Astérisque

YVES GUIVARC'H
MICHAEL KEANE

Transience des marches aléatoires sur les groupes nilpotents

Astérisque, tome 4 (1973), p. 27-36
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__27_0>

TRANSIENCE DES MARCHES ALEATOIRES

SUR LES GROUPES NILPOTENTS

par

Y. GUIVARC'H et M. KEANE

Cet exposé contient une démonstration détaillée du résultat annoncé dans [1] . Pour la motivation de la démonstration, voir [2] , où le cas le plus simple est traité. La définition et les propriétés élémentaires de transience et de récurrence d'une marche aléatoire sur un groupe localement compact sont supposées connues. Pour une liste de ces propriétés, on peut regarder [3] , en particulier le théorème 1-10.

Soit G un groupe localement compact. Pour A , $B \subseteq G$ soit $[A,B]$ le sous-groupe fermé de G engendré par tous les éléments de la forme $a^{-1}b^{-1}ab$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Posons $G^o = G$ et $G^{i+1} = [G,G^i]$ pour $i \geq 0$. Alors

$$G = G^o \supseteq G^1 \supseteq G^2 \supseteq \dots$$

et le groupe G est dit <u>nilpotent</u> s'il existe un entier r avec $G^r = \{e\}$.

Soit p une probabilité sur les boréliens de G . Notons par $M\,A\,(p)$ la marche aléatoire à droite déterminée par p . La probabilité p est dite <u>apériodique</u> si le plus petit sous-groupe fermé de G qui porte p est égal à G . (C'est l'hypothèse 1-2 de [3]).

<u>Définition.</u> -

Le groupe G est <u>récurrent</u> s'il existe une probabilité p apériodique sur G , telle que $MA\,(p)$ est récurrente. Dans l'autre cas, G est dit <u>transient</u>.

La propriété de récurrence est invariante par passage au quotient.

Plus explicitement, soit H un sous-groupe distingué de G. Alors si p est apériodique sur G , son image $\overline{p}$ est apériodique sur G/H , et si $MA\,(p)$ est récurrente, alors $MA\,(\overline{p})$ est récurrente.

De plus, si H est compact et MA $(\overline{p})$ récurrente, alors MA (p) est récurrente.

Maintenant, soit G un groupe localement compact, nilpotent, et à génération compacte. Il découle de la théorie dans [5] (voir les théorèmes pp. 54 et 175) et des propriétés générales des groupes nilpotents [4] que l'ensemble

$$K = K(G) = \{ k \in G \mid \{ k^n \}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ relativement compact}$$

est un sous-groupe distingué compact de G, et $G/K(G)$ est un groupe de Lie à génération compacte pour lequel $K(G/_{K(G)}) = \{e\}$, e étant l'élément neutre de tous les groupes rencontrés dans cet exposé.

<u>Théorème</u>.-

Soit G un groupe localement compact, nilpotent et à génération compacte. Alors G est récurrent si et seulement si $G/_{K(G)}$ est abélien et récurrent, c'est à dire $G/_{K(G)}$ doit être isomorphe à un des six groupes suivants : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ ou $\{e\}$.

Avant de commencer avec la démonstration, nous démontrons quelques lemmes. Si $G/_{K(G)}$ est abélien et récurrent, G est récurrent d'après les remarques ci-dessus. Soit p alors une probabilité apériodique sur G, telle que MA (p) soit récurrente. Il faut démontrer que $G/_{K(G)}$ est abélien. Nous pouvons supposer, par passage au quotient $G/_{K(G)}$ et puis $G/_{G^2}$, que $K(G) = \{e\}$ et que $G \supsetneq G^1 \supsetneq G^2 = \{e\}$. Posons $C = G^1$. C est contenu dans le centre de G, et C est un groupe abélien de Lie sans torsion. Donc, $C \cong \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{Z}^{n'}$. Posons $\overline{G} = G/C$. $\overline{G}$ est aussi un groupe abélien de Lie sans torsion et donc aussi une somme directe des copies de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{R}$. Si la dimension de G était une, le groupe G serait abélien, et si la dimension de $\overline{G}$ était plus grande que 2, MA (p) serait transiente (voir [3]). Donc la dimension de G est 2, et par passage au quotient, on peut supposer que la dimension de C est une. Ces hypothèses sur les dimensions de C et de $\overline{G}$ ne seront pas nécessaires pour la démonstration. Posons $H = \overline{G} \oplus C$. Alors H est un groupe abélien de dimension plus grande que 2 , et chaque marche aléatoire apériodique sur un tel groupe est récurrente. Le plan de la démonstration du théorème est le suivant : en utilisant la mesure p sur G, nous construirons une probabilité q sur H . Pour chaque $n \geq 0$, nous pourrons comparer $p^n (= \underbrace{p * p * \ldots * p}_{n \text{ fois}})$ et q^n , et montrer que si $\Sigma\, q^n < \infty$, alors $\Sigma\, p^n < \infty$. Donc MA (p) est transiente si MA (q) l'est . Finalement, par construction de q, le plus petit sous-groupe fermé de H qui porte q contiendra toujours $\overline{G}$, et il sera plus grand que $\overline{G}$ (et donc de dimension au moins 3) si p n'est pas portée par une section de G sur $\overline{G}$. Le dernier lemme montrera que p^2 n'est pas portée par une telle section. Donc MA (p^2) sera transiente , et ceci implique la transience de MA (p) puisque

$$\sum_{n \geq 0} p^n = (\delta_e + p) * \sum_{n \geq 0} p^{2n} .$$

Voici la construction de la mesure q :

Soit

$$p = \int_{\overline{G}} p_{\overline{g}} \; d\overline{p}\,(\overline{g})$$

une désintégration sur $\overline{G}$ de la mesure p . Donc $\overline{p}$ est l'image de p sur $\overline{G}$, et pour chaque $\overline{g} \in \overline{G}$, $p_{\overline{g}}$ est une probabilité sur G portée par la classe $\overline{g}$, et on a la formule suivante :

$$p\,(f) = \int_{\overline{G}} p_{\overline{g}}\,(f)\; d\overline{p}\,(\overline{g})$$

pour chaque $f \geq 0$ et mesurable sur G. Une telle désintégration existe puisque les espaces G et $\overline{G}$ sont suffisamment réguliers (voir [6] , le corollaire à la fin de la section V.5).

Pour une mesure ou une fonction r sur un groupe, notons par r' l'image de r sous l'application $g \longrightarrow g^{-1}$. Posons

$$\lambda_{\overline{g}} = \frac{p'_{\overline{g}} * p_{\overline{g}} + \delta_e}{2}$$

$$q_{\overline{g}} = \delta_{\overline{g}} * \lambda_{\overline{g}}$$

$$q = \int_{\overline{G}} q_{\overline{g}} \, d\,\overline{p}\,(\overline{g}) ,$$

où, dans la deuxième formule, $\overline{g}$ dans $\delta_{\overline{g}}$ désigne l'élément $\overline{g} \oplus e$ du groupe H.

Lemme 1.-

Soient $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ des probabilités sur C ($\cong \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$) et $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction bornée à support compact. Pour chaque $1 \leq i \leq n$ posons

$$\lambda_i = \frac{\eta'_i * \eta_i + \delta_e}{2}$$

Alors, pour chaque $c \in C$,

$$\delta_c * \eta_1 * \cdots * \eta_n (\varphi' * \varphi) \leq \lambda_1 * \cdots * \lambda_n (\varphi' * \varphi) .$$

Démonstration.-

Pour une mesure μ sur C ,

$$\mu\,(\varphi' * \varphi) = \mu * \varphi * \varphi'\,(0)$$

$$= \langle \mu * \varphi , \varphi \rangle_C$$

où $< \cdot , \cdot >_C$ est le produit scalaire dans $\mathbb{L}^2(dc)$. Si "$\wedge$" dénote la transformée de Fourier, nous avons que

$$< \mu * \varphi , \varphi >_C = < \hat{\mu} \cdot \hat{\varphi} , \hat{\varphi} >_{\hat{C}} .$$

Mais

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1 + |\hat{\eta}|_i^2}{2} \geq |\hat{\eta}_i| ,$$

et donc

$$\delta_c * \eta_1 \ldots * \eta_n (\varphi' * \varphi) = \int_{\hat{C}} c(\ )\, \hat{\eta}_1(\ ) \ldots \hat{\eta}_n(\ )\, |\hat{\varphi}(\ )|^2 \, d$$

$$\leq \int_C |\hat{\eta}_1| \ldots |\hat{\eta}_n|\, |\hat{\varphi}|^2 \, d$$

$$\leq \int_C \hat{\lambda}_1 \ldots \hat{\lambda}_n \, |\hat{\varphi}|^2 \, d$$

$$= \lambda_1 * \ldots * \lambda_n (\varphi' * \varphi) .$$

Pour la comparaison des mesures p et q dans le lemme suivant, nous aurons besoin des fonctions d'une forme spéciale.

Définition.-

Une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est dite uniforme par section s'il existe une fonction $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{R}^+$ bornée à support compact et un borélien borné $\overline{B}$ de $\overline{G}$ tels que :

1) $f(g) = 0$ si $\overline{g} \notin \overline{B}$, et
2) pour chaque $\overline{g} \in \overline{B}$, il existe un $g \in G$ appartenant à la classe $\overline{g}$ tel que $f(gc) = \varphi' * \varphi\,(c)$ pour tout $c \in C$.

Autrement dit, une fonction uniforme par section est une fonction égale à une translatée de $\varphi' * \varphi$ sur les classes de $\overline{B}$ et nulle ailleurs. A chaque fonction uniforme par section il correspond une fonction $f_a : H \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$f_a (\overline{g} \oplus c) = 1_{\overline{B}} (\overline{g}) \, \varphi' * \varphi \, (c).$$

<u>Lemme 2.</u>-

Pour chaque fonction f uniforme par section et pour chaque $n \geq 0$,

$$p^n (f) \leq q^n (f_a).$$

<u>Démonstration</u>.-

On a

$$p^n = \int_{\overline{G}} \cdots \int_{\overline{G}} p_{\overline{g}_1} * \cdots * p_{\overline{g}_n} \, d\overline{p} \, (\overline{g}_1) \ldots d\overline{p} \, (\overline{g}_n)$$

et donc

$$p^n(f) = \int_{\overline{G}} \cdots \int_{\overline{G}} p_{\overline{g}_1} * \cdots * p_{\overline{g}_n} \, (f) \, d\overline{p} \, (\overline{g}_1) \ldots d\overline{p} \, (\overline{g}_n).$$

D'une façon analogue,

$$q^n (f_a) = \int_{\overline{G}} \cdots \int_{\overline{G}} q_{\overline{g}_1} * \cdots * q_{\overline{g}_n} \, (f_a) \, d\overline{p} \, (\overline{g}_1) \ldots d\overline{p} \, (\overline{g}_n)$$

Donc, il suffit de montrer que pour

$\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n \in \overline{G}$,

$$p_{\overline{g}_1} * \cdots * p_{\overline{g}_n} \, (f) \leq q_{\overline{g}_1} * \cdots * q_{\overline{g}_n} \, (f_a) .$$

Si $\overline{g}_1 \ldots \overline{g}_n \notin \overline{B}$, les deux côtés de l'inégalité sont nuls. Pour chaque $1 \leq i \leq n$ soit $g_i \in G$ un élément de la classe $\overline{g}_i$. Posons $\eta_i = \delta_{g_i^{-1}} * p_{\overline{g}_i}$. Alors η_i est une probabilité sur G portée par C^{g_i}, et

$$\frac{\eta_i' * \eta_i + \delta_e}{2} = \frac{p_{\bar{g}_i}' * p_{\bar{g}_i} + \delta_e}{2} = \lambda_{\bar{g}_i} .$$

donc si $\bar{g}_1 \dots \bar{g}_n \in \bar{B}$ il existe un $c \in C$ tel que

$$p_{\bar{g}_1} * \dots * p_{\bar{g}_n} (f) = \delta_c * \eta_1 * \dots * \eta_n (\varphi' * \varphi)$$

et en appliquant le lemme 1 on obtient

$$\delta_c * \eta_1 * \dots * \eta_n (\varphi' * \varphi) \leq \lambda_{\bar{g}_1} * \dots * \lambda_{\bar{g}_n} (\varphi' * \varphi)$$

$$= q_{\bar{g}_1} * \dots * q_{\bar{g}_n} (f_a) ,$$

ce qui démontre le lemme.

Corollaire.-

Si MA(q) est transiente, alors MA(p) est transiente.

Démonstration.-

Remarquons qu'il existe une fonction f uniforme par section plus grande que 1_K pour chaque $K \subset G$ compact, et que f_a est aussi une fonction bornée à support compact sur H. Donc

$$\sum_{n \geq 0} p^n (K) \leq \sum_{n \geq 0} p^n (f) \leq \sum_{n \geq 0} q^n (f_a) < \infty$$

et MA(p) est transiente.(Il aurait suffit de le démonstrer pour un seul compact d'intérieur non-vide).

Il peut très bien arriver que la probabilité q n'est pas apériodique sur H. Mais il est évident que le plus petit sous-groupe fermé de H portant q contient $\bar{G}$, puisque $\bar{p}$ est apériodique sur $\bar{G}$ et à cause du terme δ_e dans la définition des $\lambda_{\bar{g}}$. Donc MA (q) sera transiente sauf dans le cas où $q(\bar{G}) = 1$, c'est à dire sauf quand $\lambda_{\bar{g}} = \delta_e$ pour $\bar{p}$ - presque tout $\bar{g}$. Ceci est le cas si et seulement si $\bar{p}$ - presque tout $p_{\bar{g}}$ est portée par une section sur $\bar{G}$. Donc le lemme suivant, avec la formule avant la construction de q, termine la démonstration du théorème.

Lemme 3.-

Soit p une probabilité apériodique sur G. Alors p^2 n'est pas portée par une section sur $\bar{G}$.

Démonstration.-

Supposons le contraire. Alors il existe une section S telle que

$$1 = p^2 (S) = \int\int p_{\bar{g}_1} * p_{\bar{g}_2} (S) \, d\bar{p} (\bar{g}_1) \, d\bar{p} (\bar{g}_2).$$

Ceci implique $p_{\bar{g}_1} * p_{\bar{g}_2} (S) = 1$ $\bar{p} \times \bar{p}$ - p.s.

Donc $p_{\bar{g}_1} * p_{\bar{g}_2}$ est p.s. une mesure de Dirac et ainsi pour $p_{\bar{g}}$.

Alors p est lui aussi porté par une section. Soit $\sigma : \bar{G} \longrightarrow \bar{G}$ tel que $p_{\bar{g}} = \delta_{\sigma(\bar{g})}$ pour chaque $\bar{g} \in \bar{G}$; il résulte de la formule ci dessus que

$$\sigma (\bar{g}) \sigma (\bar{h}) = \sigma (\bar{h}) \sigma (\bar{g})$$

pour $\bar{p} \times \bar{p}$ - presque tout $(\bar{g},\bar{h}) \in \bar{G} \times \bar{G}$.

Posons pour $\bar{g} \in \bar{G}$

$$A (\bar{g}) = \{ h \in G \mid \sigma (\bar{g}) h = h \sigma (\bar{g}) \} .$$

Alors $A (\bar{g})$ est un sous groupe fermé de G et pour $\bar{p}$ - presque tout $\bar{g} \in \bar{G}$,

$$\bar{p} (\{ \bar{f} \in \bar{G} \mid \sigma (\bar{f}) \in A (\bar{g}) \}) = 1.$$

Pour la définition de $\bar{p}$, ceci entraîne

$$p (A (\bar{g})) = 1.$$

Or, p est apériodique sur G, et donc $A (\bar{g}) = G$ pour $\bar{p}$ - presque tout $\bar{g} \in \bar{G}$. Mais si $A (\bar{g}) = G$, alors $\sigma.(\bar{g})$ est dans le centre Z de G.

Donc $p(Z) = 1$ et $G = Z$. Ceci contredit le fait que G est non abélien.

LITTERATURE

[1] GUIVARC'H Y. et M. KEANE
C.R. 272, 1462-1463 - Juin 1971

[2] GUIVARC'H Y. et M. KEANE
Various Publications
Series no. 21, Aarhus, Juillet 1972

[3] LE PAGE E.
Astérisque - même volume

[4] MALCEV A.
AMS Translations - n° 39 - 1957

[5] MONTGOMERY D. et L. ZIPPIN
Tracts in Mathematics 1, Interscience New York - 1955

[6] NEVEU J.
Bases mathématiques du calcul des probabilités
Masson - 1964

Y. GUIVARC'H
M. KEANE
C.N.R.S. Equipe Associée 250
B.P. 25 A
35031 RENNES CEDEX