

# *Astérisque*

ROBERT CORI

## **Planarité et algébricité**

*Astérisque*, tome 38-39 (1976), p. 33-44

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1976\\_\\_38-39\\_\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__38-39__33_0)

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PLANARITÉ ET ALGÈBRICITÉ

par

Robert CORI

Dans des travaux parus lors des années 60, W.T. Tutte et son école ont mis en évidence des propriétés remarquables vérifiées par les nombres comptant diverses familles de cartes planaires :

- d'une part, ils se présentent sous une forme très agréable (souvent comme un monôme de factorielles),
- d'autre part, les séries génératrices de ces nombres sont algébriques.

Nous proposons ici une tentative d'explication pour quatre propriétés énoncées par W.T. Tutte, ces "explications" ont en commun le fait qu'elles font intervenir un codage des cartes planaires par les mots d'un langage algébrique. L'algébricité des séries génératrices résulte d'un simple passage en commutatif, et la forme remarquable des nombres de propriétés combinatoires de ces langages.

La présentation que nous faisons ici se veut une introduction à cette problématique, elle est donc essentiellement intuitive et aucune preuve complète n'est donnée. Pour une démarche plus rigoureuse et le détail des preuves on se reportera à [1], [2], [3].

I.- LES QUATRE PROPRIÉTÉS

1.- Les "dissections" de la sphère (ou "slicings" [6])

On se donne  $k+1$  disques ( $k \geq 0$ ) sur la sphère étiquetés  $\underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{k}$  et  $q_i$  ( $i=0,1,\dots,k$ ) points à la frontière de chacun de ces disques ( $q_1 \neq 0$ ). Un des points situé sur le disque  $\underline{0}$  est distingué comme point de départ.

Une dissection est constituée par une famille d'arcs (simples de Jordan) joignant les points marqués à la frontière des disques, ne se coupant pas, et formant des domaines simplement connexes sur la sphère privée de l'intérieur des disques.

On cherche le nombre  $\gamma(q_0, q_1, \dots, q_k)$  de telles dissections en considérant comme équivalentes deux dissections échangées par un homéomorphisme de la sphère qui laisse fixe le point de départ et chaque disque globalement.

On peut remarquer, en réduisant les disques à des points, que les  $\gamma$  énumèrent aussi les cartes pointées planaires à sommets étiquetés ayant un système de degrés donné.

Ainsi,  $\gamma(2,1,1) = 2$  ; les deux dissections correspondantes étant dessinées sur la figure 1.

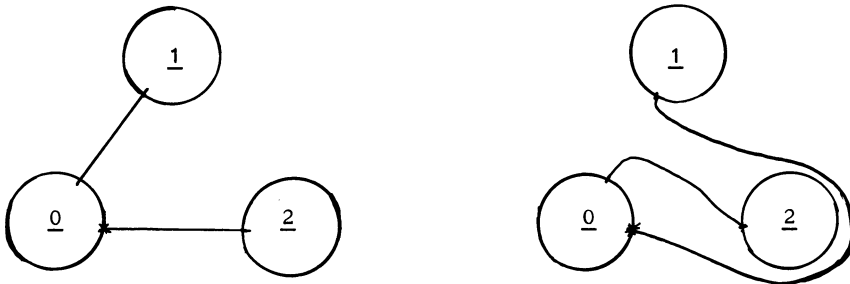


Figure 1      $\gamma(2,1,1) = 2$

Les propriétés mises en évidence par W.T. Tutte [6] sont les suivantes :

Propriété 1.- La série  $C_k(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{q_i > 0} \gamma(q_0, q_1, \dots, q_k) x_0^{q_0} x_1^{q_1} \dots x_k^{q_k}$

est (le développement de Taylor à l'origine d'une fonction) algébrique.

Propriété 2.- Dans le cas où tous les  $q_i$  sont des nombres pairs ( $q_i = 2 p_i$ ) le nombre  $\gamma$  est donné par la relation (où  $n = \sum_{i=0}^k p_i$ ) :

$$\gamma(2 p_0, 2 p_1, \dots, 2 p_k) = \frac{(n-1)!}{(n-k+1)!} (2 p_0) \prod_{i=0, k} \frac{(2 p_i - 1)!}{p_i! (p_i - 1)!}$$

2.- Cartes planaires pointées

Soit  $a_n$  le nombre de cartes planaires pointées ayant  $n$  arêtes. Pour une définition précise de ces cartes, on pourra se reporter à [7] ou s'inspirer du fait que les 9 cartes planaires pointées à 2 arêtes sont données par la figure 2.

Propriété 3.- [7] [8] La série  $C = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$  est une série algébrique.

Propriété 4.- [7]  $a_n = \frac{3^n 2 (2 n)!}{n! (n + 2)!}$

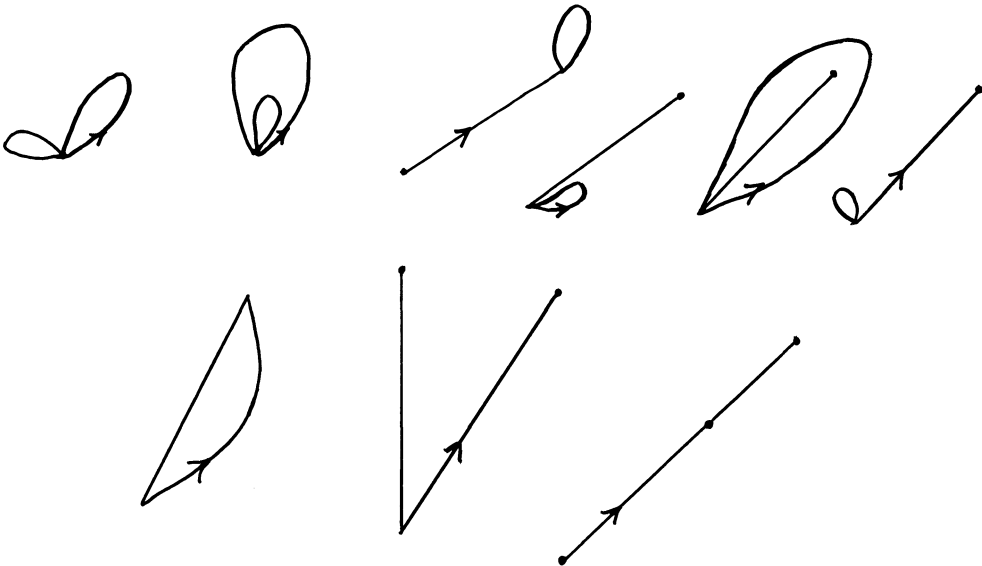


Figure 2 Les neuf cartes planaires pointées à deux arêtes

II.- DE L'ALGÈBRICITÉ DES SÉRIES  $c_k$

Nous construisons dans ce paragraphe une famille de langages algébriques dont les mots sont en bijection avec les dissections et dont les images commutatives ne sont autres que les séries  $c_k$ , ce qui entraîne leur algébricité.

1.- Les langages  $L_p [1]$

Pour toute parties  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$  de l'ensemble des entiers positifs  $\mathcal{N}^+$ , on note  $X_p$  l'alphabet composé des  $2i + 2$  lettres :  $x_o, x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_i}, \bar{x}_{p_1}, \bar{x}_{p_2}, \dots, \bar{x}_{p_i} \cdot \bar{x}_{p_o}$ . Ainsi  $X_\emptyset = \{x_o, \bar{x}_o\}$ .

On note  $[k]$  l'ensemble des entiers positifs inférieurs ou égaux à  $k$ .

Soit  $\varphi_p$  le morphisme de  $X_{[k]}^*$  dans  $X_p^*$  donné par :

$$\varphi_p(x_o) = x_o, \quad \varphi_p(\bar{x}_o) = \bar{x}_o, \quad \varphi_p(x_i) = x_{b_p(i)}, \quad \varphi_p(\bar{x}_i) = \bar{x}_{b_p(i)}$$

où  $b_p$  est la bijection croissante de  $[k]$  dans  $P$ .

Soit enfin  $\nabla_k$  l'opérateur de  $X_p^*$  dans  $X_{p \cup \{k\}}^*$  donné par :

$$\nabla_k 1 = 1, \quad \nabla_k x_i f = x_i \nabla_k f, \quad \nabla_k \bar{x}_i f = \bar{x}_i \nabla_k f \quad (\text{si } i \neq 0)$$

$$\nabla_k x_o f = x_o f + x_k \nabla_k f, \quad \nabla_k \bar{x}_o f = \bar{x}_o f + \bar{x}_k \nabla_k f.$$

On peut vérifier aisément que  $\nabla_k$  est une transduction rationnelle.

Pour toute partie  $P$  de  $\mathcal{N}$ , on construit un langage  $L_p$  et ceci par récurrence sur le nombre d'éléments de  $P$ .

(a)  $L_\emptyset$  est le langage formé des mots en  $x_o$  et  $\bar{x}_o$  qui sont des systèmes de parenthèses bien formés si on considère  $x_o$  comme une parenthèse ouvrante et  $\bar{x}_o$  comme une parenthèse fermante ; ainsi  $L_\emptyset$  vérifie la relation :

$$L_\emptyset = 1 + x_o L_\emptyset \bar{x}_o L_\emptyset \quad (1 \text{ étant le mot vide de } X_\emptyset^*).$$

(b)  $L_{[1]}$  est donné par :

$$L_{[1]} = x_0 L_{[1]} \bar{x}_0 L_\emptyset + x_0 L_\emptyset \bar{x}_0 L_{[1]} + x_0 \bar{x}_1 \nabla_1 L_\emptyset.$$

(c) Si  $L_{[k]}$  est défini  $L_P$  pour  $\text{Card } P = k$  est donné par :  $L_P = \Phi_P(L_{[k]}).$

(d) Si  $L_{[k]}$  est défini,  $L_{[k+1]}$  est donné par :

$$L_{[k+1]} = \sum_{\emptyset \subseteq P \subseteq [k+1]} x_0 L_P \bar{x}_0 L_{[k+1] \setminus P} + \sum_{i=1, k+1} x_0 x_i \nabla_i L_{[k+1] \setminus \{i\}}.$$

## 2.- LIEN AVEC LES DISSECTIONS

THÉOREME 1.-  $L_{[k]}$  est un langage algébrique dont les mots sont en bijection avec les dissections (à  $k+1$  disques).

L'algébricité de  $L_{[k]}$  se démontre par récurrence sur  $k$  en utilisant le fait que  $\nabla_k$  est une transduction rationnelle (qui transforme donc un langage algébrique en un langage algébrique).

La construction de la bijection entre dissections à  $k+1$  disques et mots de  $L_k$  résulte des remarques suivantes :

"Le point de départ" d'une dissection est joint à un point appartenant soit au même disque que lui, soit à un autre. Dans le premier cas, l'arc issu du point de départ et une portion de la frontière du disque divisent la dissection initiale en deux nouvelles dissections. En notant  $P$  l'ensemble des étiquettes des disques situés à l'intérieur de la courbe ainsi formée, on a une explication du terme  $x_0 L_P \bar{x}_0 L_{[k] \setminus P}$  de la formule de récurrence. Dans le cas où le point de départ est joint par un arc à disque étiqueté  $i$  ( $i \neq 0$ ), on forme une dissection ayant un disque de moins en dédoublant cet arc, c'est ce qui explique que le second terme fasse intervenir  $L_{[k] \setminus \{i\}}$ . L'opérateur  $\nabla_i$  consistant en la division d'un disque en deux.

Corollaire.- La série  $C_k$  est algébrique. En effet, on obtient  $C_k$  à partir de  $L_k$  en effectuant le morphisme  $\Pi_k$  tel que  $\Pi_k(x_i) = \Pi_k(\bar{x}_0) = x_i$  et en considérant que les variables commutent, d'où le résultat.

III.- DES NOMBRES  $\gamma(p)$

Nous présentons ici une démonstration de la formule donnant le nombre  $\gamma(q)$  lorsque  $q$  a toutes ses composantes paires ; nous utilisons comme point de départ à cette démonstration le théorème et les deux propriétés qui suivent (et dont on peut trouver une preuve dans [1] et [3]).

Une dissection ayant  $k+1$  disques et sur chacun de ces disques  $q_i$  points ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) sera dite une  $k$ -dissection de forme  $q$ , où  $q$  est le vecteur de composantes  $q_0, q_1, \dots, q_k$ .

THÉORÈME 2.- Soient  $q$  et  $r$  les deux vecteurs donnés par :

$$q = (2p_0, 2p_1, 2p_2, \dots, 2p_k) \quad r = (2p_0 - 1, 2p_1 + 1, 2p_2, \dots, 2p_k).$$

Il existe une bijection entre les  $k$ -dissections de forme  $q$  et celles de forme  $r$ .

Propriété III<sub>1</sub>.-  $\gamma(2p_0, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_k) = \frac{(p_0 + k - 1)!}{(p_0 + 1)!} \frac{(2p_0)!}{p_0! (p_0 - 1)!} \cdot$

Propriété III<sub>2</sub>.-  $\gamma'(q_0, q_1, q_2, \dots, q_k) = q_1 q_2 \dots q_k \gamma(q_0, q_1, q_2, \dots, q_k)$  est une fonction symétrique de  $q_0, q_1, q_2, \dots, q_k$ .

Preuve de la formule donnant  $\gamma$  à partir de ces résultats :

Notons  $q, r, s, t, u, v$  les vecteurs donnés par

$$q = (2p_0, 2p_1, 2p_2, \dots, 2p_k)$$

$$r = q + (-1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$s = q + (1, -1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$t = q + (2, -2, 0, 0, \dots, 0)$$

$$u = (q_0 + q_1 - 2, 2, q_2, q_3, \dots, q_k)$$

$$v = (q_0 + q_1 + q_2 + \dots + q_k - 2k, 2, 2, 2, \dots, 2) .$$

Le théorème 2 implique  $\gamma(q) = \gamma(r)$  et l'application de la propriété 2 donne alors  $\gamma'(q) = \frac{q_1 \gamma'(r)}{q_1 + 1}$ . De manière symétrique, on obtient :

$$\gamma'(q) = \frac{q_0}{q_0 + 1} \gamma'(s) .$$

De même :

$$\gamma'(t) = \frac{q_1 - 2}{q_1 - 1} \gamma'(s) .$$

Enfin, la relation suivante entre  $\gamma'(q)$  et  $\gamma'(t)$  permet d'amorcer une récurrence :

$$\gamma'(q) = \frac{q_0}{q_0 + 1} \frac{q_0 - 1}{q_1 - 2} \gamma'(t) .$$

Ce qui donne pour  $\gamma'(q)$  en fonction de  $\gamma'(u)$  :

$$\gamma'(q) = \gamma'(u) \cdot \frac{q_0}{q_0 + 1} \cdot \frac{q_0 + 2}{q_0 + 3} \cdot \dots \cdot \frac{q_0 + q_1 - 4}{q_0 + q_1 - 3} \cdot \frac{q_1 - 1}{q_1 - 2} \cdot \frac{q_1 - 3}{q_1 - 4} \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} ,$$

soit, après simplification et puisque  $q_0 = 2p_0$  :

$$\gamma'(q) = \gamma'(u) \cdot \frac{(p_0 + p_1 - 2)!}{(2p_0 + 2p_1 - 3)!} \frac{(2p_0 - 1)!}{(p_0 - 1)!(p_0 - 1)!} \frac{(2p_1 - 1)!}{(p_1 - 1)!(p_1 - 1)!}$$

et en notant  $C(p) = \frac{(2p - 1)!}{(p - 1)!(p - 1)!}$  on obtient :

$$\gamma'(q) = \gamma'(u) \cdot \frac{C(p_0) \times C(p_1)}{C(p_0 + p_1 - 2)} . \quad (1)$$

En remarquant que le rôle des  $p_i$  est symétrique, on obtient enfin :

$$\gamma'(q) = \gamma'(v) \frac{C(p_0) \cdot C(p_1) \cdot C(p_2) \dots C(p_k)}{C(p_0 + p_1 + \dots + p_k - k)} . \quad (2)$$

La propriété 1 donne :  $\gamma'(v) = \frac{(n - 1)!}{(n - k + 1)!} \frac{(2n - 2k)!}{(n - k)!(n - k - 1)!}$  (en notant



$n = \sum p_i$ )  $\gamma'(u) = \frac{(n-1)!}{(n-k+1)!} C(n-k) \times 2^{k+1}$ . Soit en reportant dans (1), on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \gamma'(q) &= \frac{(n-1)!}{(n-k+1)!} 2^{k+1} C(p_0) C(p_1) \dots C(p_k) \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k+1)!} \prod_{i=0}^k \frac{(2p_i)!}{p_i!(p_i-1)!} \end{aligned}$$

IV.- DE L'ALGÈBRICITÉ DE LA SÉRIE c

Comme il a été remarqué plus haut, étant donné une dissection si on réduit ses disques à des points, on obtient une carte planaire à sommets étiquetés ; ainsi  $L_{[k]}$  code aussi l'ensemble de ces cartes. On obtient de manière analogue le langage  $L_k$  codant les cartes planaires pointées (à sommets non étiquetés), il vérifie les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 + x_0 L_0 \bar{x}_0 L_0 \\ L_1 &= 1 + x_0 L_1 \bar{x}_0 L_0 + x_0 L_0 \bar{x}_0 L_1 + x_0 \bar{x}_1 \nabla_1 L_0 \\ L_k &= \sum_{p=0, k} x_0 L_p \bar{x}_0 L_{k-p} + x_0 \bar{x}_k \nabla_k L_{k-1} . \end{aligned}$$

Ainsi la série c, énumérative des cartes planaires est l'image par le morphisme  $\pi(x_i) = \pi(\bar{x}_i) = x$  ( $\forall i$ ) de la série L en variables non commutatives définie par  $L = \sum_{k=0} L_k$ .

L étant un langage défini sur un alphabet infini, on ne peut parler d'algèbricité ; on a donc été amené à construire une série s (intermédiaire entre le langage L et la série à une variable c) à deux variables non commutatives ; image de L par le morphisme  $\bar{w}$  tel que  $\bar{w}(x_0) = \bar{w}(\bar{x}_0) = x$  ;  $\bar{w}(x_i) = \bar{w}(\bar{x}_i) = y, \forall i \neq 0$ . La relation donnant  $L_k$  permet alors d'obtenir une équation pour s en introduisant l'opérateur linéaire  $\nabla$  de  $Z \ll x, y \gg$  dans lui-même défini par :  $\nabla x f = x f + y \nabla f$  ;  $\nabla y f = y$  ;  $\nabla 1 = 1$ . On a alors :

THÉOREME 3.- c est l'image par le morphisme  $\pi$  (donné par  $\pi(x) = \pi(y) = x$ ) de la série s vérifiant l'équation :

$$s = 1 + x s x s + x y \nabla s.$$

C'est ce théorème qui a motivé l'étude de ce type d'équations effectué dans [2]. L'algèbricité de c découle alors du théorème plus général suivant :

THÉOREME 4.- [2] L'image commutative de la solution de l'équation  $\xi = P(\xi) + A(\xi) \nabla \xi$  (où P et A sont des polynômes de  $Z \langle \xi, x, y \rangle$ ) est une série algébrique.

V.- DES NOMBRES  $a_n$

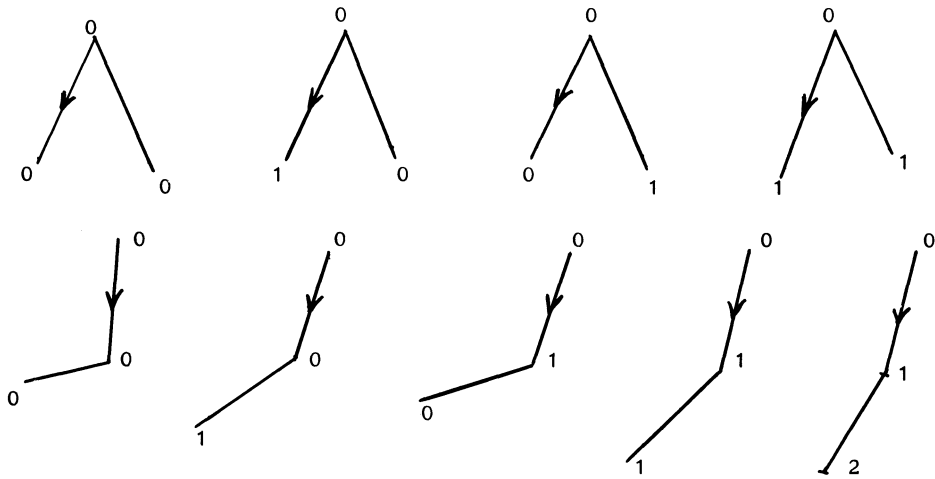
Le calcul des nombres  $a_n$  a été effectué par W.T. Tutte en utilisant les résultats d'énumération des dissections et en se ramenant par une transformation combinatoire sur les cartes au calcul de  $\gamma(4,4,\dots,4)$ .

Très récemment, nous avons mis en évidence avec B. Vauquelin une preuve directe de ce résultat en construisant une bijection entre les cartes planaires et certaines familles d'arbres [4] [9]. Présentons ici cette preuve :

1.- Un arbre pointé est une carte planaire pointée sans cycle (ce qui implique, entre autres, qu'elle n'a ni boucle, ni arêtes multiples). Un arbre pointé est dit bien étiqueté si on numérote ses sommets par des entiers positifs ou nuls de façon que :

- le sommet d'où est issu le brin pointé est numéroté 0 ;
- deux sommets joints par une arête admettent des étiquettes différant au plus d'une unité.

Il y a ainsi 9 arbres pointés bien étiquetés ayant 2 arêtes, qui sont donnés à la figure 3.



Codes     $y \bar{y} y \bar{y}$      $x \bar{x} y \bar{y}$      $y \bar{y} x \bar{x}$      $x \bar{x} x \bar{x}$   
                $y y \bar{y} \bar{y}$      $y x \bar{x} \bar{y}$      $x \bar{y} \bar{z} \bar{x}$      $x y \bar{y} \bar{x}$      $x x \bar{x} \bar{x}$

Figure 3

Les 9 arbres bien étiquetés à 2 arêtes et leur code.

2.- Le codage. On code chacun de ces arbres par un mot écrit sur l'alphabet  $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$ , en utilisant l'algorithme suivant :

On parcourt l'arbre le long de sa face infinie (comme par exemple dans [5]) en inscrivant  $x$  (resp.  $y, z$ ) si on rencontre une arête pour la première fois et si l'étiquetage augmente (resp. reste fixe, diminue) le long de cette arête, en inscrivant  $\bar{x}$  (resp.  $\bar{y}, \bar{z}$ ) si on rencontre une arête pour la seconde fois et si l'étiquetage diminue (resp. reste fixe, augmente) le long de cette arête.

On caractérise les mots qui codent les arbres bien étiquetés par la propriété suivante :

Propriété.-  $f$  est le code d'un arbre bien étiqueté si il appartient à la fois aux deux langages  $L_1$  et  $L_2$  donnés par les équations :

$$L_1 = 1 + x L_1 \bar{x} L_1 + y L_1 \bar{y} L_1 + z L_1 \bar{z} L_1$$

$$L_2 = 1 + x L_2 \bar{x} L_2 + x L_2 z L_2 + \bar{z} L_2 \bar{x} L_2 + \bar{z} L_2 z L_2 + y L_2 \bar{y} L_2$$

3.- L'énumération des cartes résulte alors des théorèmes suivants (dont on trouvera une démonstration dans [4]).

THÉORÈME 5.- [9] Il existe une bijection entre les cartes planaires pointées et les arbres pointés bien étiquetés, bijection qui conserve le nombre d'arêtes.

THÉORÈME 6.- Il existe une bijection entre les mots de  $L_1 \setminus L_2$  et les triples de  $L_1 \times L_1 \times L_1$ , bijection telle que si  $f$  a pour image  $(f_1, f_2, f_3)$  on ait  $|f| = |f_1| + |f_2| + |f_3| - 2$ .

Le calcul de  $a_n$  est alors simple, puisque le théorème 1 permet d'affirmer que  $a_n$  est aussi le nombre d'arbres bien étiquetés ayant  $n$  arêtes. Le théorème 2, ensuite, permet de se ramener aux calculs du nombre de mots de  $L_1$  de longueur  $2n$  et de triples de  $L_1 \times L_1 \times L_1$  dont la somme des longueurs est  $2n - 2$ ; ces calculs sont classiques et donnent respectivement :

$\frac{3^n (2n)!}{n!(n+1)!}$  et  $\frac{3^n (2n)!}{(n-1)!(n+2)!}$ , la différence des deux nombres est alors le nombre  $a_n$  annoncé dans le paragraphe I (propriété 4).

\* \* \*

#### RÉFÉRENCES

- [1] CORI R. : Graphes planaires et systèmes de parenthèses. Thèse de 3ème cycle, Paris (1969).
- [2] CORI R. et RICHARD J. : Énumération des graphes planaires à l'aide de séries formelles en variables non commutatives, *Discrete Mathematics*, 2 (1972) p. 115-162.
- [3] CORI R. : Un code pour les graphes planaires et ses applications, *Astérisque*, Soc. Math. de France, 27 (1975).

- [4] CORI R. et VAUQUELIN B. : Arbres bien étiquetés et cartes planaires à paraître.
- [5] KLARNER D.A. : Correspondance between plane trees and binary sequences J. Comb Theory, 9 (1970), p. 401-411.
- [6] TUTTE W.T. : A Census of Slicings, Canad. J. Math., 14 (1962) p. 708-722.
- [7] TUTTE W.T. : A Census of Planar maps, =Canad. J. Math., 15 (1963) p. 249-271.
- [8] TUTTE W.T. : On the enumeration of planar maps. Bull Amer. Math. Soc. 74 (1968) p. 64-74.
- [9] VAUQUELIN B. : Isomorphisme des Graphes planaires à partir de leur codage, Thèse de 3ème cycle, Université de Bordeaux I (1976).

Robert CORI  
Département de Mathématiques-  
Informatique  
Université de Bordeaux I  
351 cours de la Libération  
33405 TALENCE