Geneviève Pourcin

Grassmanniennes de MacPherson

Astérisque, tome 36-37 (1976), p. 79-85
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__79_0>

GRASSMANNIENNES DE MAC PHERSON

par Geneviève POURCIN

Tout ce qui suit est extrait de ([1], ch. II, § 1 et ch. IV, § 2). Le corps de base k est supposé algébriquement clos.

I - Introduction

Soient M une variété irréductible et X un sous-schéma fermé de M. Soit $E_\bullet$ un complexe de fibrés sur M acyclique sur $M-X$

$$(E_\bullet) \qquad 0 \longrightarrow E_r \longrightarrow \cdots E_i \xrightarrow{d_i} E_{i-1} \cdots \longrightarrow E_o \longrightarrow 0$$

on note e_i le rang de E_i.

Soit $L(E_i, E_{i-1})$ le fibré des morphismes de E_i dans E_{i-1} ; il s'identifie à un ouvert du fibré en grassmanniennes

$$G_i = \mathrm{Grass}_{e_i}(E_i \oplus E_{i-1})$$

des sous-espaces de dimension e_i de $E_i \oplus E_{i-1}$ par l'application qui en chaque point m de M associe à tout élément de $L((E_i)_m, (E_{i-1})_m)$ son graphe. A tout morphisme de fibrés $f : E_i \longrightarrow E_{i-1}$ on associe donc la section $s(f)$ de G_i définie par

$$s(f)(m) = \{(v, f(v)) \mid v \in (E_i)_m\} \subset (G_i)_m \quad .$$

Soit $G = G_r \times_M \cdots \times_M G_1$; la projection $p : G \longrightarrow M$ est propre et au complexe $E_\bullet$ correspond la section $(s(d_i))_i$ de G. Pour tout $\lambda \in k$, on note s_λ la section $(s(\lambda d_i))_i$ de G ; on considère le plongement

$$\sigma : M \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow G \times \mathbb{P}^1$$

$$(m, \lambda) \longmapsto (s_\lambda(m), (1, \lambda))$$

et l'adhérence W de l'image de σ dans $G \times \mathbb{P}^1$; W est irréductible et pour tout $\lambda \in \mathbb{P}^1$ le cycle intersection

$$W_\lambda = [W].[G \times \{\lambda\}]$$

est défini ; on obtient ainsi une famille (W_λ) de cycles rationnellement équivalents sur G . On se propose d'étudier W_∞ .

Le paragraphe II donne une décomposition canonique de W_∞ dans le cas général, au paragraphe III on explicite cette décomposition dans le cas des intersections complètes.

On munit G du fibré virtuel $\xi = \sum_i (-1)^i \xi_i$ où ξ_i est le fibré canonique sur G_i .

II - Décomposition canonique de W_∞ .

LEMME 1.- Le morphisme σ se prolonge en un plongement (non fermé) de $M \times \mathbb{P}^1 - X \times \{\infty\}$ dans $G \times \mathbb{P}^1$.

Le complexe $E_\bullet$ étant exact sur $M - X$, pour tout i , $\ker d_{i|M-X}$ est un fibré et $W_{|M-X}$ est contenu dans la sous-variété fermée G_o de $G_{|M-X}$ définie par

$$G_o = \prod_i{}_M \operatorname{Grass}_{e_i}(E_i \oplus \ker d_{i-1})_{|M-X} \ .$$

Si (λ_o,λ_1) désigne les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^1$, $(\infty = (0,1))$, et si $\lambda_o \neq 0$, $\sigma(m,\lambda_o,\lambda_1)$ est l'ensemble

$$\{(z_i,z_{i-1}) \in (E_i \oplus \ker d_{i-1})_m \mid \lambda_o z_{i-1} = \lambda_1 d_i(z_i)\} \ .$$

On prolonge σ en posant

$$\sigma(m,0,1) = (\ker d_i)_m \oplus (\ker d_{i-1})_m \ .$$

THÉORÈME.- Le cycle W_∞ admet une décomposition canonique dans $Z_{\dim(M)}(G)$

$$W_\infty = Z + [M_*]$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(i) M_* est une variété irréductible, birationnellement équivalente à M par p et p induit un isomorphisme en dehors de X ,

(ii) le cycle Z est dans $p^{-1}(X)$.

Il suffit de prendre pour M_* l'adhérence de $\sigma(M - X \times \{\infty\})$ dans W_∞ et $Z = W_\infty - [M_*]$.

III - Cas des intersections complètes.

On suppose maintenant que X est localement une intersection complète dans M de codimension p et que $F = \operatorname{coker} d_1$ est un O_X-module localement libre. Soit N le fibré normal à X , N est un fibré normal sur X localement trivial de rang p .

0. Quelques rappels.

Supposons X défini dans un ouvert U de M par la suite régulière $(f_1,\ldots,f_p)$ et soit I le faisceau d'idéaux de O_U engendré par $(f_1,\ldots,f_p)$; le faisceau $\operatorname{Hom}(I/I^2, O_X)$ est isomorphe à O_X^p (i.e. le fibré normal N est trivial sur $U \cap X$). Soient $\tilde{N} = U \times \mathbb{A}^p$ et $\Lambda^\bullet \tilde{N}$ le complexe de Koszul :

$$\delta_i : \Lambda^i \tilde{N} \longrightarrow \Lambda^{i-1} \tilde{N}$$

est défini par

$$\delta_i(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_i}) = \sum_k (-1)^k f_{j_k} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{j_k} \wedge \ldots \wedge e_{j_i} \quad .$$

$\Lambda^\bullet \tilde{N}$ est une résolution de $O_{X \cap U}$ minimale au sens de ([2], IV, app. 1) .

De plus, il résulte de la définition des δ_i que

$$\operatorname{Tor}^i_{O_U}(O_X, O_X) = H_i(\Lambda^\bullet \tilde{N} \otimes_{\mathcal{O}_U} O_X) = \Lambda^i N \quad .$$

De même

$$\operatorname{Tor}^i_{O_U}(O_X, F) = \Lambda^i N \otimes_{O_X} F = H_i(E_\bullet \otimes_{U} O_X) \quad .$$

Enfin, si $F_U = (O_{X \cap U})^q$, soit $\tilde{F} = O_U^q$; la résolution minimale $\Lambda^\bullet \tilde{N} \otimes_{\mathcal{O}_U} \tilde{F}$ de F s'identifie (non canoniquement) à un facteur direct de $E_\bullet|_U$ et l'on a

$$E_\bullet|_U = E'_\bullet \oplus E''_\bullet$$

où

$$E'_\bullet = \Lambda^\bullet \tilde{N} \otimes_{\mathcal{O}_U} \tilde{F}$$

et où le complexe $E''_\bullet$ est exact sur tout U .

- Considérons $P = \mathbb{P}(N \oplus 1)$; c'est le fibré sur X obtenu en "ajoutant à chaque fibre de N des points à l'infini" ; soit H le fibré en hyperplans sur P défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \pi^*(N^\wedge \oplus 1) \longrightarrow O_P(1) \longrightarrow 0$$

où $\pi : P \longrightarrow X$ est la projection et $O_P(1)$ le fibré canonique sur P .

On a

$$\Lambda^i H \subset \Lambda^i \pi^*(N^\wedge \oplus 1) = \Lambda^i \pi^* N^\wedge \oplus \Lambda^{i-1} \pi^* N^\wedge$$

et au-dessus de N les $\Lambda^i H$ sont les graphes des différentielles du complexe de Koszul canonique $\Lambda^i \pi^* N^\wedge$ sur N . Soit alors j_1 le X-morphisme

$$j_1 : P \longrightarrow G_1 = \prod_i X \ \mathrm{Grass}_{\binom{p}{i}q}((\Lambda^i N^\wedge) \otimes F \oplus (\Lambda^{i-1} N^\wedge) \otimes F)$$

défini par

$$j_1(a) = ((\Lambda^i H)_a \otimes F_{\pi(a)}) \quad .$$

On vérifie que j_1 est un plongement.

- Les notations étant celles du théorème 1, on se propose de démontrer la proposition suivante

PROPOSITION.- (i) M_* <u>est l'éclaté de</u> M <u>suivant</u> X ,

(ii) Z <u>est l'image de</u> P <u>par un plongement</u> $j : P \longrightarrow G_X$ <u>tel que</u>

$$j^*(\xi) = \sum_i (-1)^i \Lambda^i H \otimes p^* F \quad ,$$

(iii) $Z.M_* = P_\infty$ <u>où</u> $P_\infty = \mathbb{P}(N)$ <u>est l'hyperplan à l'infini de</u> P ,

(iv) W <u>est une intersection complète dans</u> $G \times \mathbb{P}^1$.

1. <u>Définition de</u> j .

On va définir un plongement $j_2 : G_1 \longrightarrow G_X$ tel que $j = j_2 \circ j_1$ vérifie (ii).

Comme F est localement libre sur O_X , pour tout i , $\ker(d_{i|X})$ et $H_i(E. \otimes O_X) = \Lambda^i N \otimes F$ sont O_X-localement libres. On a donc un plongement fermé

$$j_2' : G_o = \prod_i {}_X \ \mathrm{Grass}_{e_i}(\ker d_{i|X} \oplus \ker d_{i-1|X}) \hookrightarrow G_{|X}$$

et les surjections $\ker d_{i|X} \longrightarrow H_i(E. \otimes O_X) = \Lambda^i N \otimes F$ définissent par image réciproque un plongement fermé

$$j_2'' : \prod_i {}_X \ \mathrm{Grass}_{\binom{p}{i}q}((\Lambda^i N) \otimes F \oplus (\Lambda^{i-1} N) \otimes F) \longrightarrow G_o \quad .$$

Il suffit alors de prendre $j_2 = j_2' \circ j_2''$. On a bien

$$j^*(\xi) = \sum_i (-1)^i \Lambda^i H \otimes p^*F \quad .$$

Il nous reste à démontrer les assertions (i) et (iii) localement.

2. Description locale du morphisme σ du paragraphe I .

On suppose maintenant les fibrés F et N triviaux ; avec les notations III.0 on a alors

$$E_\bullet = E'_\bullet \oplus E''_\bullet$$

où

$$E'_\bullet = \Lambda^\bullet \tilde{N} \otimes \tilde{F}$$

et $E''_\bullet$ est exact sur M . On construit d'abord un morphisme

$$\tilde{j} : \mathbb{P}(\tilde{N} \oplus 1) \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow G \times \mathbb{P}^1$$

tel que

$$\tilde{j}_{|X \times \{\infty\}} = j \quad .$$

Pour cela soit

$$G' = \prod_M \mathrm{Grass}_{\binom{p}{i}q} (\Lambda^i \hat{\tilde{N}} \otimes F \oplus \Lambda^{i-1} \hat{\tilde{N}} \otimes F)$$

$$G'' = \prod_{i} {}_M \mathrm{Grass}_{e_i - \binom{p}{i}q} (E''_i \oplus E''_{i-1}) \quad .$$

On a un plongement fermé de $G' \times G''$ dans G .

– D'autre part, soien : $\tilde{H}$ le fibré en hyperplans sur $\tilde{P} = \mathbb{P}(\tilde{N} \oplus 1)$ défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \tilde{H} \longrightarrow p^*(\hat{\tilde{N}} \oplus 1) \longrightarrow O_{\tilde{P}}(1) \longrightarrow 0$$

et $j_1 : \tilde{P} \longrightarrow G'$ le morphisme défini par le "complexe de Koszul" $\Lambda^\bullet \tilde{H} \otimes p^*\tilde{F}$.

– Soit $\sigma'' : M \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow G'' \times \mathbb{P}^1$ le plongement associé au complexe acyclique $E''_\bullet$ par le procédé du paragraphe I et du lemme 1 ; soit

$$j_2 : \tilde{P} \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{p \times 1} M \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sigma''} G'' \times \mathbb{P}^1$$

on pose alors $\tilde{j} = j_1 \times j_2$; au-dessus d'un point $(1,\lambda)$ de $\mathbb{P}^1$, $\tilde{j}_\lambda$ est défini par le complexe $\Lambda^\bullet \tilde{H} \otimes p^*F \oplus (E''_\bullet)_\lambda$ où $(E''_\bullet)_\lambda$ est le complexe obtenu à partir de $E''_\bullet$ en multipliant les différentielles de $E''_\bullet$ par λ .

– Soient $f : M \longrightarrow \tilde{N}$ la section définie par $(f_1,\dots,f_p)$ et

$$\hat{f} : M \times \Lambda^1 \longrightarrow \tilde{N} \times \mathbb{P}^1 \subset \tilde{P} \times \mathbb{P}^1$$

$$(m,\lambda) \longmapsto (\lambda f(m),(1,\lambda)) \quad .$$

Le morphisme $j \circ \hat{f}$ est associé aux complexes $(\Lambda^{\bullet} \tilde{N} \otimes F)_\lambda \circ (E''_{\bullet})_\lambda = (E'_{\bullet})_\lambda$ c'est donc le morphisme σ du paragraphe 1.

3. Fin de la démonstration de la proposition.

Comme $\tilde{j}$ est un plongement, il suffit d'étudier l'adhérence W de l'image de $\hat{f}$ dans $\tilde{P} \times \mathbb{P}^1 = M \times \mathbb{P}^p \times \mathbb{P}^1$. Soient $(y_0,y_1,\dots,y_p)$ un système de coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^p$; W_∞ est alors défini par les équations

$$\begin{cases} \lambda_0 y_i = \lambda_1 f_i(x) y_0 & \\ y_i f_j(x) = y_j f_i(x) & i,j = 1,\dots,p \\ \lambda_0 = 0 & \end{cases} \quad .$$

On a donc $W_\infty = M_* \cup Z$ où

M_* est l'éclaté de M suivant X ,

$Z = X \times \mathbb{P}^p = \mathbb{P}(N \oplus 1)$,

$Z \times_W M_* = X \times \mathbb{P}^{p-1} = \mathbb{P}(N)$.

4. Construction géométrique de W (donnée par A. Douady).

On suppose que X et M sont lisses et que $k = \mathbb{C}$; soit T un voisinage tubulaire de X ; T s'identifie au fibré en boules B_N du fibré normal N . Soit S_N le bord de B_N , S_N est un fibré en sphères de dimension $(2p-1)$.

La fibration de Hopf de ces sphères définit sur S_N une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont des cercles et le quotient $S_N/\mathcal{R}$ s'identifie à $\mathbb{P}(N)$.

La relation $\mathcal{R}$ étant prolongée par l'identité en dehors de S_N , $B_N/\mathcal{R}$ s'identifie à $\mathbb{P}(N \oplus 1)$ et $\mathbb{P}(N) = S_N/\mathcal{R}$ à l'hyperplan à l'infini de $\mathbb{P}(N \oplus 1)$.

D'autre part, $(M - B_N)/\mathcal{R}$ est l'éclaté M_* de M suivant X ; en effet on a remplacé X dans M par $\mathbb{P}(N)$. Finalement on a

$$M/\mathcal{R} = M_* \underset{\mathbb{P}(N)}{\sqcup} \mathbb{P}(N \oplus 1)$$
$$= W_\infty \ .$$

---

1 BAUM-FULTON-Mac PHERSON - "Riemann-Roch for singular varieties".

2 SERRE - "Algèbre locale et multiplicités".