MICHEL WALDSCHMIDT

Rapport sur la transcendance

Astérisque, tome 41-42 (1977), p. 127-134

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1977__41-42__127_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 41-42 (1977) p.127-134

RAPPORT SUR LA TRANSCENDANCE

par

Michel WALDSCHMIDT

-:-:-:-

La théorie des nombres transcendants est actuellement dans une période d'activité intense ; cette effervescence s'est manifestée notamment lors d'un colloque sur ce sujet qui s'est tenu à Cambridge au début de cette année 1976. On trouvera dans les comptes rendus [1] de ce colloque de nombreux exposés, qui permettent de faire le point sur l'état actuel de la théorie. Nous présentons ici quelques uns des faits les plus saillants, en commençant par ceux qui tournent autour de la méthode de Baker, et en terminant par ceux qui concernent l'indépendance algébrique.

1. - La méthode de Baker et ses développements

La recherche de minorations de formes linéaires de logarithmes semble être actuellement à un tournant de son histoire (pour de plus amples renseignements sur cette histoire, voir l'article de Baker dans [1]). En effet, toutes les démonstrations de transcendance actuellement connues permettant d'attaquer ce genre de problème commencent par une construction qui utilise le principe des tiroirs de Dirichlet ; par sa structure, cette construction impose certaines restrictions sur le choix des paramètres, qui indiquent que la méthode actuelle a donné presque tout son jus. Voici les résultats généraux actuellement connus [1] :

1. - Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des nombres algébriques de hauteur inférieure ou égale à $A_1, \dots, A_n$ respectivement, avec $A_j \geq 4$, $(1 \leq j \leq n)$; soient $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ des nombres algébriques, de hauteur inférieure ou égale à B, avec $B \geq 4$; notons

$$\Omega = (\operatorname{Log} A_1) \dots (\operatorname{Log} A_n) ,$$
$$\Omega' = (\operatorname{Log} A_1) \dots (\operatorname{Log} A_{n-1}) = \Omega / \operatorname{Log} A_n \; ; \; (\Omega' \geq 4) .$$

Alors, si

$$\Lambda_1 = \beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \dots + \beta_n \log \alpha_n$$

n'est pas nul, on a

$$|\Lambda_1| \geq \exp\{-C_1 . \Omega . (\operatorname{Log} B + \operatorname{Log} \Omega) . (\operatorname{Log} \Omega')\} , \tag{1}$$

où C_1 ne dépend que de n et de $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n , \beta_0, \dots, \beta_n) : \mathbb{Q}]$.

2. - Soient $b_1, \dots, b_n$ des nombres entiers rationnels de valeur absolue inférieure ou égale à B, avec $B \geq 4$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $A_1, \dots, A_n$, Ω, Ω' sont définis comme précédemment ; si

$$\Lambda_2 = b_1 \log \alpha_1 + \dots + b_n \log \alpha_n$$

n'est pas nul, alors

$$|\Lambda_2| \geq \exp\{-C_2 \Omega (\operatorname{Log} B)(\operatorname{Log} \Omega')\} , \tag{2}$$

où C_2 ne dépend que de n et $D = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}]$.

(Les logarithmes de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les déterminations principales.)

Il existe peu de résultats sur ce problème qui ne soient pas conséquences des deux majorations (1) et (2) précédentes (mentionnons cependant d'abord la majoration "triviale" :

$$|\Lambda_2| > (A+1)^{-4nDB} ,$$

où $A = \max_{1 \leq j \leq n} A_j$, et ensuite des minorations de Λ_2, en particulier par T. N. Shorey, dans le cas particulier où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont proches de 1).

Ayant l'impression que les inégalités (1) et (2) ne vont pas être améliorées dans un proche avenir, A. Baker d'une part, A. J. van der Poorten et J. H. Loxton d'autre part, on calculé C_1 et C_2 ; voici les résultats de Baker [1] :

$$C_1 = (16 n D)^{200 n} ,$$
$$C_2 = (8 n D)^{400 n} .$$

La limite de la méthode actuelle est

$$e^{c\,n+c'} \,.\, n^n \,.\, D^{n+2} ,$$

avec des constantes absolues c et c', mais il serait intéressant de supprimer le facteur n^n.

Les résultats précédents ont été traduits en p-adique par van der Poorten [1].

Voici quelques applications de ce type d'énoncé à des équations diophantiennes.

a) <u>L'équation de Catalan</u>

En 1844, E. Catalan a conjecturé que la seule solution (x, y, p, q) en entiers supérieurs ou égaux à 2 de l'équation

$$(3) \qquad x^p - y^p = 1$$

était $(3, 2, 2, 3)$:

$$3^2 - 2^3 = 1 .$$

Récemment, Robert Tijdeman [2] a démontré qu'il existait une constante absolue effectivement calculable $C > 0$ telle que toute solution $(x, y, p, q) \in \mathbb{Z}^4$ de (3) telle que $x \geq 2$, $y \geq 2$, $p \geq 2$, $q \geq 2$, vérifie

$$\max\{x^p, y^q\} \leq C .$$

En reprenant la démonstration de Tijdeman et en utilisant une valeur explicite de C_2 dans (2) donnée par van der Poorten, Michel Langevin [3] a obtenu

$$C = \exp\exp\exp\exp(1000) ;$$

la conjecture de Catalan est donc ramenée à un nombre fini et connu de calculs.

b) <u>Puissances parfaites dont les chiffres en base</u> 10 <u>sont identiques</u>

On conjecture que les seules solutions de l'équation

$$y^q = a + 10a + \ldots + 10^{n-1} a ,$$

en entiers (a, q, y, n) avec $1 \leq a \leq 9$, $q \geq 2$, $y \geq 1$, $n \geq 1$, sont "triviales", c'est-à-dire avec un seul chiffre :

$$1, 4, 8, 9 .$$

Des travaux de Nagell, Ljungreen, Oblath ont monté, il y a une vingtaine d'années, qu'il n'y avait pas d'autre solution pour $2 \leq a \leq 9$. Le problème n'est toujours pas résolu pour $a = 1$, mais Shorey et Tijdeman [4] ont fait quelques progrès dans cette direction ; ainsi l'équation

$$\frac{10^n - 1}{10 - 1} = y^q$$

n'a pas de solution (q, y, n) telle que $n \geq 2$, $y \geq 2$, $1 < q < 20$. Ils ont aussi d'autres résultats sur l'équation

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q \quad ;$$

par exemple, x étant fixé, cette équation n a qu'un nombre fini de solutions (q, y, n) en entiers ≥ 2, et on peut majorer effectivement y^q.

c) <u>L'équation</u> $z_0 z^u = f(x, y)$

Voici un dernier exemple d'application de minorations de formes linéaires de logarithmes. Van der Poorten, Schinzel, Shorey et Tijdeman, dans un travail commun [1], on montré que, si $f \in \mathbb{Z}[x, y]$ est une forme binaire ayant deux facteurs linéaires distincts, l'équation

$$z_0 z^u = f(x, y)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions (u, x, y, z, z_0) en entiers rationnels tels que y et z_0 soient composés de nombres premiers fixés.

Il y a bien d'autres applications des inégalités (1) et (2) ; on pourra par exemple consulter le livre de Baker [5] sur ce sujet, et l'exposé de C. L. Stewart Voici maintenant un autre aspect de la méthode de Baker. Les formes linéaires Λ_1, Λ_2 de (1) et (2) sont du type

$$\beta_0 + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n \quad ,$$

où les u_j sont des nombres complexes tels que $\exp(u_j)$ soient algébriques. Le seul cas important pour les applications est $\beta_0 = 0$. David Masser a utilisé une généralisation de la méthode de Baker pour minorer les formes linéaires

$$\Lambda = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n \quad ,$$

quand $u_1, \ldots, u_n$ sont des points algébriques d'une fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques. Alors que la minoration par $\exp\{-O(B^2)\}$ est triviale, il suffit d'obtenir $\exp\{-o(B^2)\}$ pour démontrer de manière effective le théorème de Siegel pour les courbes de genre 1 dont on connaît une base du groupe de Mordell-Weil. Actuellement, on ne sait minorer $|\Lambda|$ non trivialement que dans le cas de multiplication complexe ; le résultat de Masser [6] :

$$|\Lambda| > C \exp\{-H^{\varepsilon}\}$$

où C ne dépend que de $u_1, \dots, u_n$, g_2, g_3, D et $\varepsilon>0$, a été amélioré par Coates et Lang [7] sous la forme

$$|\Lambda|>C \exp\{-\operatorname{Log} H)^{8(n+2)}\},$$

grâce à un théorème de Bashmakov ; Cassels a montré que la démonstration de Coates et Lang pouvait être rendue effective.

Ces inégalités ont été étendues aux variétés abéliennes avec multiplication complexe par Coates et Lang [7] (la généralisation du théorème de Bashmakov est due à Ribet), et elles ont été traduites en p-adique par Daniel Bertrand [8] ; grâce à lui, les énoncés p-adiques de transcendance sont maintenant aussi bons que leurs analogues complexes.

2. - Indépendance algébrique

Pour rester dans le domaine des fonctions elliptiques, voici d'abord un résultat de G V. Čudnovskii [9] : si $\wp$ est une fonction elliptique, g_2, g_3 ses invariants, (ω_1, ω_2) un couple fondamental de périodes, et η_1, η_2 les pseudo-périodes de la fonction zêta associée à $\wp$, deux des nombres

$$g_2, g_3, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2$$

sont algébriquement indépendants. En particulier (en utilisant un résultat de D.W. Masser [6] chap. III), si on suppose g_2, g_3 algébriques, et si $\wp$ a la multiplication complexe, alors ω_1 et π sont algébriquement indépendants. Dans le cas particulier de la courbe elliptique

$$y^2 = 4x^3 - 4x,$$

le résultat de Čudnovskii contient l'indépendance algébrique de $\Gamma(\frac{1}{4})$ et de π ; on ne savait pas encore que $\Gamma(\frac{1}{4})$ était transcendant, ni même irrationnel, et ce problème était considéré comme très difficile. Or la démonstration de Čudnovskii est très simple, et il est tout à fait surprenant que son théorème n'ait pas été démontré plus tôt.

Čudnovskii a obtenu de très nombreux autres résultats, en particulier sur l'indépendance algébrique de valeurs de la fonction exponentielle, grâce à plusieurs améliorations successives et très profondes d'une méthode de Gel'fond ; il a dû pour cela introduire des complications techniques tout à fait formidables et son avance sur les autres chercheurs dans ce domaine est considérable.

Voici juste un cas particulier d'un de ces énoncés. Chacun sait que a^b est transcendant quand a et b sont algébriques, $a \neq 0$, $\log a \neq 0$, $b \notin \mathbb{Q}$. Gel'fond a conjecturé que les nombres

$$a^b, a^{b^2}, \ldots, a^{b^{d-1}}, \quad \text{où } d = [\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}],$$

sont algébriquement indépendants, et l'a démontré pour $d = 2$ et $d = 3$. Plus précisément, il a montré que, si q est le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps

$$\mathbb{Q}(a^b, a^{b^2}, \ldots, a^{b^{d-1}}),$$

pour $d \geq 3$ on a $q \geq 2$. La minoration $q \geq 3$ a été démontrée d'abord pour $d \geq 19$ (Smelev), puis $d \geq 15$ (Brownawell) enfin $d \geq 7$ (Čudnovskii). Alors que les méthodes de Šmelev et Brownawell (qui utilisent un "type de transcendance") ne peuvent pas aller plus loin, celle de Čudnovskii permet d'obtenir $q \geq 4$ (pour d assez grand). Il fallait une nouvelle méthode, beaucoup plus compliquée, pour continuer par récurrence. C'est ce que Čudnovskii a réalisé, pour démontrer :

$$d \geq 2^n - 1 \text{ et } n \geq 2 \Rightarrow q \geq n,$$

autrement dit

$$q \geq \left[\frac{\operatorname{Log}(d+1)}{\operatorname{Log} 2}\right] \quad \text{pour } d \geq 2. \tag{4}$$

Ce résultat est remarquable, même s'il est loin de l'ordre de grandeur suggéré par Gel'fond. D'autre part Čudnovskii annonce des résultats encore meilleurs que (4), qui montrent qu'il est déjà très avancé dans sa théorie.

Une autre méthode d'indépendance algébrique, inventée par Mahler en 1929, a connu un regain d'intérêt ces derniers temps ; ces travaux étaient peu connus, et, Wolfgang Schwarz ayant retrouvé -sans le savoir- certains des résultats de Mahler, celui-ci publia de nouveau [10] les principaux résultats qu'il avait obtenus 40 ans avant. Depuis, K. K. Kubota d'une part, A. J. van der Poorten et Loxton d'autre part, ont développé cette méthode et ont obtenu des énoncés du genre suivant : <u>les nombres</u>

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - p^{-2^k}), \quad p \text{ premier},$$

<u>sont algébriquement indépendants</u>.

Enfin une troisième méthode d'indépendance algébrique, qui a son origine dans les travaux de Siegel en 1929 sur les fonctions de Bessel et les fonctions hypergéométriques (généralisant le théorème de Lindemann Weierstrass) a connu de remarquables succès ces derniers temps, sous l'impulsion de A. B. Šidlovskii et de son école. Le rapport [11] de Šidlovskii montre la puissance de cette méthode.

Après avoir constaté les progrès récents de la théorie des nombres transcendants, en particulier dans le domaine de l'indépendance algébrique, on peut se demander quelle méthode est la mieux adaptée pour attaquer la conjecture de Schanuel (*), celle de Baker, celle de Čudnovskii, ou celle de Šidlovskii ? Les travaux de Čudnovskii sont les plus proches de cette conjecture, mais aucune des trois méthodes ne semble adaptée au problème de l'indépendance algébrique de e et π, si bien qu'actuellement ce problème ne paraît pas plus facile que la conjecture générale. Comme Čudnovskii a déjà combiné sa méthode avec celle de Baker, il serait certainement très fructueux de faire le lien avec la méthode de Šidlovskii.

(*) Conjecture de Schanuel : <u>Si</u> $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ <u>sont des nombres complexes</u> $\mathbb{Q}$-<u>linéairement indépendants</u>, <u>le degré de transcendance sur</u> $\mathbb{Q}$ <u>du corps</u>

$$\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_n})$$

<u>est supérieur ou égal à</u> n.

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[1] <u>Transcendence theory and its applications</u>, Proceedings of a conference held at Cambridge in Lent term 1976.

[2] R. TIJDEMAN, <u>On the equation of Catalan</u>, Acta Arith., 29 (1976), 197-209.

[3] M. LANGEVIN, <u>Quelques applications de noveaux résultats de van der Poorten</u>, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (groupe d'Etude de Théorie des Nombres) 17e année, 1975-76, n° 17.

[4] T. N. SHOREY and R. TIJDEMAN, <u>New applications of diophantine approximations to diophantine equations</u>, Math. Scand., à paraître.

[5] A. BAKER, <u>Transcendental number theory</u>, Cambridge Univ. Press, 1975.

[6] D. W. MASSER, <u>Elliptic functions and transcendence</u>, Lecture Notes in Math., 432 (1975), Springer Verlag.

[7] J. COATES and S. LANG, Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication, Invent. math. 34 (1976), 129-133. Voir à ce sujet le livre de S. Lang : Elliptic curves, diophantine analysis (à paraître).

[8] D. BERTRAND, Sur les dénominateurs des points rationnels des courbes elliptiques, Journées Arithmétiques de Caen, 1976.

[9] Pour les références aux travaux de G. V. ČUDNOVSKII, voir par exemple l'exposé n° 488 (28e année, juin 1976) du séminaire Bourbaki.

[10] K. MAHLER, On a paper of W. Schwarz, J. Number Theory, 1 (1969), 512-521.

[11] A. B. ŠIDLOVSKII, On arithmetic properties of values of analytic functions, Proc. Steklov. Inst. Math., 132 (1973), 193-233 (1975) (Trudy Mat. Inst. Steklov, 132 (1971), 169-202 (1973).).

-:-:-:-

Michel WALDSCHMIDT
"Analyse Complexe et Géométrie"
Université P. & M. Curie (Paris VI)
Mathématiques, t. 45-46
4, place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05