

# *Astérisque*

JEAN-PAUL SPEDER

**L'équisingularité « à la Zariski » implique les conditions de Whitney**

*Astérisque*, tome 7-8 (1973), p. 41-46

<[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1973\\_\\_7-8\\_\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__7-8__41_0)>

© Société mathématique de France, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

L'EQUISINGULARITE "A LA ZARISKI"  
IMPLIQUE LES CONDITIONS DE WHITNEY.

Jean-Paul SPEDER

Nous donnons ici, en résumé, les principaux aspects de ([3]).

Soient  $X$  une hypersurface réduite d'un ouvert de  $\mathbb{C}^{N+1}$ ,  $Y$  un sous-espace lisse fermé de  $X$  de dimension pure  $p$  et  $n = N - p$  sa codimension dans  $X$ .

DEFINITION 1. - Soient  $d$  une direction de  $\mathbb{C}^{N+1}$  (i.e un élément de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^{N+1}$ ) et  $Q$  un point de  $\mathbb{C}^{N+1}$ .  
Un système linéaire de coordonnées de  $\mathbb{C}^{N+1}$  de centre  $Q : x = (x_0, \dots, x_N)$  tel que l'axe des  $x_0$  ait pour direction  $d$ , est dit système ambiant de coordonnées en  $Q$  adapté à la direction  $d$ . La projection  $\Pi_x : \mathbb{C}^{N+1} \rightarrow \mathbb{C}^N$  définie par  $\Pi_x(x_0, \dots, x_N) = (x_1, \dots, x_N)$  est dite projection associée à  $x$ .

DEFINITION 2. - Soit  $Q$  un point de  $Y$ .  
On appelle direction de projection permise pour le couple  $(X, Y)$  en  $Q$  un élément de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^{N+1}$  tel que la droite passant par  $Q$  qu'il définit, n'est incluse au voisinage de  $Q$  ni dans  $X$ , ni dans l'espace tangent à  $Y$  en  $Q$ .

DEFINITION 3. - Soient  $Q$  un point de  $Y$ ,  $d$  une direction de projection permise pour le couple  $(X, Y)$  en  $Q$ ,  $x$  un système ambiant de coordonnées en  $Q$  adapté à  $d$ ,  $P$  le polynôme distingué en  $x_0$  définissant  $X$  au voisinage de  $Q$ .  
On appelle contour apparent de  $X$  au voisinage de  $Q$  suivant la projection  $\Pi_x$  associée à  $x$ , l'hypersurface  $\Delta_x$  de  $\mathbb{C}^N$  définie par le discriminant de  $P$  (suivant  $x_0$ ).  
De même, si  $n > 0$ , l'image de  $Y$  par  $\Pi_x$  (au voisinage de  $Q$ ) est appelée le contour apparent de  $Y$  au voisinage de  $Q$  suivant  $\Pi_x$  : c'est une variété isomorphe à  $Y$ .

LEMME 1. - (O.Zariski) ([3] Lemme 2)

Plaçons nous sous les hypothèses de la définition 3 et supposons de plus que  $Y$  est inclus dans  $X_{\text{sing}}$  ( $X_{\text{sing}}$  = lieu singulier de  $X$ ) au voisinage de  $Q$ .

Si le contour apparent de  $X$  au voisinage de  $Q$  suivant  $\Pi_x$  est équimultiple en  $Q$  le long du contour apparent de  $Y$  au voisinage de  $Q$  suivant  $\Pi_x$ , alors  $X$  est équimultiple en  $Q$  le long de  $Y$  et, au voisinage de  $Q$ ,  $X \cap \Pi_x^{-1}(\Pi_x(Y)) = Y$ .

DEFINITION 4. - Soient  $Q$  un point de  $X_{\text{sing}}$  et  $\omega: \hat{X} \rightarrow X$  l'éclatement de  $X$  le long du produit de l'idéal  $I$  de  $Y$  par l'idéal jacobien  $J$  de  $X$  (C.f [2] Définition 2).

On appelle direction de projection  $\omega$ -permise pour le couple  $(X, Y)$  en  $Q$ , une direction transverse à  $X$  en  $Q$  (i.e non tangente à  $X$  en  $Q$ ) telle qu'au dessus d'un voisinage de  $Q$  dans  $\hat{X}_{\text{sing}}$ , presque tout point de  $\hat{X}$  définisse un espace tangent limite à  $X$  transverse à cette direction.

REMARQUE. Presque toute direction de  $\mathbb{C}^{N+1}$  est une direction de projection  $\omega$ -permise pour  $(X, Y)$  en  $Q$ .

DEFINITION 5. - : (C.f [6] Définition 3).

Soit  $Q$  un point de  $Y$ .

Nous dirons que  $X$  est équisingulière en  $Q$  le long de  $Y$  :

- 1) - dans le cas où  $n = 0$ , si  $Q \in X_{\text{lisse}}$  ( $X_{\text{lisse}} = X - X_{\text{sing}}$ ).
- 2) - dans le cas où  $n > 0$ , si  $Y \subset X_{\text{sing}}$  au voisinage de  $Q$  et s'il existe  $d$  : une direction de projection  $\omega$ -permise pour  $(X, Y)$  en  $Q$  et  $z = (z_0, \dots, z_N)$  un système ambiant de coordonnées en  $Q$  adapté à  $d$  pour lesquels le contour apparent de  $X$  au voisinage de  $Q$  suivant la projection  $\Pi$  associée à  $z$  est équisingulier en  $Q$  le long du contour apparent de  $Y$  au voisinage de  $Q$  suivant  $\Pi$ .

Le lemme 1 permet de montrer facilement le :

LEMME 2. - L'équisingularité est une propriété locale et ouverte qui implique l'équimultiplicité.

THEOREME I. - Si  $n > 0$  et si l'hypersurface  $X$  est équisingulière le long de  $Y$  (i.e pour tout point  $Q$  de  $Y$ ,  $X$  est équisingulière en  $Q$  le long de  $Y$ ), alors, pour tout point  $Q$  de  $Y$ , la fibre  $\omega^{-1}(Q)$  est de dimension pure = dimension  $\omega^{-1}(Y)$  - dimension  $Y = n - 1$ .

PREUVE. - Elle se fait par induction sur  $n$ .

Soit  $Q \in Y \subset X_{\text{sing}}$ .

Nous continuons de noter par  $z$  le système ambiant en  $Q$  induit par l'équisingularité de  $X$  en  $Q$  le long de  $Y$ , par  $\Pi$  sa projection associée et par  $P$  le polynôme distingué en  $z_0$  définissant  $X$  au voisinage de  $Q$ .

Le théorème I étant de nature locale,  $X$  désignera dans la suite un voisinage ouvert convenablement choisi de  $Q$  dans l'hypersurface donnée.

Considérons alors le sous-espace (réduit)  $\hat{Z}$  de  $\hat{X}$  défini par

$$\hat{Z} = \left\{ R \in \hat{X} : \left( \frac{\partial P}{\partial z_0} \circ \omega \right)_R \sigma_{\hat{X}, R} \neq J \sigma_{\hat{X}, R} \right\}$$

et notons  $Z = \omega(\hat{Z})$ .

Les espaces  $\hat{Z}$  et  $Z$  vérifient les propriétés suivantes :

\*  $\hat{Z}$  est une hypersurface de  $\hat{X}$  ou est vide.

\*\*  $\hat{Z} = \omega^{-1}(X_{\text{sing}})$  est un ouvert dense de  $\hat{Z}$  (car l'axe des  $z_0$  est transverse à presque tous les espaces tangents limites aux points de  $X_{\text{sing}}$ ) et donc  $\omega : \hat{Z} \rightarrow Z$  définit l'éclatement de  $Z$  le long de  $I \cap J \sigma_Z$  et  $Z = X_{\text{sing}}$  est dense dans  $Z$ .

\*\*\*  $\Pi(Z) \subset \Delta$  et si  $\mu : \hat{X} \rightarrow \mathbb{P}^{N+1}$  est la projection canonique de  $\hat{X}$  dans  $\mathbb{P}^{N+1}$  relative à  $(z_0, \dots, z_N)$  et  $\mathbb{P}^N$  désigne la sous-variété de  $\mathbb{P}^{N+1}$  formée des éléments dont la première composante est nulle,  $\hat{Z} = \mu^{-1}(\mathbb{P}^N)$ .  
Le raisonnement par induction sur  $n$  repose sur le :

LEMME 3. - Soit  $\omega_{\Pi} : \hat{\Delta} \rightarrow \Delta$  l'éclatement de  $\Delta$  le long du produit de l'idéal  $I_{\Pi}$  de  $\Pi(Y)$  (réduit) par l'idéal jacobien  $J_{\Pi, \Delta}$  de  $\hat{\Delta}$ .  
Il existe un morphisme à fibres finies  $\hat{\Pi} : \hat{Z} \rightarrow \hat{\Delta}$  tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{Z} & \xrightarrow{\omega} & Z \\
 \hat{\Pi} \downarrow & & \downarrow \Pi \\
 \hat{\Delta} & \xrightarrow{\omega_{\Pi}} & \Delta
 \end{array}$$

PREUVE DU LEMME 3. - Comme  $Z - X_{\text{sing}}$  est dense dans  $Z$ ,  $J \sigma_Z$  et  $J_{\Pi} \sigma_Z$

définissent le même éclatement de  $Z$ . D'autre part, comme l'axe des  $z_0$  est transverse à  $X$  en  $Q$  et  $X$  est équimultiple le long de  $Y$ , l'éclatement  $\omega_1 : X_1 \rightarrow X$  de  $X$  le long de  $I$  se factorise à travers l'éclatement  $\omega'_1 : X'_1 \rightarrow X$  de  $X$  le long de l'idéal  $I'$  induit par l'idéal de  $\Pi(Y)$  dans  $\mathbb{C}^N$ , à l'aide d'un morphisme à fibres finies  $\zeta_1 : X_1 \rightarrow X'_1$ .

Ainsi, si l'on note  $\omega' : \hat{Z}' \rightarrow Z$  l'éclatement de  $Z$  le long de  $I' \cap J \sigma_Z$  ( $I' \cap J \sigma_Z = I_{\Pi} \cap J \sigma_Z$ ), il existe deux morphismes à fibres finies  $\zeta : \hat{Z} \rightarrow \hat{Z}'$  et  $\hat{\Pi}' : \hat{Z}' \rightarrow \hat{\Delta}$  tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \hat{Z} & & \\
 & \swarrow \zeta & & \searrow \omega & \\
 \hat{Z}' & & & & Z \\
 \hat{\Pi}' \downarrow & \xrightarrow{\omega'} & & \downarrow \Pi & \\
 \hat{\Delta} & & & & \Delta \\
 & \xrightarrow{\omega_{\Pi}} & & &
 \end{array}$$

Le morphisme  $\hat{\Pi} = \zeta \circ \hat{\Pi}'$  est alors solution du lemme 3.

Pour finir la démonstration du théorème I, considérons alors une composante irréductible  $T$  de  $\omega^{-1}(Q)$  (réduit) et montrons que  $\dim T \leq n - 1$ .

Si  $\hat{Z} \cap T = \emptyset$  (c'est le cas si  $n = 1$ ) la preuve est triviale.

Si  $\hat{Z} \cap T \neq \emptyset$ , notons  $k = \dim \mu(T)$  et considérons le morphisme :

$$\mu : \hat{Z} \cap T \longrightarrow \mu(T) \cap \mathbb{P}\mathbb{C}^N.$$

La dimension de  $\mu(T) \cap \mathbb{P}\mathbb{C}^N$  est  $\geq k - 1$  en tout point. D'après le lemme 3, nous avons  $\hat{Z} \cap \omega^{-1}(Q) = \hat{\Pi}^{-1}(\omega_{\Pi}^{-1}(0))$  et, par hypothèse de récurrence,  $\omega_{\Pi}^{-1}(0)$  est de dimension pure  $n - 2$ , il en résulte que  $\hat{Z} \cap T$  est de dimension  $\leq n - 2$ . Il existe alors une fibre de  $\mu/T$  de dimension  $\leq n - k - 1$  et donc dimension  $T \leq n - 1$  C.Q.F.D.

Le théorème I est ainsi démontré

THEOREME II. - ([1]) : Si  $n > 0$  et si, pour tout point  $Q$  de  $Y$ , la fibre  $\omega^{-1}(Q)$  est de dimension pure = dimension  $\omega^{-1}(Y)$  - dimension  $Y$ , alors, le couple  $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$  vérifie les conditions de Whitney le long de  $Y$ . ([4] page 540).

Les théorèmes I et II entraînent de façon évidente le :

THEOREME III. - (c.f [5] Théorème 8.1) Si l'hypersurface  $X$  est équisingulière le long de  $Y$ , alors, le couple  $(X_{\text{lisse}} - Y, Y)$  vérifie les conditions de Whitney le long de  $Y$ .

## SPEDER

### R E F E R E N C E S

- [1] G. CANUTO - J.P. SPEDER : Un critère d'éclatement pour les conditions de Whitney.  
A paraître aux "Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa"
- [2] H. HIRONAKA : Equivalences and deformations of isolated singularities  
Woodshole seminar in algebraic geometry (1964)
- [3] J.P. SPEDER : Equisingularité et conditions de Whitney.  
A paraître à l'"American J. of Mathematics".
- [4] H. WHITNEY : Tangents to an analytic variety.  
Annals of Mathematics vol.81 (1965).
- [5] O. ZARISKI : Studies in Equisingularity II  
American J. of Mathematics vol.87 (1965)
- [6] O. ZARISKI : Some open questions in the theory of singularities.  
Bull. Amer. Math. Soc vol.77 (1971).