Astérisque

E. LE PAGE

Marches aléatoires sur les groupes localement compacts

Astérisque, tome 4 (1973), p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__1_0>

MARCHES ALEATOIRES

SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

par

E. LE PAGE

INTRODUCTION.-

Le but de cet exposé est de rappeler (souvent sans démonstration, lorsque celle-ci n'est pas utile dans la suite) les principales définitions et les principaux résultats relatifs aux marches aléatoires. Cet article sert en quelque sorte d'introduction aux suivants.

Même si les énoncés de certains théorèmes comportent des notions probabilistes, les résultats de ce recueil sont assez largement indépendants de la théorie des probabilités. On s'intéresse plutôt à l'opérateur $f \longmapsto \mu * f$ où f parcourt $L^1(\mathcal{G})$, $L^2(\mathcal{G})$ ou $C(\mathcal{G})$ ...

Soit $\mathcal{G}$ un groupe localement compact, $\underline{\underline{\mathcal{G}}}$ sa tribu borélienne.

<u>0-1 Définition.</u>-

On appelle marche aléatoire droite (resp. gauche) sur $\mathcal{G}$ toute chaîne de Markov de probabilité de transition $\varepsilon_g * \mu$ (resp. $\mu * \varepsilon_g$) pour une probabilité μ sur $\mathcal{G}$. On dira que μ est la loi de ces marches aléatoires.

Soit $\Omega = \mathcal{G}^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu borélienne. Q la mesure sur Ω produit des mesures μ sur chaque facteur. Notons pour tout g de $\mathcal{G}$ P_g la mesure image de Q par l'application $(g_1, g_2, g_3 \ldots) \longrightarrow (g, gg_1, gg_1g_2, \ldots)$ de Ω dans Ω. On note X_n la nième application coordonnée de Ω dans $\mathcal{G}$ $(\Omega, (P_g)_{g \in \mathcal{G}}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}})$ une réalisation appelée réalisation canonique de la marche aléatoire de loi μ. Elle possède la propriété suivante.

<u>0-2 Proposition.</u>-

Les variables aléatoires $Z_n = X_{n-1}^{-1} X_n$ $n \geq 1$ sont indépendantes et de loi μ pour toute probabilité P_g sur Ω.

La théorie des chaînes de Markov montre que l'étude de toute marche aléatoire droite de loi μ se ramène à l'étude de cette réalisation canonique. Dans la suite, nous supposerons que la marche aléatoire étudiée est la réalisation canonique.

§ 1 - <u>RECURRENCE ET TRANSIENCE.</u> -

Dans ce paragraphe, nous considérerons une marche aléatoire droite X de loi μ sur un groupe $\mathcal{G}$ localement compact.

On appellera T_μ le semi - groupe fermé engendré par le support de μ . La démonstration du résultat suivant est immédiate.

1-1 Lemme

$g \in T_\mu$ si et seulement si pour tout voisinage V de g il existe un entier n tel que $\mu^n(V) > 0$.

Si on appelle $\mathcal{G}_\mu$ le sous groupe fermé engendré par le support de μ c'est encore un groupe localement compact et pour tout $g \in \mathcal{G}_\mu$ on a $P_g\,[\bigcap_n (X_n \in \mathcal{G}_\mu)] = 1$. On peut donc restreindre la promenade aléatoire à $\mathcal{G}_\mu$. Dans la suite, nous ferons l'hypothèse

1-2 Le groupe $\mathcal{G}$ est engendré par le support de μ .

Nous allons maintenant définir et étudier une notion de récurrence pour les marches aléatoires.

1-3 Définition

Un élément g est dit récurrent si tout voisinage V de g est visité une infinité de fois P_e presque sûrement soit

$$P_e\,[\ \overline{\lim_{n\to+\infty}}\ \{\ X_n \in V\ \}] = 1$$

1-4 Proposition

Si l'ensemble R_μ des éléments récurrents est non vide, c'est un sous groupe fermé de $\mathcal{G}$ et on a $T_\mu = \mathcal{G} = R_\mu$

Démonstration.-

Soient $g \in R_\mu$ et $h \in T_\mu$, montrons que $h^{-1}g \in R_\mu$.

Soit U un voisinage de $h^{-1}g$; $h\,U\,g^{-1}$ est un voisinage de e , il existe donc un voisinage V de e tel que $V^{-1}V \subset h\,U\,g^{-1}$. Puisque $V\,h$ est un voisinage de $h \in T_\mu$ il existe un entier $k > 0$ (lemme 1-1) tel que $A = \{X_k \in V\,h\}$ ait une P_e probabilité positive.

Or si $\omega \in A$, la relation $X_{n+k}(\omega) \in V g$ entraîne
$$X_k^{-1}(\omega)\, X_{n+k}(\omega) \in h^{-1} V^{-1} V g \subset U$$

Comme g est récurrent pour P_e presque tout ω de A, il existe une infinité d'entiers n tels que $X_{n+k}(\omega) \in V g$, donc

$$P_e \left[\overline{\lim_n} \left(X_k^{-1} X_{n+k} \in U\right) \cap A\right] = P_e [A]$$

Comme $X_k^{-1} X_{n+k}$ a même loi que X_n et est indépendante de $A \in \sigma(X_p \; p \leq k)$ on a

$$P_e \left[\overline{\lim_n} (X_n \in U)\right] = 1$$

On a donc montré que si $R_\mu \neq \emptyset$ $T_\mu^{-1} R_\mu \subset R_\mu$

Or $R_\mu \subset T_\mu$; donc, si $R_\mu \neq \emptyset$ c'est un sous groupe de $\mathcal{G}$; en particulier, e est récurrent et $T_\mu^{-1} \subset R_\mu$ ce qui établit en tenant compte de l'hypothèse (1-2) que

$$T_\mu = R_\mu = \mathcal{G} \quad \blacksquare$$

Le noyau potentiel de la marche $G(x,.)$ est un noyau de convolution ; on a $G(x,.) = (\varepsilon_x * G)(.)$ où G désigne la mesure $G = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n$.

1-5 Proposition

Si $G(V) = +\infty$ pour tout voisinage V de e, e appartient à R_μ.

Démonstration.-

Elle est basée sur plusieurs lemmes.

1-6 Lemme

La fonction $P_A 1$, probabilité d'atteinte d'un borélien A est égale à la somme du potentiel de la probabilité de non retour en A et de la probabilité d'une infinité de visites en A.

Nous ne démontrons pas ce lemme qui est un résultat classique de la théorie du potentiel des chaînes de Markov.

Notons pour tout borélien A la probabilité de non retour en A, u_A c'est à dire

$$u_A(x) = 1_A(x) \quad P_x\left[\bigcap_{n\geq 1}(X_n \notin A)\right]$$

1-7 <u>Lemme</u>

L'hypothèse $G(V) = +\infty$ pour tout voisinage V de e implique $u_V(e) = 0$ pour tout voisinage V de e.

<u>Démonstration du lemme</u>.-

Soient V un voisinage de e et W un voisinage de e tels que $V \supset W^{-1}W$

$$u_W(x) = 1_W(x)\, P_x\left[\bigcap_{n\geq 1}(X_n) \notin W\right] = 1_W(x)\, P_x\left[\bigcap_{n\geq 1}(Z_1 Z_2\; Z_n) \notin x^{-1}W\right]$$

où $Z_k = X_{k-1}^{-1}\, X_k$ pour tout $k \geq 1$

Or, les variables aléatoires $(Z_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes et de même loi μ pour toute probabilité P_x par conséquent

$$u_W(x) = 1_W(x)\, P_e\left[\bigcap_{n\geq 1}(Z_1 Z_2 \ldots Z_n) \notin x^{-1}W\right] \geq 1_W(x)\, P_e\left[\bigcap_{n\geq 1}(Z_1 Z_2 Z_n) \notin W^{-1}W\right]$$

d'où, puisque $V \supset W^{-1}W$

$$u_W(x) \geq 1_W(x) \quad P_e\left[\bigcap_{n\geq 1}(Z_1 Z_2\; Z_n) \notin V\right]$$

c'est à dire $\quad u_W(x) \geq 1_W(x)\, u_V(e)$

En calculant le potentiel de ces deux fonctions au point e on obtient en utilisant le lemme (1-6)

$$1 = P_W(e) \geq G\, u_W(e) \geq u_V(e)\; G(W)$$

Comme $G(W) = +\infty$ on a donc $u_V(e) = 0$. ■

1-8 <u>Lemme</u>

L'hypothèse $u_V(e) = 0$ pour tout voisinage ouvert V de e implique que $u_V(x) = 0$ pour tout voisinage ouvert V de e.

Démonstration du lemme

Soit V un voisinage ouvert de e et soit $x \in V$; il existe un voisinage ouvert W de e tel que $x\, W \subset V$.

On a alors

$$u_{xW}(x) \geq u_V(x)$$

Or $u_{xW}(x) = u_W(e) = 0$

donc $u_V(x) = 0$.

D'autre part, le résultat annoncé est évident lorsque $x \notin V$. ∎

Donnons maintenant la démonstration de la proposition (1-5).

Des lemmes (1-7) et (1-8), il résulte que pour tout voisinage V de e on a

$$G\, u_V\, (e) = 0$$

et donc, d'après le lemme (1-6), on a

$$1 = P_V 1\, (e) = P_e\, [\overline{\lim_n}\, \{X_n \in V\}]$$

ce qui établit que e appartient à R_μ . ∎

1-9 Proposition :

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) il existe un voisinage V de e tel que

$G\,(V) < \infty$

b) pour tout compact K et tout $x \in G$ on a

$G\, 1_K\, (x) < \infty$

Démonstration

L'implication b) $\Longrightarrow$ a) est immédiate.

Démontrons l'implication a) $\Longrightarrow$ b)

Soit W un voisinage de e tel que $W^{-1} W \subset V$

Pour tout x de W on a

$G\, 1_W\, (x) = G\, 1_{(x^{-1}W)}\, (e) \leq G\,(V) < \infty$

et donc d'après le principe du maximum on a

$$\max_{x\in G} G\, 1_W(x) \leq G(V) < \infty$$

On en déduit le résultat annoncé en utilisant un recouvrement fini de K par des translatés de W. ■

1-10 <u>Théorème</u>

1) Les propriétés suivantes sont équivalentes

(T_1) Il existe un ouvert relativement compact I et $x \in \mathcal{G}$ tels que

$$P_x\left(\bigcup_{n\geq 0} X_n \in I\right) < 1$$

(T_2) Pour tout ouvert relativement compact I et tout $x \in \mathcal{G}$

$$P_x\left(\overline{\lim_n}\,(X_n \in I)\right) = 0$$

(T_3) Il existe un voisinage V de e tel que

$$G(V) < +\infty$$

(T_4) Pour tout ouvert relativement compact I

$$G(I) < \infty$$

2) Les propriétés suivantes sont équivalentes

(R_1) Pour tout ouvert relativement compact I et tout $x \in G$

$$P_x\left(\bigcup_{n\geq 0} X_n \in I\right) = 1$$

(R_2) Il existe un ouvert borné I et $x \in G$ tel que

$$P_x\left(\overline{\lim_n}\,(X_n \in I)\right) = 1$$

(R_3) Pour tout ouvert relativement compact I

$$G(I) = +\infty$$

(R_4) Il existe un voisinage relativement compact V de e tel que $G(V) = +\infty$

3) Une marche aléatoire possède soit les propriétés (T_i) soit les propriétés (R_i);dans le premier cas, elle est dite transiente, dans le second, elle est récurrente.

Démonstration

1) L'équivalence $(T_3) \Longleftrightarrow (T_4)$ résulte de la proposition (1-9)

L'implication $(T_4) \Longrightarrow (T_2)$ est immédiate

L'implication $(T_2) \Longrightarrow (T_1)$ résulte de l'équivalence

$(P_{(.)} [\overline{\lim_n} \{X_n \in I\}] = 1) \Longleftrightarrow (P_{(.)} (\bigcup_{n \geq 0} \{X_n \in I\}) = 1)$

Montrons que $(T_1) \Longrightarrow (T_3)$

Supposons que (T_3) ne soit pas vérifiée.

Alors, d'après les propositions (1-5) et (1-4), on a

$\mathcal{G} = T_\mu = R_\mu$

c'est à dire que $P_e (\overline{\lim_n} \{X_n \in V\}) = 1$ pour tout ouvert V (définition (1-3)), donc également

$P_x (\overline{\lim_n} \{X_n \in V\}) = 1$

pour tout x de $\mathcal{G}$ et tout ouvert V donc non (T_1)

2) Les implications $(R_1) \Longrightarrow (R_2)$ et $(R_3) \Longrightarrow (R_4)$ sont immédiates.

L'implication $(R_1) \Longrightarrow (R_4)$ est réalisée car

(non $R_4) \Longrightarrow (T_4) \Longrightarrow (T_1) \Longleftrightarrow$ (non R_1)

d'implication $(R_2) \Longrightarrow (R_3)$ résulte de

(non $R_3) \Longrightarrow (T_3) \Longrightarrow (T_2) \Longrightarrow$ (non R_2)

3) Les assertions (T_i) et (R_i) étant complémentaires, il est bien évident que l'une ou l'autre de ces situations est réalisée pour une marche aléatoire fixée. ■

(1-11) Exemples

- Si $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ et si on a $\int |x| \, d\mu(x) < \infty \int x \, d\mu(x) = 0$ la marche aléatoire associée à μ est récurrente.
- Toute marche aléatoire sur un groupe compact est récurrente.

Donnons maintenant un critère basé sur la transformation de Fourier qui permet de caractériser les marches aléatoires récurrentes sur un groupe abélien localement compact $\mathcal{G}$.

Nous noterons Γ le groupe dual de $\mathcal{G}$ et $d\gamma$ la mesure de Haar sur Γ choisie de façon à ne pas faire intervenir de coefficients dans les formules d'inversion.

(1-12) Théorème

La marche aléatoire X de loi μ est transiente si et et seulement si

$$\lim_{\substack{t \uparrow 1 \\ 0 \leq t < 1}} \int_{\Gamma} Re \frac{1}{1 - t\hat{\mu}(\gamma)} \, d\gamma < \infty$$

pour un voisinage symétrique P de l'origine dans Γ, $\hat{\mu}(\gamma) = \int \gamma(g) \, \mu(dg)$ étant la transformée de Fourier de μ.

(1-13) Définition

Un groupe $\mathcal{G}$ sera dit récurrent s'il porte au moins une promenade aléatoire récurrente.

Il est intéressant de caractériser les groupes récurrents. Donnons quelques résultats dans le cas abélien.

(1-14) Proposition

Soit $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{d_1} \oplus Z^{d_2}$

1) si $d_1 + d_2 \geq 3$ toutes les marches aléatoires sur $\mathcal{G}$ sont transientes

2) si $d_1 + d_2 \leq 2$ $\mathcal{G}$ est récurrent

La démonstration de cette proposition est faite en utilisant le critère du théorème (1-12).

(1-15) Proposition

Si K est un sous groupe distingué compact de $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ est récurrent si et seulement si $\mathcal{G}/K$ l'est.

Les propositions (1-14) (1-15) et le fait que tout groupe abélien à génération compacte soit de la forme $\mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{R}^{d_2} \oplus H$ où H est abélien compact permettent de conclure

(1-16) Théorème

Les seuls groupes abéliens récurrents à génération compacte sont de la forme $\mathbb{R}^{d_1} \oplus Z^{d_2} \oplus H$ avec $0 \leq d_1 + d_2 \leq 2$.

§ 2 THEOREMES DE RENOUVELLEMENT SUR LES GROUPES ABELIENS. -

Dans ce paragraphe, nous considérons une marche aléatoire X transiente de loi μ sur un groupe abélien localement compact $\mathcal{G}$. La mesure potentiel $G(x,.) = \varepsilon_x * \sum_{n\geq 0} \mu^n$ est donc une mesure de Radon dont nous allons étudier le comportement asymptotique quand $x \longrightarrow \Delta$ à l'infini de $\mathcal{G}$.

Nous supposerons également que $\mathcal{G}_\mu = \mathcal{G}$ et nous noterons $\mathcal{C}_K$ les fonctions continues à support compact sur $\mathcal{G}$.

(2-1) Le théorème de Choquet - Deny

(2-11) Théorème

Si μ_1 est une probabilité sur un groupe abélien localement compact $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{G}_{\mu_1} = \mathcal{G}$ ($\mathcal{G}_{\mu_1}$ désignant le plus petit sous groupe fermé engendré par le support de μ_1) toute mesure ν vérifiant les conditions

a) $\nu = \mu_1 * \nu$

b) $\{ \varepsilon_x * \nu \quad x \in \mathcal{G} \}$ est vaguement relativement compact

est un multiple de la mesure de Haar de $\mathcal{G}$.

(2-2) Marches aléatoires de type I et de type II

(2-2-1) Proposition

1) L'ensemble des mesures $\{ G(x, .) \quad x \in \mathcal{G} \}$ est relativement compact pour la topologie vague

2) La fonction $G f$ est uniformément continue pour toute $f \in \mathcal{C}_K$

Cette proposition est une conséquence immédiate du principe du maximum.

De cette proposition (2-2-1) et du lemme de Choquet - Deny, il résulte facilement que

(2-2-2) Théorème

Les seules valeurs d'adhérence possibles quand $x \longrightarrow \Delta$ de $\{\varepsilon_x * G = G(x,.) \quad x \in \mathcal{G}\}$ sont les multiples de la mesure de Haar de $\mathcal{G}$

(2-2-3) Corollaire

Pour tout compact K , et toute $f \in \mathcal{C}_K$

$$\lim_{x \to \Delta} [G f (x+y) - G f (x)] = 0$$

uniformément en $y \in K$.

(2-2-4) Lemme

On a pour toute $f \in \mathcal{C}_K^+$ $\lim_{x \to \Delta} G f(x) = 0$

(2-2-5) Lemme

On a de plus pour toute $f \in \mathcal{C}_K^+$

$\lim_{x \to \Delta} G f(x) \, G f(-x) = 0$

Ce lemme (2-2-5) est obtenu à partir du lemme (2-2-4) à l'aide du principe du maximum et du corollaire (2-2-3).

Enonçons maintenant le théorème fondamental.

(2-2-6) Théorème

L'ensemble des mesures $G(x, .)$ $x \in \mathcal{G}$ a toujours la mesure nulle pour valeur d'adhérence lorsque $x \longrightarrow \Delta$.

Il a au plus une autre valeur d'adhérence qui est de la forme $c \,.\, m_{\mathcal{G}}$ pour une constante $c > 0$ ($m_{\mathcal{G}}$ mesure de Haar de $\mathcal{G}$).

La première partie est une conséquence immédiate de (2-2-5). L'existence d'au plus deux valeurs d'adhérence résulte d'une démonstration basée sur le corollaire (2-2-3) et le lemme (2-2-5).

(2-2-7) Définition

Une marche aléatoire transiente sur un groupe abélien $\mathcal{G}$ sera dite de type I si les mesures $G(x, .)$ convergent vaguement vers 0 lorsque $x \longrightarrow \Delta$. Elle sera dite de type II s'il existe une valeur d'adhérence non nulle.

Le théorème (2-2-6) montre que toute marche aléatoire transiente est soit de type I, soit de type II, et que les marches aléatoires de type II sont telles que lorsque $x \longrightarrow \Delta$ $\{\varepsilon_x * G \quad x \in \mathcal{G}\}$ a au plus une valeur d'adhérence non nulle.

(2-3) <u>Le théorème de renouvellement pour les groupes $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Z}$.</u>

(2-3-1) Théorème

Lorsque $x \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) les mesures $G(x,o)$ convergent vaguement vers un multiple C_+m (resp. C_-m) de la mesure de Lebesgue.

1) Si $\int |x| \, d\mu(x) = +\infty$ on a $C_+ = C_- = 0$

2) Si $\int |x| \, d\mu(x) < \infty$ et $\lambda = \int x \, d\mu(x) > 0$

on a $C_- = \frac{1}{\lambda} \quad C_+ = 0$; on a des conclusions symétriques pour $\lambda < 0$.

Remarque :

On ne peut avoir $\lambda = 0$ car alors la marche aléatoire est récurrente.

Ces résultats s'étendent au cas des groupes de la forme $\mathbb{R} \oplus K$ et $\mathbb{Z} \oplus K$ où K est un groupe compact.

Soit ψ la projection canonique de $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$. Nous dirons que $x_n \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$). Si $\psi(x_n) \longrightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$).

Enfin, la mesure de Haar sur $\mathcal{G}$ sera le produit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, ou de la mesure de dénombrement sur $\mathbb{Z}$ par la probabilité de Haar sur K.

(2-3-2) Théorème

Si $\mathcal{G}$ est de la forme $\mathbb{R} \oplus K$ ou $Z \oplus K$ une marche aléatoire transiente de loi μ est de type II si et seulement si

$$\int |\psi (x)| d \mu (x) < \infty$$

Dans ce dernier cas, on a si $\lambda = \int \psi (x) d \mu (x) > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} G(x,.) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} G(x,.) = \frac{1}{\lambda} m_{\mathcal{G}}$$

au sens de la convergence vague. On a des conclusions symétriques pour $\lambda < 0$.

2-4 Le théorème de renouvellement.-

(2-4-1) Théorème

S'il existe sur $\mathcal{G}$ une marche de type II le groupe $\mathcal{G}$ est nécessairement isomorphe à $Z \oplus K$ ou $\mathbb{R} \oplus K$., où K est un groupe abélien compact. Le comportement asymptotique des mesures $G (x,.)$ lorsque $x \longrightarrow \Delta$ est alors déduit dans le théorème (2-3-2)

REFERENCES

[1] REVUZ

Cours de 3ème cycle - 1971 - Paris

[2] PORT and STONE

Potential theory of random walks on abelian groups

Acta Mathematica - 1969 - 122 : 1-2

[3] LOYNES

Products of independent random elements in a topological group

Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw Gebiete 1 (1963) 446-455

E. LE PAGE
E.R.A. n° 250 du C.N.R.S.
Université de RENNES
B.P. 25 A
35031 RENNES CEDEX