DANIEL ALIBERT

Lemme de déplacement de Chow

Astérisque, tome 36-37 (1976), p. 21-34
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__36-37__21_0>

LEMME DE DÉPLACEMENT DE CHOW

par Daniel ALIBERT

§ 0. Cycles. Intersection de cycles.

Ce paragraphe rappelle les définitions utilisées dans le reste du texte.

0.1. DÉFINITION.- Soit X un schéma noéthérien irréductible. On appelle cycle de X un élément du groupe abélien libre engendré par les fermés irréductibles de X : $Z_\bullet(X)$.

Ce groupe est gradué par la dimension :

$$Z_\bullet(X) = \bigoplus_k Z_k(X) \quad .$$

0.2. DÉFINITION.- Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, tel que $\dim(\operatorname{supp} \mathcal{F}) \leqslant k$.

On pose

$$Z_k(\mathcal{F}) = \Sigma\, (\mathcal{F}_{\eta_i}) \{ \bar{\eta}_i \} \quad ,$$

la somme étant prise sur les points génériques η_i du support de $\mathcal{F}$ tels que $\dim\{\overline{Y}_i\} = k$. On a donc

$$Z_k(\mathcal{F}) = 0 \iff \dim(\operatorname{supp} \mathcal{F}) < k \quad .$$

0.3.- Soit X un schéma intègre, algébrique sur un corps. Soient $Z = \sum_i n_i Z_i$, $Y = \sum_i m_j Y_j$ des cycles de X . On dit que Z et Y sont en bonne position si, pour tous i,j , on a les propriétés suivantes :

1°) aucune composante irréductible de $Z_i \cap Y_j$ n'èst contenue dans $\operatorname{Sing} X$;

2°) $\dim(Z_i \cap Y_j) \leqslant \dim Z_i + \dim Y_j - \dim X$.

C'est-à-dire, soit $Z_i \cap Y_j$ est vide, soit toute composante irréductible W_{ijk} de $Z_i \cap Y_j$ satisfait à :

1°) $W_{ijk} \not\subset \operatorname{sing} X$,

2°) $\dim W_{ijk} = \dim Z_i + \dim Y_j - \dim X$.

0.4.- Les données X, Z, Y étant celles de 0.3, on suppose Z et Y en bonne position. Pour tout i (resp. tout j) notons :

$$Z'_i = Z_i \cap (X - \operatorname{sing} X) \quad ,$$
$$(\text{resp. } Y'_j = Y_j \cap (X - \operatorname{sing} X)) \quad .$$

Pour toute composante irréductible W_{ijk} de $Z_i \cap Y_j$ notons de même :

$$W'_{ijk} = W_{ijk} \cap (X - \operatorname{sing} X) \quad .$$

L'ensemble W'_{ijk} est irréductible, et dense dans W_{ijk} , c'est une composante irréductible de $Z'_i \cap Y'_j$.

Définissons le produit d'intersection $Z'_i \cdot Y'_j$ par

$$Z'_i \cdot Y'_j = \sum_{l \geq 0} (-1)^l Z_{a_{ij}} (\operatorname{Tor}_l^{\mathcal{O}_{X-\operatorname{sing} X}}(\mathcal{O}_{Z'_i}, \mathcal{O}_{Y'_j})) \quad ,$$

avec

$$a_{ij} = \sup(- \dim X + \dim Z_i + \dim Y_j , 0) \quad .$$

Il existe des entiers b_{ijk} tels que :

$$Z'_i \cdot Y'_j = \sum_k b_{ijk} W'_{ijk} \quad .$$

Définissons le produit d'intersection $Z_i \cdot Y_j$ par :

$$Z_i \cdot Y_j = \sum_k b_{ijk} W_{ijk} \quad .$$

On définit alors le produit d'intersection $Z \cdot Y$ par

$$Z \cdot Y = \sum_{ij} n_i m_j (Z_i \cdot Y_j) \quad .$$

§ 1. Le lemme de Chow.

1.1. DÉFINITION.- Soient k un corps et V un schéma intègre algébrique sur k . Soient Z_1 et Z_2 des cycles de V . On dit que Z_1 et Z_2 sont rationnellement équivalents et on note

$$Z_1 \sim Z_2 \quad ,$$

s'il existe un cycle W de $V \times \mathbb{P}^1_k$ et des points rationnels x_1 et x_2 de $\mathbb{P}^1_k$ tels que :

1°) W et $V \times \{x_i\}$ sont en bonne position,

2°) $pr_1(W \cdot (V \times \{x_i\})) = Z_i$

pour $i = 1,2$.

1.2. PROPOSITION ("lemme de déplacement").- Soient k un corps, V un schéma intègre lisse et quasi-projectif sur k , Z et Y des cycles de V . Alors il existe un cycle Z' de V_1 rationnellement équivalent à Z tel que Z' et Y soient en bonne position.

De plus, on peut choisir le cycle W de $V \times \mathbb{P}^1_k$ réalisant l'équivalence de Z et Z' de telle manière que pour tout x de $\mathbb{P}^1_k$ sauf un nombre fini, W et $(V \times \{x\})$ soient en bonne position, ainsi que $pr_1(W \cdot (V \times \{x\}))$ et Y .

§ 2. <u>Le cas</u> $V = \mathbb{P}^n_k$, k <u>algébriquement clos</u>.

2.1. PROPOSITION.- <u>La proposition</u> 1.2 <u>est vraie pour</u> $V = \mathbb{P}^n_k$ <u>et</u> k <u>algébriquement clos</u>.

<u>Démonstration</u>.- Par linéarité, on peut supposer Z et Y irréductibles.

Il existe un ouvert dense de $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^n$ tel que, pour un s de cet ouvert, $s(Y)$ et Z soient en bonne position.

En effet, notons G la variété des matrices $(n+1, n+1)$ inversibles, à multiplication scalaire près. On a

$$\dim G = n^2 + 2n \quad .$$

Soit X le fermé de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times G$ dont les points fermés sont les triples (x,y,s) tels que $x = s(y)$.

Notons X_x la fibre de

$$pr_1 : X \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$$

en un point fermé x .

Notons $X_{x,y}$ la fibre de

$$pr_2 : X_x \longrightarrow \mathbb{P}^n_k$$

en un point fermé y. Cette fibre est isomorphe au sous-ensemble de G :

$$\{s \in G \mid s(y) = x\} .$$

L'équation $s(y) = x$ équivaut à un système de $(n+1)$ équations linéaires indépendantes, à $(n+1)^2 + 1$ inconnues, homogène. Il en résulte

$$\dim X_{x,y} = n^2 + n .$$

Soit alors $X' = X \cap Z \times Y \times G$. On a d'après ce qui précède

$$\dim X' = n^2 + n + \dim Z + \dim Y .$$

La fibre de

$$pr_3 : X' \longrightarrow G$$

en un point fermé s est

$$((z,y) | s(y) = z , y \in Y , z \in Z) = Z \cap s(Y) .$$

Elle est donc de dimension au moins égale à

$$\sup(\dim Z + \dim Y - n , -1) .$$

Si pour tout s de G, cette fibre est de dimension strictement supérieure à $\dim Z + \dim Y - n$, alors

$$\dim X' > n^2 + 2n + \dim Z + \dim Y - n = n^2 + n + \dim Z + \dim Y .$$

Donc il existe un ouvert non vide de G dont les points ont une fibre dans X' de dimension

$$\sup(\dim Z + \dim Y - n , -1) .$$

Pour un tel point s, $s(Y)$ et Z sont en bonne position. Choisissons une courbe rationnelle C sur $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^n_k$ joignant Id à s. Le cycle de $\mathbb{P}^n \underset{h}{\times} G$ défini par

$$W = \{(W,S) | W \in S(Y)\}$$

satisfait à l'énoncé de 2.1.

§ 3. Principe de la démonstration.

Supposons que k soit algébriquement clos, jusqu'au paragraphe 6. Les questions de rationalité seront étudiées ensuite.

Il suffit de démontrer l'énoncé suivant, pour obtenir 1.2.

3.1. LEMME.- Soit $\bar{V} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^n_k$. Soient $\bar{Z} = \sum_j n_j \bar{Z}_j$ et $\bar{Y} = \sum_i n_i \bar{Y}_i$ des cycles de $\mathbb{P}^n_k$, tels que pour tous (i,j), aucune composante irréductible de $\bar{Z}_j \cap \bar{Y}_i$ ne soit contenue dans $\mathrm{sing}(\bar{V})$. Alors il existe un cycle $\bar{Z}'$ de $\bar{V}$, rationnellement équivalent à $\bar{Z}$, tel que $\bar{Z}'$ et $\bar{Y}$ soient en bonne position.

De plus a) pour tout sous-schéma fermé F de $\bar{V}$ de codimension au moins égale à 1, tel que pour tout j, $Z_j \not\subset F$, on peut choisir $\bar{Z}'$ de telle sorte qu'aucune de ses composantes irréductibles ne soit contenue dans F.

b) Avec les notations de 1.1, on peut choisir $W \subset \bar{V} \times \mathbb{P}^1_k$ de telle sorte que pour tout point x de $\mathbb{P}^1_k$ sauf un nombre fini, W et $(\bar{V} \times \{x\})$ soient en bonne position, ainsi que $pr_1(W.(\bar{V} \times \{x\}))$ et Y, et que $pr_1(W.(\bar{V} \times \{x\}))$ satisfasse à a).

En effet, si 3.1 est démontré, on peut l'appliquer en prenant V, Z, Y comme dans 1.2, et pour $\bar{V}$, $(\bar{Z}_j)$, $(\bar{Y}_i)$ les adhérences respectives de V, (Z_j), (Y_i) dans $\mathbb{P}^n_k$. On appliquera a), b) avec $F = \bar{V} - V$. Le cycle $\bar{Z}'$ sera l'adhérence d'un Z' de V.

3.2.- On suppose donc dans la suite V projective, intègre, non nécessairement lisse.

Par définition, on pose

$$e_{Y_i}(Z_j) = \dim(Y_i \cap Z_j) - \sup(\dim Y_i + \dim Z_j - \dim V_1 - 1)$$

et

$$e_Y(Z) = \sup_{i,j} e_{Y_i}(Z_j) \quad .$$

Le produit $Y.Z$ est défini si et seulement si $e_Y(Z) = 0$.

Le lemme 3.1 sera démontré par récurrence sur $e_Y(Z)$. Il suffit pour cela de montrer :

3.3. LEMME.- Soit $V \hookrightarrow \mathbb{P}^n_k$ un sous-schéma fermé intègre. Soient Z un cycle de V irréductible, $Y = \Sigma n_i Y_i$ un cycle de V . On suppose qu'aucune composante irréductible de $Z \cap Y_i$ n'est contenue dans sing V . Soit F un fermé de V ne contenant pas Z . On suppose $e_Y(Z) > 0$.

Il existe un cycle C de $\mathbb{P}^n_k$, irréductible, contenant Z tel que

a) C et V sont en bonne position ;

b) si $C.V = Z + R$, aucune composante irréductible de R n'est contenue dans F ;

c) avec les notations de b),

$$e_Y(R) < e_Y(Z) \quad ;$$

d) si $R = \Sigma r_j R_j$, aucune composante irréductible de $R_j \cap Y_i$ n'est contenue dans sing V .

Démontrons en effet 3.1 à partir de 3.3. Par hypothèse de récurrence, il existe un cycle R' de V rationnellement équivalent à R , tel que R' et Y soient en bonne position, et les conditions a) et b) de 3.1 vérifiées.

D'après 2.1, il existe un cycle C' de $\mathbb{P}^n_k$ rationnellement équivalent à C tel que C' et V , C' et Y soient respectivement en bonne position.

Il en résulte que les composantes irréductibles des intersections $(C'.V)$ Y_i sont de bonne dimension.

Pour montrer qu'il existe un cycle D de V rationnellement équivalent à $C'.V$ tel que D et Y soient en bonne position, on utilise le lemme suivant :

3.4. LEMME.- Soient V un k-schéma intègre, F et G des fermés de $V \times \mathbb{P}^1_k$, tels que $F \subset G$ et

$$\dim F < \dim G \quad ,$$

G est irréductible,

$G \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est surjectif.

Alors l'ensemble des points x de $\mathbb{P}^1_k$ tels que

$$G \otimes K(x) \not\to F \otimes k(x) ,$$

contient un ouvert dense dans $\mathbb{P}^1_k$.

Démonstration.- Si $F \longrightarrow \mathbb{P}^1$ n'est pas surjectif, c'est clair sinon il existe un ouvert de $\mathbb{P}^1$ tel que les fibres aux points de cet ouvert, dans F et G soient de dimensions respectives $\dim F-1$ et $\dim G-1$.

On applique 3.4 à $G =$ composante irréductible de $W \cap (Y_i \times \mathbb{P}^1)$ où W est un cycle de $V \times \mathbb{P}^1$ réalisant l'équivalence rationnelle de $C.V$ et $C'.V$, et $F = G \cap (\operatorname{sing} V \times \mathbb{P}^1)$.

Il en résulte que $D - R'$ et Y sont en bonne position, et

$$D - R' \sim Z .$$

De plus, par une nouvelle application de 3.4, on voit que la condition b) de 3.1 est vérifiée.

Pour construire le cycle C , nous utiliserons la notion de joint de deux sous-variétés projectives de $\mathbb{P}^n_k$.

§ 4. Joint de deux sous-variétés de $\mathbb{P}^n_k$.

4.1. DÉFINITION.- Soient Z et L deux sous-schémas fermés intègres de $\mathbb{P}^n_k$. On appelle joint de Z et L , et on note $J(Z,L)$, l'adhérence dans $\mathbb{P}^n_k$ de la réunion des droites joignant un point fermé de Z à un point fermé de L .

4.2. Exemple.- Si Z et L sont deux sous-variétés linéaires de $\mathbb{P}^n_k$, $J(Z,L)$ est la sous-variété linéaire engendrée par Z et L .

4.3.- D'une manière générale, si Z et L sont disjointes, on a :

$$\dim(J(Z,L)) = \dim Z + \dim L + 1 \quad ,$$

et $J(Z,L)$ est irréductible.

En effet $J(Z,L)$ est l'image d'un morphisme :

$$L \times Z \times \mathbb{P}^1_k \longrightarrow \mathbb{P}^n_k \quad ,$$

donc $\dim J(Z,L) \leqslant \dim Z + \dim L + 1$, et Z et L étant disjointes, l'égalité est vérifiée.

4.4.- Si $Z = \Sigma n_i Z_i$ est un cycle de $\mathbb{P}^n_k$, on pose :

$$J(Z,L) = \Sigma n_i \, J(Z_i,L) \quad ,$$

et $J(Z,L)$ est un cycle de $\mathbb{P}^n_k$.

4.5.- Soient $Z \subset V \subset \mathbb{P}^n_k$ des sous-schémas fermés intègres. On pose $v = \dim V$. Considérons le fermé :

$$W_o \subset (Z \times V - \Delta) \times \mathrm{Grass}(n, n-v-1) \quad ,$$

dont les points fermés sont les triples

$$(x,y,L) \quad , \quad x \neq y \quad , \quad xy \cap L \neq \emptyset \quad .$$

Soit W l'adhérence de W_o dans $Z \times V \times \mathrm{Grass}(n,n-v-1)$.

4.5.1.- Si (z,z,L) est un point de W , alors

$$T_{V,z} \cap L \neq \emptyset \quad .$$

Choisissons un espace linéaire L de dimension $n-v-1$. Il détermine une injection

$$j_L : Z \times V \longrightarrow Z \times V \times \mathrm{Grass}(n,n-v-1) \quad .$$

On pose

$$H_L = pr_2(j_L^{-1}(W))$$

c'est un fermé de V .

4.6. LEMME.- <u>La situation est celle de</u> 4.5. <u>Soit</u> L <u>un point fermé de</u> $\mathrm{Grass}(n,n-v-1)$ <u>tel que</u> $L \cap V = \emptyset$. <u>Alors</u> :

1°) Il existe un ouvert non vide de Z dont les points sont réguliers

<u>sur</u> $J(L,Z)$.

2°) <u>Les sous-variétés</u> $J(Z,L)$ <u>et</u> V <u>sont en bonne position</u>.

<u>Démonstration</u>.- Considérons la projection de sommet L :

$$\mathbb{P}_k^n - L \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_k^v \quad .$$

On a

$$J(L,Z) \cap (\mathbb{P}_k^n - L) = \pi^{-1}(\pi(Z)) \quad .$$

Soit p la restriction de π à l'intersection ci-dessus. Le morphisme

$$p : J(L,Z) \cap (\mathbb{P}_k^n - L) \longrightarrow \pi(Z) \quad ,$$

est à fibres lisses, donc génériquement lisse. Comme $\pi(Z)$ est génériquement lisse sur k, $J(L,Z)$ est donc génériquement lisse sur k, et si $U \subset \pi(Z)$ est l'ouvert des points lisses de $\pi(Z)$, $p^{-1}(U)$ est lisse et coupe Z suivant un ouvert non vide. D'où 1°).

Pour le 2°), remarquons d'abord que toute composante irréductible de $J(L,Z) \cap V$ est de dimension au moins égale à

$$n - v - 1 + \dim Z + 1 + v - n = \dim Z \quad .$$

La restriction h de π à $J(L,Z) \cap V$ est affine et propre, donc finie, et

$$h^{-1}(\pi(Z)) = J(L,Z) \cap V$$

d'où

$$\dim J(L,Z) \cap V \leq \dim Z \quad ,$$

ce qui démontre le 2°).

Pour tout L, satisfaisant aux conditions de 4.6, on note :

$$J(L,Z).V = R_L + Z \quad .$$

4.7. PROPOSITION.- <u>Soient</u> $Z \subset V \subset \mathbb{P}_k^n$ <u>des sous-schémas fermés intègres de</u> $\mathbb{P}_k^n$ <u>tels que</u> $Z \not\subset \operatorname{sing} V$. <u>Il existe un ouvert dense de</u> $\operatorname{Grass}(n, n-v-1)$ <u>dont les points fermés</u> L <u>satisfont à</u> :

1°) $L \cap V = \emptyset$;

2°) $(\operatorname{supp} R_L) \subset H_L$.

Démonstration.- Il est connu que la première condition est ouverte. Supposons-la satisfaite.

Comme $Z \not\subset \operatorname{sing} V$, il existe un point x_o de Z non singulier sur V. En particulier

$$\dim T_{V,x_o} = v .$$

Il existe un ouvert de la grassmannienne considérée dont les points L satisfont à

$$(1) \qquad L \cap T_{V,x_o} = \emptyset .$$

Pour un tel L, l'ensemble des points x de Z tels que $T_{V,x} \cap L = \emptyset$, est dense dans Z, donc intersecte l'ouvert de 4.6.1°). Soit x_1 un point de l'intersection, on a :

$$(2) \qquad \dim T_{J(Z,L),x_1} \cap T_{V,x_1} \geqslant \dim Z .$$

Dans l'espace $T_{J(Z,L),x_1}$, de dimension $n - v + \dim Z$, les sous-espaces L et $T_{J(L,Z),x_1} \cap T_{V,x_1}$ sont disjoints d'après (1). Donc il y a égalité dans (2). Il en résulte que Z est de multiplicité 1 dans $J(L,Z).V$.

Soit Z' une composante de R_L. Tout point fermé de Z' n'appartenant pas à Z est dans H_L, donc $Z' \subset H_L$, ce qui démontre la proposition.

4.8. PROPOSITION.- Les notations et hypothèses sont celles de 4.7. Soit Y un sous-schéma fermé de V, irréductible. Alors

1°) $V \cap (Z \times Y - \Delta) \times \operatorname{Grass}(n, n - v - 1)$

est irréductible de dimension

$$\dim Z + \dim Y - \dim V + \dim \operatorname{Grass}(n, n - v - 1) .$$

2°) En particulier, l'un des énoncés suivants est vérifié :

a) il existe un ouvert dense de $\operatorname{Grass}(n, n - v - 1)$ dont les points fermés L satisfont à

$$V \cap (Z \times Y - \Delta) \times \{L\} = \emptyset .$$

b) $\dim Z + \dim Y - \dim V \geqslant 0$ et il existe un ouvert dense de $\operatorname{Grass}(n, n - v - 1)$ dont les points fermés L satisfont à :

$$\dim(W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \{L\}) = \dim Z + \dim Y - \dim V \ .$$

Démonstration.- Considérons la projection

$$W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \mathrm{Grass}(n, n - v - 1) \xrightarrow{q} Z \times Y - \Delta \ .$$

On a :

$$q^{-1}(z,y) = \{ L \mid L \cap zy \neq \emptyset \} \ .$$

Donc $q^{-1}(z,y)$ est irréductible de dimension $\dim \mathrm{Grass}(n, n - v - 1) - \dim V$.
D'où 1°).

Considérons la projection :

$$W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \mathrm{Grass}(n, n - v - 1) \longrightarrow \mathrm{Grass}(n, n - v - 1) \ .$$

Si elle n'est pas dominante a) est vérifié. Si elle est dominante, on a nécessairement d'après 1°) $\dim Z + \dim Y - \dim V \geqslant 0$ et b) résulte de 1°).

4.8.1. COROLLAIRE.- Soient $Z \subset V \subset \mathbb{P}^n_k$ des sous-schémas fermés irréductibles. Soit Y un fermé de V , irréductible.

On suppose Z non contenu dans $\mathrm{sing}\, V$.

1°) Il existe un ouvert dense de la Grassmannienne $\mathrm{Grass}(n, n-v-1)$ dont les points fermés L satisfont à :

a) $L \cap V = \emptyset$,

b) $\dim(R_L \cap Y) \leqslant \dim(Z \cap Y)$.

2°) Si de plus aucune composante irréductible de $Z \cap Y$ n'est contenue dans $\mathrm{sing}\, V$, on peut remplacer b) par :

$$e_Y(R_L) \leqslant \sup(e_Y(Z) - 1 , 0) \ .$$

Démonstration.- Supposons d'abord que L appartienne à l'ouvert défini en 4.7. Si a) de 4.8.2°) est vérifié, supposons que L soit également dans l'ouvert qui s'y trouve défini ; on a :

$$L \cap V = \emptyset \ ,$$

$$R_L \subset H_L \ ,$$

$$H_L \cap Y \subset Z \cap Y \ .$$

Donc 1°) est vérifié dans ce cas.

Si de plus, l'hypothèse 2°) de 4.8.1 est vérifiée, dans chaque composante irréductible I de $Y \cap Z$ choisissons un point fermé x_I régulier sur V. Si L est choisi tel que

$$L \cap T_{V,x_I} = \emptyset$$

ce qui est possible dans un ouvert dense de la grassmannienne car $\dim T_{V,x_I} = v$, alors $x_I \notin H_L$, d'après 4.5.1 ; l'énoncé de 2°) en résulte dans ce cas, puisque $\dim R_L \cap Y < \sup(\dim Z \cap Y, 0)$.

Si b) de 4.8.2°) est vérifié, supposons que L se trouve dans l'ouvert qui y est défini. On a :

$$L \cap V = \emptyset \quad ,$$

$$R_L \subset H_L \quad ,$$

$$\dim(W \cap (Z \times Y - \Delta) \times \{L\}) = \dim Z + \dim Y - \dim V \geq 0 \quad .$$

Toute composante irréductible de $R_L \cap Y$ non contenue dans $Z \cap Y$ est donc de dimension au plus égale à :

$$\dim Z + \dim Y - \dim V \quad ,$$

soit, puisque $\dim R_L = \dim Z$, toute composante irréductible de $R_L \cap Y$ non contenue dans $Z \cap Y$ est de dimension égale à :

$$\dim Z + \dim Y - \dim V \quad .$$

Le 1°) en résulte donc.

Si de plus, l'hypothèse de 2°) est satisfaite, on conclut comme ci-dessus : pour x_I point fermé d'une composante irréductible I de $Y \cap Z$, régulier sur V, on choisit L dans l'ouvert de la grassmannienne dont les points satisfont à :

$$L \cap T_{V,x_I} = \emptyset \quad ,$$

$$L \cap J(x_I, Z) = \emptyset \quad .$$

§ 5. Démonstration de 3.3.

On prend $C = J(L,Z)$ pour L choisi dans l'intersection des ouverts non vides de $\mathrm{Grass}(n, n-v-1)$ suivant :

l'ouvert 4.9.1, 1°) pour $Y = F$, ce qui assure a) et b) puisque $\dim(F \cap Z) < \dim Z$ et $\dim R_L = \dim Z$ si R_L non vide.;

l'ouvert 4.9.1, 2°) pour $Y = Y_i$ pour chaque i successivement, ce qui démontre c).

§ 6. Questions de rationalité.

La proposition 1.2 est démontrée pour k algébriquement clos.

Supposons k non algébriquement clos. Si k est infini, il existe dans l'ouvert de $\mathrm{Grass}(n, n-v-1)$ sur une cloture algébrique $\bar{k}$ de k , un point L à coordonnées dans k , donc la construction effectuée ci-dessus démontre également 1.2 dans ce cas.

Si k est fini, on obtient aussi une extension finie $k \longrightarrow k_1$, un cycle $X_1 \sim Z_{k_1}$ tel que $X_1 . Y_{k_1}$ soit défini. Si $p = [k_1 : k] > 1$, on peut trouver un point L de $\mathrm{Grass}(n, n-v-1)$ rationnel sur une extension k_2 de k de degré premier à p : en effet dans tout ouvert, non vide de $\mathrm{Grass}_k(n, n-v-1)$ il y a des points à coordonnées dans

$$\{ t \in \bar{k} \mid [k(t) : k] \text{ premier à } p \} .$$

On a donc un cycle $X_2 \sim Z_{k_2}$ tel que $X_2 . Y_{k_2}$ soit défini.

Appliquant les k-automorphismes de k_1 (resp. k_2) on trouve un cycle Z'_1 tel que

$$Z'_1 \sim [k_1 : k] Z \quad ,$$
$$Z'_1 . Y \text{ défini.}$$
$$(\text{resp. } Z'_2 \sim [k_2 : k] Z \quad ,$$
$$Z'_2 . Y \text{ défini}) .$$

Il existe des entiers a et b tels que :

I-14

$$a[k_1 : k] + b[k_2 : k] = 1 \quad ,$$

donc on a :

$$Z' = aZ'_1 + bZ'_2 \sim Z \quad ,$$

$$Z'.Y \text{ défini.}$$

Ce qui démontre 1.2 dans ce cas.