Astérisque

JEAN-CLAUDE LAFON

Évaluation simultanée de plusieurs formes bilinéaires

Astérisque, tome 38-39 (1976), p. 117-129

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__38-39__117_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 38-39 (1976) p.117-129

ÉVALUATION SIMULTANÉE DE PLUSIEURS FORMES BILINÉAIRES

par

Jean-Claude LAFON

RÉSUMÉ.-

Quand on étudie la complexité, quant au nombre de multiplications "générales", de l'évaluation simultanée de plusieurs formes bilinéaires, on doit essayer de répondre aux deux questions suivantes : quel est le nombre minimum de multiplications "générales" nécessaire pour ce calcul ? Comment trouver l'algorithme optimum, ou à défaut, un algorithme nécessitant moins de multiplications que ceux déjà connus ? Dans la suite, on présente des méthodes générales d'approche de ces deux questions.

PLAN.-

Dans une première partie, on définit la classe des algorithmes utilisés, puis le critère d'optimisation considéré. On relie ensuite le nombre minimum de multiplications au rang tensoriel des matrices qui définissent les formes bilinéaires. On montre comment l'étude du rang tensoriel permet de construire de "bons"algorithmes et permet d'obtenir des preuves d'optimalité. Enfin, on aborde le problème du calcul du rang tensoriel.

1.- ALGORITHMES DE CALCULS ALGÉBRIQUES (cf. Winograd [13])

Notations.- Soit K un corps. $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ désigne l'espace des matrices $m \times n$ à éléments dans K. On considère $n+m$ indéterminées $x_1,\dots,x_m$ et $y_1,\dots,y_n$. On pose :

$$X^t = (x_1,\dots,x_m), Y^t = (y_1,\dots,y_n).$$

Enfin $K[x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_n]$ désigne l'anneau (commutatif ou non) des polynômes à coefficients dans K et à $n+m$ indéterminées $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n$. (On note par $+,-,\times$ les opérations de K et de $K[x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n]$. Quand aucune confusion n'est possible, le signe $\times$ sera omis.

<u>DÉFINITION 1</u>.- Deux éléments p_1 et p_2 de $K[x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n]$ seront dits équivalents si l'on peut transformer l'un en l'autre par application des propriétés des opérations de $K[x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n]$. On écrira $p_1 \equiv p_2$.

<u>DÉFINITION 2</u>.- Soit p matrices $B_1,\dots,B_p$ de $\mathcal{M}_{m,n}[K]$. On désigne par $P(B_1,\dots,B_p)$ le problème suivant : calculer à partir de $K \cup [x_1,\dots,x_m, y_1,\dots,y_n]$, p éléments $p'_1,\dots,p'_p$ de $K[x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n]$ tels que :
$p'_i \equiv X^t B_i\, y \quad i=1,\dots,p.$
(C'est le problème de l'évaluation simultanée de p formes bilinéaires en un point quelconque).

<u>DÉFINITION 3</u>.- Un algorithme de calcul du problème $P(B_1,\dots,B_p)$ est un ensemble fini d'instructions noté I et mis en bijection avec l'ensemble des entiers de 1 à card I.

La $k^{\text{ième}}$ instruction d'un tel algorithme doit avoir l'un des deux types suivants :

type 1 $\langle k \rangle \leftarrow \langle i \rangle T \langle j \rangle \quad (i<k,\ j<k)$

type 2 $\langle k \rangle \leftarrow \langle a \rangle \quad a \in K \cup \{x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n\}$

Dans une instruction de type 1, T désigne une des opérations $+,-,\times$ de K ou de $K[x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n]$. On désigne par $\langle k \rangle$ le résultat de la $k^{\text{ième}}$ instruction.

Un tel ensemble I d'instructions sera un algorithme de calcul des p polynômes $X^t B_i Y$ s'il existe p entiers $i_1, \dots, i_p$ tels que :

$$< i_k > \equiv X^t B_k Y \quad k = 1, \dots, p.$$

On note par $\mathcal{A}$ l'ensemble des algorithmes de calcul de ces p polynômes.

<u>DÉFINITION 4</u>.- Le coût d'une instruction du type 2 est considéré comme étant nul, et celui d'une instruction de type 1 est égal à 1 quand il s'agit d'une multiplication entre deux éléments dont aucun n'appartient à K (multiplication "générale") et vaut zéro dans tous les autres cas.

Le coût associé à l'algorithme $A \in \mathcal{A}$ est la somme des coûts de chacune de ses instructions : C_A désigne ce coût.

<u>DÉFINITION 5</u>.- Algorithme optimum. Coût minimum. Le coût minimum de résolution du problème $P(B_1, \dots, B_p)$ est :

$$C(B_1, \dots, B_p) = \min_{A \in \mathcal{A}} C_A .$$

Un algorithme A est dit optimum si $A^* \in \mathcal{A}$ et $C_{A^*} = \min\limits_{A \in \mathcal{A}} C_A$.
L'étude de la complexité du problème $P(B_1, \dots, B_p)$ consiste à trouver l'encadrement le plus fin possible de C_{A^*}.

2.- <u>CARACTÉRISATION DE L'ALGORITHME OPTIMUM</u> (cf. Lafon [9])

Posons $q = \min\limits_{A \in \mathcal{A}} C_A$. $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des algorithmes permettant de calculer les p polynômes $X^t B_i Y$ de $K[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$. Si $K[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$ est commutatif, on a le résultat suivant :

<u>THÉORÈME 1</u>.- Le nombre minimum de multiplications "générales" nécessaires pour calculer $X^t B_i Y$ $(i = 1, \dots, p)$ est égal au plus petit entier k tel que l'on ait :

$$B_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^i (U_1^j V_2^{jt} + U_2^j V_1^{jt}) \quad i = 1, \dots, p \;; (\lambda_j^i \in K \;;\; U_1^j, U_2^j \in K^m \;;\; V_1^j, V_2^j \in K^n)$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^j U_1^j U_2^{jt} \text{ et } \sum_{j=1} \lambda_j^i V_1^j V_2^{jt} \quad \text{matrices anti-symétriques.}$$

Dans le cas non commutatif, le résultat est plus simple (dans la suite, sauf avis contraire, on sous entend cette hypothèse).

<u>THÉORÈME 2</u>.- Si $K[x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n]$ est non commutatif, le nombre de multiplications "générales" nécessaires pour calculer $X^t B_i Y$ $(i = 1,\ldots,p)$ est égal au rang tensoriel des p matrices B_i, c'est-à-dire au plus petit entier k tel que l'on puisse écrire :

$$B_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^i U_j V_j^t \qquad i = 1,\ldots,p, \quad \lambda_j^i \in K, \quad U_j \in K^m, \quad V_j \in K^n.$$

<u>Propriétés du rang tensoriel de p matrices</u> B_i :

a) Le rang tensoriel d'une matrice est égal à son rang.

b) Le rang tensoriel de p matrices B_i ne change pas si l'on remplace une d'elles par une combinaison linéaire des autres.

Soit V l'espace vectoriel engendré par les matrices B_i. On peut parler du rang tensoriel de l'espace V (R t V est le plus petit nombre de matrices de rang un qui génèrent un espace V' contenant V).

c) Si $z_1,\ldots,z_p$ sont p nouvelles indéterminées $(Z^t = (z_1,\ldots,z_p))$, d'après ce qui précède le rang tensoriel de l'espace V est égal au rang tensoriel de la matrice $B(Z) = \sum_{i=1}^{p} z_i B_i$.

On a :

$$B(z) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^t Z U_j V_j^t \qquad \text{avec} \qquad \lambda_j^t = (\lambda_j^1,\ldots,\lambda_j^p).$$

d) Soit $F : K^m \times K^n \times K^p \to K$ la forme trilinéaire définie par :

$$F(X,Y,Z) = X^t B(Z) Y \qquad (X,Y,Z) \in K^m \times K^n \times K^n$$

on peut écrire $F(X,Y,Z) = \sum_{i,j,k} B^{i,j,k} x_i y_j z_k$ ($B^{i,j,k}$ désigne le terme i,j de la matrice B_k).

<u>THÉORÈME 2</u>.- Le rang tensoriel des p matrices B_k $(B_k(i,j) = B^{i,j,k})$ est égal au rang du tenseur $B^{i,j,k}$ de $K^m \otimes K^n \otimes K^p$.

En effet, si $B(Z) = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j^t Z U_j V_j^t$, on aura :

$$X^t B(Z) Y = \sum_{j=1}^{q} (U_j^t X)(V_j^t Y)(\lambda_j^t Z).$$

<u>Corollaire</u>.- Le rang tensoriel des p matrices B_k $(B_k(i,j) = B^{i,j,k})$, celui des m matrices B'_i $(B'_i(j,k) = B^{i,j,k})$ et des n matrices B''_j $(B''_j(i,k) = B^{i,j,k})$ est le même. Ces matrices définissent en effet la même forme trilinéaire.

3.- <u>CONSTRUCTIONS DE FORMULES OPTIMALES</u> - <u>THÉORÈMES D'OPTIMALITÉ</u>

On désigne toujours par C_{A^*} le nombre minimum de multiplications "générales" nécessaires pour évaluer $X^t B_i Y$, $i = 1,\dots,p$.

Soit k le rang tensoriel des matrices $B_1,\dots,B_p$. On a toujours (cf. Théorème 1) :

(1) $$\dim V \geqslant C_{A^*} .$$

On a également :

(1') $$\dim V \leqslant C_{A^*}.$$

Par conséquent, si $k = \dim V$, (1) et (1') montrent que l'on a :

$$C_{A^*} = \dim V.$$

<u>THÉORÈME</u> 3.- Si le rang tensoriel de l'espace V engendré par les p matrices $B_1,\dots,B_p$ est égal à sa dimension, alors on a :

$$C_{A^*} = \dim V \ (K[x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n] \text{ étant commutatif}).$$

<u>Applications du théorème 3</u> : (<u>cf. Lafon [10], Winograd [15]</u>).- Soit $\mathcal{H}_n$ (resp. $\mathcal{T}_n$) l'espace des matrices de Hankel (ou de Toeplitz) de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$.

Une matrice H de $\mathcal{H}_n$ s'écrit de la manière suivante :

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ \dots\dots & & & \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice $H(\lambda)$ suivante est de Hankel et de rang un :

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^n \\ \dots\dots & & & \\ \lambda^{n-1} & \lambda^n & \dots & \lambda^{2n-2} \end{pmatrix}$$

Comme dim $\mathcal{H}_n = 2n-1$, si le corps K possède au moins $2n-1$ éléments distincts le rang tensoriel de $\mathcal{H}_n$ sera aussi $2n-1$ puisque les $2n-1$ matrices de rang un $H(\lambda_1),\dots,H(\lambda_{2n-1})$ sont linéairement indépendantes dès que les λ_i sont tous distincts (le résultat est le même pour l'espace $\mathcal{T}_n$).

THÉORÈME 4.- Le calcul des coefficients du polynôme produit de deux polynômes de degré n nécessite au moins $2n-1$ multiplications, et on peut construire toutes les formules nécessitant exactement $2n-1$ multiplications (cf. Lafon [10]).

Posons :

$$P_1(t) = a_0 + \dots + a_n t^n \qquad P_1(t)\,,\ P_2(t)\,,\ P_3(t) \in K[t]$$

$$P_2(t) = b_0 + \dots + b_n t^n$$

$$P_3(t) = c_0 + \dots + c_{2n} t^{2n}$$

Si $P_3(t) = P_1(t) \times P_2(t)$, on peut écrire :

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i\, b_j .$$

Soit encore, en posant $A^t = (a_0,\dots,a_n)$, $B^t = (b_0,\dots,b_n)$:

$$c_k = A^t H_k B \qquad k = 0,\dots,2n.$$

$H_k \in \mathcal{H}_{n+1}$, H_k est définie en 2 par :

$$x_i = 0 \quad \forall\, i \neq k \ , \ x_k = 1.$$

L'espace engendré par ces $2n+1$ matrices $H_0,\dots,H_{2n}$ est l'espace $\mathcal{H}_{n+1}$ qui est de rang tensoriel $2n+1$ et dont on connaît la forme de toutes les bases tensorielles.

THÉORÈME 5.- Le rang tensoriel de l'espace C_n des matrices cycliques de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ est égal à sa dimension si K possède une racine $n^{\text{ième}}$ principale de l'unité.

Le produit de convolution circulaire de deux vecteurs $X^t = (x_o,\ldots,x_{n-1})$ et $Y^t = (y_o,\ldots,y_{n-1})$ peut se faire en exactement n multiplications "générales" et il n'existe qu'une formule optimale.

Soit, en effet, λ cette racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. On considère les n matrices $C_o,\ldots C_1, C_{n-1}$ suivantes :

$$C_q = \begin{pmatrix} 1 & \lambda^q & \lambda^{2q} & \ldots & \lambda^{(n-1)q} \\ \lambda^{(n-1)q} & 1 & \lambda^q & \ldots & \lambda^{(n-2)q} \\ \vdots & & & \ddots & \\ \lambda^q & \lambda^{2q} & \ldots & & 1 \end{pmatrix}$$

Les n matrices $C_o,\ldots,C_{n-1}$ sont cycliques, de rang un et linéairement indépendantes. Elles forment bien une base tensorielle de l'espace C_n.

D'autre part, soit $Z = X * Y$ le produit de convolution de X et Y : $Z^t = (z_o,\ldots,z_{n-1})$

$$z_k = x_o\, y_{(k)} + x_1\, y_{(k+1)} + \ldots + x_{n-1}\, y_{(n+k-1)} \qquad k = 0,\ldots,n-1$$
$$((k) \equiv k \bmod n).$$

Les n matrices qui définissent ces n formes bilinéaires engendrent l'espace C_n. D'où le résultat.

L'unicité provient du fait qu'il n'existe qu'une seule base tensorielle (aux coefficients multiplicatifs près). On aura la formule optimale suivante :

$$Z_k = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \lambda^{-k} \Big(\sum_{q=0}^{n-1} \lambda^{(n-q)\ell} x_q \Big) \Big(\sum_{q=0}^{n-1} \lambda^{q\ell} y_q \Big).$$

Autres exemples : L'espace S_n des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ possède une base tensorielle (base de matrices de rang un) : $(R\,t\,S_n = \frac{n(n+1)}{2})$.
De façon plus générale, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ telle que $A(i,j) = \pm A(j,i)$

est au plus de rang tensoriel égal à $\frac{n(n+1)}{2}$.

THÉORÈME 6.- Minoration du nombre de multiplications générales.

Soit $B(Z) = \sum_{i=1}^{p} z_i B_i$. Si k désigne le rang tensoriel de B(Z), on a la minoration suivante :

$$k \geqslant \max_{q<p} \left(\min_{Z'} Rt\,(B(Z')) + q\right)$$

Z' étant obtenu à partir de Z en substituant à q de ses composantes des combinaisons linéaires des $n-q$ composantes restantes. En effet, on a :

$$B(Z) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^t\, Z U_j\, V_j^t \ .$$

Il existe au moins q vecteurs λ_j linéaires indépendants (on suppose $p = \dim V$).
En annulant q des formes correspondantes $(q < p)$, on obtient :

$$B(Z') = \sum_{j=q+1}^{k} \lambda_j^t\, Z' U_j\, V_j^t$$

d'où le résultat.

Au point de vue majoration du rang tensoriel, on a le résultat évident suivant, très utile en pratique :

$$Rt(V_1 \oplus V_2) \leqslant Rt\,V_1 \oplus Rt\,V_2$$

$V_1 \oplus V_2$ désigne la somme directe de V_1 et de V_2.

Dans ce qui suit, on illustre sur le problème du produit de deux quaternions, les résultats précédents. Posons :

$$X = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \qquad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$Y = y_1 + y_2 i + y_3 j + y_4 k \qquad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \ .$$

On suppose $x_i, y_i \in R$, $i = 1,\dots,4$. Le produit de deux quaternions X et Y est le quaternion Z.

$$\begin{aligned} Z = {} & (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4) \\ & + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)i \\ & + (x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2)j \\ & + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1)k \end{aligned}$$

$$Z = j_1 + j_2 i + j_2 j + j_4 k.$$

On a donc quatre formes bilinéaires à évaluer pour calculer le quaternion Z. Les formules ci-dessus nécessitent seize multiplications générales. En fait, on peut effectuer ce calcul en huit multiplications seulement :

$$[I] = x_1y_1 \ , \ [II] = x_4y_2 \ , \ [III] = x_2y_4 \ , \ [IV] = x_3y_2$$

$$\begin{aligned} [V] &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ [VI] &= (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(y_1 + y_2 - y_3 - y_4) \\ [VII] &= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ [VIII] &= (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)(y_1 - y_2 - y_3 + y_4). \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} j_1 &= 2[I] - \tfrac{1}{4}([IV] + [VI] + [VIII]) \\ j_2 &= -2[II] + \tfrac{1}{4}([V] + [VI] - [VII] - [VIII]) \\ j_3 &= -2[III] + \tfrac{1}{4}([V] - [VI] - [VII] - [VIII]) \\ j_4 &= -2[IV] + \tfrac{1}{4}([V] - [VI] - [VII] + [VIII]). \end{aligned}$$

<u>THÉORÈME 7</u>.- Les formules précédentes sont optimales si on n'emploie pas la commutativité (cf. Howell - Lafon [8]). La formule trilinéaire à calculer est :

$$T = j_1z_1 + j_2z_2 + j_3z_3 + j_4z_4$$

$$T = \sum_{i,j,k} m_{ijk} x_i y_j z_k \ .$$

Soit :

$$A = \frac{1}{d(a)} \left| \begin{array}{cccc} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_3 & a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{array} \right| \qquad d(a) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \ .$$

Si on fait les transformations : $X \mapsto AX$, $Y \mapsto Y$, $Z \mapsto d(a)AZ$, la forme trilinéaire T reste invariante :

$$\sum_{i,j,k} m_{ijk} (Ax)_i \, Y_j \, (d(a)AZ)_k = \sum_{i,j,k} m_{ijk} \, x_i \, y_j \, z_k \ .$$

Supposons que le rang de T soit k :

$$T = \sum_{i=1}^{k} (U_j^t X)(V_j^t Y)(W_j^t Z).$$

Posons $U_1^t = (U_{11}, U_{12}, U_{13}, U_{14})$. Si on prend $(a_1 \ a_2 a_3 \ a_4) = U_1^t$, alors on aura :

$$U_1^t A = e_1$$

et donc :

$$T = (X_1 V_1^t Y W_1^t Z) + \sum_{i=2}^{k} (U_j'^t X)(V_j^t Y)(W_j'^t Z) \ .$$

De même soit :

$$B = \frac{1}{d(b)} \left| \begin{array}{cccc} b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \\ b_2 & b_1 & b_4 & -b_3 \\ b_3 & -b_4 & b_1 & b_2 \\ b_4 & b_3 & -b_2 & b_1 \end{array} \right|$$

On peut faire : $X \mapsto X$, $Y \mapsto BY$, $Z \mapsto d(B)BZ$ sans changer la forme bilinéaire T. En prenant $(b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4) = V_2^t$ on a : $V_2^t B = e_1$ et donc :

$$T = x_1 (V_1^t Y)(W_1^t Z) + (U_2'^t X) y_1 (W_j'^t Z) + \sum_{i=3}^{k} (U_j'^t X)(V_j'^t Y)(W_j''^t Z).$$

En faisant $x_1 = 0$, on obtient une nouvelle forme trilinéaire T' et $Rt(T) \geqslant 2 + Rt(T')$:

$$T' = (-x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4) z_1 + (x_3 y_4 - x_4 y_3) z_2$$

$$+ (-x_2 y_4 + x_4 y_4) z_3 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_4$$

Une matrice correspondante est :

$$M'(Z) = \begin{vmatrix} -z_1 & z_4 & -z_3 \\ -z_4 & -z_1 & z_2 \\ z_3 & -z_2 & -z_1 \end{vmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice vaut : $-z_1(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)$. Cette matrice est de rang trois si $z_1 \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème 6 avec $q = 3$ et on obtient : $R\,t\,M'(Z) \geqslant 3 + 3$. Donc $R\,t(T) \geqslant 8$.

Par des techniques analogues, on peut dénombrer l'optimalité d'autres formules :

- le produit de deux matrices 2×2 en sept multiplications est optimum (cf. Winograd [14], Hopcroft-Kerr [7]) ;
- le produit de Lie de deux matrices 2×2 $(AB - BA)$ en cinq multiplications est optimum (Lafon).

Le problème central qui reste à résoudre est celui du calcul effectif du rang d'un tenseur.

Très récemment, Gastinel [5] a pu résoudre ce problème dans le cas d'un espace engendré par deux matrices B_1 et B_2 $(B(x) = x_1 B_1 + x_2 B_2)$ et dans lequel il existe au moins une matrice régulière.

Le Théorème est le suivant :

<u>Théorème</u> (Gastinel) .- le rang tensoriel du couple A,B,A inversible, est égal à $dd(C_\alpha) + n$ pour presque toutes les valeurs de α:

$$C_\alpha = (A^{-1} B - \alpha I)(A^{-1} B).$$

$dd(C_\alpha)$ est le défaut diagonal de la matrice C_α, c'est-à-dire le nombre minimum de lignes et de colonnes qu'il faut ajouter à C_α pour le rendre diagonalisable.

Si $e_k(U)$, $e_{k+1}(U), \ldots, e_n(U)$ sont les diviseurs élémentaires de $C_\alpha - U\,I$

et Γ le plus grand indice i tel que $e_i(U)$ n'ait que des racines simples, on a :

$$dd(C_\alpha) = n - \Gamma.$$

Le cas d'un faisceau singulier reste à élucider (cas du calcul AB - BA).

* * *

RÉFÉRENCES

[1] DOBKIN A. : On the arithmetic complexity of a class of arithmetic computations. PH. Thesis Harward University 1973.

[2] DE GROOTE A.F. : On the computational complexity of quaternion multiplication. I.P.L. vol.3 N°6, p. 117-179, July 1975.

[3] DE GROOTE, FISHER, SCHÖNAGE : On quaternion multiplication, Preprint 1975.

[4] GASTINEL N. : Sur le calcul des produit de matrices, Numer. Math.17 1971, p.222-229.

[5] GASTINEL N. : Le problème de l'extension minimale diagonale d'un opérateur linéaire, Séminaire Grenoble, N° 275, 6.11.1975.

[6] FIDUCCIA : On obtaining upper bounds on the complexity of matrix multiplications, Complexity of computer computations, 1972.

[7] HOPCROFT - KERR : On minimizing the number of multiplication necessary for matrix multiplications. Siam J. Appli. Math. 20 (71) 30-35.

[8] HOWELL - LAFON : The complexity of the quaternion produit. Cornell University TR 75-245, June 1975.

[9] LAFON J.C. : Optimum computation of p bilinear forms. Journ. Linear Algebra, 10. 225 140 (1975).

[10] LAFON J.C. : Base tensorielle des matrices de Hankel. Numer. Math. 23, 349-361 (1975)

[11] STRASSEN : Gaussien elimination is not optimal. Num. Math. 23, 354-356 (1969).

[12] STRASSEN : Vermeidung von divisionen. Crelle J. fin die Reine und Angew. Mathematik.

[13] WINOGRAD : On the number of multiplications required to computer certain functions. Comm. pure Appl. Math. 23, 165-179 (1970).

[14] WINOGRAD : On multiplication of 2 X 2 matrices. Linear Algebra 4, 381-388, 1971.

[15] WINOGRAD : Some remarks on fast multiplication of polynomials. In complexity of sequential and parallel algorithm. Symposium May 1973. Edited by TRAUB, Academic Press (1977).

Jean-Claude LAFON
Mathématiques Appliquées-Informatique
Université Scientifique
et Médicale de Grenoble
B.P. 53
38041 GRENOBLE CEDEX