démonstration de la prop. 2 du § 2, ch. VII de [W]), que la fonction $\widehat{E}_t(\xi)$ est nulle si $\xi_f \notin \widehat{K}$, ce qui établit la première assertion du lemme 2. Si les nombres $k,k_1,\ldots,k_n$ sont ceux pour lesquels on a la relation

$$(QH) \qquad F(t^{k_1}x_1,\ldots,t^{k_n}x_n) = t^k F(x),$$

posons $d_i = k/k_i$ et soit $D(t)$ l'application linéaire de $\underline{R}^n$:

$$D(t) : (x_1,\ldots,x_n) \longrightarrow (t^{-1/d_1}x_1,\ldots,t^{-1/d_n}x_n) ;$$

La relation (QH) se réécrit

$$(17) \qquad t\, F(D(t)x) = F(x),$$

et on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\underline{R}^n)$,

$$(18) \qquad \int_{\underline{R}^n} f(x)\, dx = t^{-\kappa} \int_{\underline{R}^n} f(D(t)y)\, dy$$

avec $\kappa = (k_1+\ldots+k_n)/k$, comme on l'a défini dans le théorème

Posons, pour $\xi \in \underline{R}^n$ et $T > 0$,

$$\hat{E}_o(T,\xi) = \int_{\underline{R}^n} \exp - (2i\pi\langle x,\xi\rangle + TF(x))\, dx$$

en notant $\langle,\rangle$ le produit scalaire dans l'espace à n dimensions. Les relations (17) et (18) impliquent que l'on a

$$(19) \qquad \hat{E}_o(T,\xi) = T^{-\kappa}\, \hat{E}_o(1,D(T)\xi) \;.$$

Si $\xi = 0$, on a

$$(20) \qquad \hat{E}_o(T,0) = T^{-\kappa} \int_{\underline{R}^n} \exp\,(-F(x))\, dx \;;$$

Si $\xi \neq 0$, la fonction $\exp\,(-F(x))$ est dans $\mathcal{S}(\underline{R}^n)$; on a donc, avec la notation (9),

$$(21) \qquad \hat{E}_o(1,\xi) \ll |\xi|_d^{-N}$$

pour tout $N > 0$, et puisque

$$|D(T)\xi|_d = T^{-1}\; |\xi|_d \;,$$

il vient, vu (19) et (21), l'inégalité

$$(22) \qquad \hat{E}_o(T,\xi) \ll T^{-\kappa}(T^N |\xi|_d^{-1}) .$$

Le calcul de $\hat{E}_t(\xi)$ se ramène à $\hat{E}_o(T,\xi)$. En effet, posons

$$\underline{Q}_M^n = \prod_{p\in M} \underline{Q}_p^n \quad , \quad dx_M = \prod_{p\in M} dx_p \;;$$

et si $x_M = (x_p) \in \underline{Q}_M$, on écrit

$$\chi(x_M) = \prod_{p\in M} \chi_p(x_p) ,$$

où χ_p est <u>le caractère de Tate de</u> $\underline{Q}_p$ (cf. la démonstration du thm. 3, ch. IV, § 2 de [W] ou [Lg], ch. XIV, § 1). Posons enfin

$$U_M = \{x \in \underline{Q}_M^n \mid \|x_p\|_p = 1 \quad \text{pour} \quad p \in M\}$$

Avec ces notations, et puisque les fonctions ϕ_p sont leur propres transformées de

Fourier lorsque la transformation de Fourier est définie par le caractère de Tate, il vient

$$(23) \qquad \hat{E}_t(\xi) = \prod_{p \notin M} \phi_p(\xi)\, \hat{E}_t(\xi_M, \xi_o) ,$$

avec

$$(24) \qquad \hat{E}_t(\xi_M, \xi_o) = \int_{U_M} \chi(<x_M, \xi_M>)\, \hat{E}_o(t\, F_M(x_M), \xi_o)\, dx_M \ .$$

Si $\xi = 0$, on a, vu la relation (20),

$$\begin{aligned} E_t(0,0) &= t^{-\kappa} \int_{U_M} F_M(x_M)^{-\kappa}\, dx_M \int_{\underline{R}^n} \exp\,(-F(x_o))\, dx_o \\ &= t^{-\kappa}\, V_o \prod_{p \in M} \int_{\|x\|_p = 1} |F(x_p)|_p^{-1}\, dx_p \\ &= t^{-\kappa}\, V_M \end{aligned}$$

d'où s'ensuit la relation (14) ; si d'autre part on pose $T = t\, F_M(x_M)^{-1}$, la relation (7) implique que si $x_M \in U_M$, on a $T \leq c_M^{-1} t$ et donc,

$$E_o(t\, F_M(x_M), \xi_o) = E_o(T, \xi_o) << t^{N-K}\, |\xi_o|_d^{-N}$$

comme on le déduit de (22) ; cette estimation, jointe à (23) et (24), prouve la relation (15) et le lemme 2 est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[A] C.AN - On the analytic continuation of a certain Dirichlet series, J. of Number Theory, 6 (1974), p. 1-6.

[B] S. BOCHNER - Zeta-functions and Green's functions for linear partial differential operators of elliptic type with constant coefficients, Ann. of Math., 57 (1953), p. 32-56.

[L] G. LACHAUD - Variations sur un thème de Mahler, à paraître aux Inv. Math.

[Lg] S. LANG - Algebraic number theory, Reading, Addison-Wesley, 1970.

[M1] K. MAHLER - Uber einer Satz von Mellin, Math. Ann., 100 (1928), p. 384-395.

[M2] K. MAHLER - Zur Approximation Algebraischer Zahlen, III, Acta Math., 62 (1933), p. 91-166.

[R] B. RANDOL - Generalized zeta-functions, Arkiv för Mat., 5 (1963), p. 101-111.

[W] A. WEIL - Basic Number Theory, Heidelberg, Springer, 1974.

Gilles LACHAUD
U.E.R. de Mathématiques
Université Paris 7
2, place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05