

Sur la composition de séries formelles à croissance contrôlée

AUGUSTIN MOUZE

Abstract. Let F be a holomorphic map from \mathbb{C}^s to \mathbb{C}^s defined in a neighborhood of zero such that $F(0) = 0$. If the Jacobian determinant of F is not identically zero, P. M. Eakin and G. A. Harris proved the following result: any formal power series \mathcal{A} such that $\mathcal{A} \circ F$ is analytic is itself analytic. If the Jacobian determinant of F is identically zero, they proved that the previous conclusion is no more true. J. Chaumat and A.-M. Chollet extended this result in the case of formal power series satisfying growth conditions, of Gevrey type for instance. The author gets similar results when the map F is no more holomorphic. The loss of regularity on \mathcal{A} is optimal.

Mathematics Subject Classification (2000): 13F25, 13J05, 32A05.

1. – Introduction

Ce travail a pour but l'étude de problèmes de composition dans des sous-anneaux de séries formelles définis par des conditions de croissance sur les coefficients. Ces séries apparaissent, par exemple, lorsque l'on étudie les solutions formelles d'équations différentielles à coefficients polynômiaux [8]. Plus précisément, on désigne par \mathbb{C} le corps des nombres complexes. Soit $X = (X_1, \dots, X_s)$ des indéterminées. On connaît bien $\mathbb{C}[[X]]$, l'anneau des séries formelles à coefficients dans le corps \mathbb{C} et $\mathbb{C}\{X\}$, l'anneau des séries convergentes. On a l'inclusion triviale $\mathbb{C}\{X\} \subset \mathbb{C}[[X]]$. L'idée est d'introduire une classe d'anneaux intermédiaires. Pour cela, on considère $M = \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que

$$(H_1) \quad M_0 = 1 \text{ et } \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est logarithmiquement convexe.}$$

Soit C_0 une constante strictement positive. Pour tout $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$, on écrit $\mathcal{A} = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} a_J X^J$, avec les notations habituelles $J = (j_1, \dots, j_s)$, $X^J = X_1^{j_1} \dots X_s^{j_s}$

Pervenuto alla Redazione il 18 giugno 2001 e in forma definitiva il 19 ottobre 2001.

et $|J| = j_1 + \dots + j_s$. On pose

$$\|\mathcal{A}\|_{C_0, M} = \sup_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J|=j}} \frac{|a_J|}{C_0^j M_j}.$$

Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_{C_0, M}$ est une norme sur l'espace $\mathbb{C}[[X]](M, C_0)$ défini par

$$\mathbb{C}[[X]](M, C_0) = \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]], \mathcal{A} = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} a_J X^J; \|\mathcal{A}\|_{C_0, M} < \infty \right\}.$$

On note enfin

$$\mathbb{C}[[X]](M) = \bigcup_{C_0 > 0} \mathbb{C}[[X]](M, C_0).$$

La condition (H_1) sur la suite M assure la stabilité par produit de $\mathbb{C}[[X]](M)$. C'est donc un anneau. Pour rappeler qu'il est défini par des conditions de croissance sur les coefficients, on dit que $\mathbb{C}[[X]](M)$ est un anneau de séries formelles à croissance contrôlée. On a l'inclusion $\mathbb{C}\{X\} \subset \mathbb{C}[[X]](M) \subset \mathbb{C}[[X]]$. Des exemples de tels anneaux sont donnés par les séries formelles à croissance Gevrey ($M_n = n!^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$). Si l'on a $M_n = 1$ pour tout entier n , on note $M = \mathbf{1}$ et $\mathbb{C}[[X]](\mathbf{1})$ n'est autre que $\mathbb{C}\{X\}$, l'anneau des séries convergentes. La suite M mesure, en quelque sorte, le "défaut d'analyticité" des séries de $\mathbb{C}[[X]](M)$.

La condition (H_1) équivaut à la croissance de la suite $\{M_{n+1}/M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et entraîne

$$M_j M_k \leq M_{j+k}, \text{ pour tous } j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}.$$

L'étude de $\mathbb{C}[[X]](M)$ amène, parfois, à faire des hypothèses supplémentaires sur la suite M . Ce sont les conditions classiques (H_2) et (H_3) , que l'on imposera selon les cas envisagés.

(H_2) il existe $C \geq 1$ tel que $M_{n+1} \leq C^{n+1} M_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(H_3) il existe $C \geq 1$ tel que $M_n \leq C^n M_{n-j} M_j$, pour tout $0 \leq j \leq n$.

L'hypothèse (H_2) est la condition de stabilité par dérivation. L'hypothèse (H_3) , qui implique (H_2) , est une condition dite de croissance modérée.

Il est facile de vérifier, sous l'hypothèse (H_1) , que, si $F = (F_1, \dots, F_s)$ appartient à $(\mathbb{C}[[X]](M))^s$ et \mathcal{A} appartient à $\mathbb{C}[[X]](M)$, alors $\mathcal{A} \circ F$ appartient encore à $\mathbb{C}[[X]](M)$. On obtient ainsi la stabilité par composition de l'anneau $\mathbb{C}[[X]](M)$. Ce résultat ne surprendra pas les familiers du sujet. On étudie une réciproque. Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) , on se propose d'établir une réponse, par exemple, à la question suivante : si $\mathcal{A} \circ F$ appartient à $\mathbb{C}[[X]](M)$ et si F appartient à $(\mathbb{C}[[X]](M))^s$, que peut-on dire de \mathcal{A} ? Pour cela, on est amené à supposer que le jacobien de F , noté Φ , est non nul dans $\mathbb{C}[[X]]$. En effet, P. M. Eakin et G. M. Harris (voir aussi [2]) ont obtenu le résultat suivant.

THÉORÈME 1 [5]. Soit F une application analytique de \mathbb{C}^s dans \mathbb{C}^s , définie au voisinage de 0, vérifiant $F(0) = 0$ et de jacobien Φ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) Φ est non identiquement nul ,
- (ii) pour tout $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$, si $\mathcal{A} \circ F$ est analytique, alors \mathcal{A} est analytique .

Dans le cas où F est une application analytique de \mathbb{C}^s dans \mathbb{C}^p , avec $p < s$, des théorèmes comparables ont été donnés par R. Moussu et J. C. Tougeron dans [11]. Comme le signalent P. M. Eakin et G. A. Harris, le Théorème 1 peut être vu comme une conséquence d'un théorème très général de A. M. Gabrielov [6]. J. Chaumat et A.-M. Chollet ont obtenu des résultats analogues [4] dans le cas où F est analytique et \mathcal{A} une série formelle à croissance contrôlée. De plus, les preuves de [4] permettent, dans le cas où \mathcal{A} et F sont analytiques, un contrôle du rayon de convergence de \mathcal{A} par celui de $\mathcal{A} \circ F$. Pour tout entier k , on note $M^{(k)}$ la suite $\{M_{kn}\}_{n \in \mathbb{N}}$. On a alors l'énoncé suivant.

THÉORÈME 2 [4]. Soit F une application analytique de \mathbb{C}^s dans \mathbb{C}^s , définie au voisinage de 0, vérifiant $F(0) = 0$ et de jacobien Φ . Soit M une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1) . Soit C_0 une constante strictement positive. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Φ est non identiquement nul ,
- (ii) il existe $D_0, D_0 > 0$ et d un entier, $d \geq 1$, tels que pour tout $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$, on ait $\|\mathcal{A}\|_{D_0, M^{(d)}} \leq \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M}$.

Dans ce travail, on généralise ce résultat au cas où l'application F est une application formelle à croissance contrôlée. Pour établir “(i) implique (ii)”, la méthode utilisée s'inspire des travaux de J. Chaumat et A.-M. Chollet [4] et de V. Thilliez [12]. Cependant, comme ici l'application F n'est plus analytique, on évite le recours aux formules de Cauchy, largement utilisées dans [4]. Pour établir la réciproque, on suit la démarche présentée dans [5]. On a alors le théorème suivant établi dans le Paragraphe 10.

THÉORÈME 3. Soient M et N deux suites, M vérifiant (H_1) et N vérifiant (H_1) et (H_2) . On suppose qu'il existe une constante $D \geq 1$ telle que, pour tout entier n , on ait $N_n \leq D^n M_n$. On suppose aussi que M et N vérifient l'une ou l'autre des conditions (a) ou (b) suivantes.

- (a) M vérifie (H_3) .
- (b) il existe D' et $\epsilon > 0$ tel que $N_h^{1+\epsilon} \leq D'^h M_h$ pour tout entier h .

Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application de $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ de jacobien Φ telle que $F(0) = 0$. Soit C_0 une constante strictement positive. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Φ est non nul dans $\mathbb{C}[[X]]$,
- (ii) il existe $C', C' > 0$ et d entier, $d \geq 1$, tels que pour tout $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$, on ait $\|\mathcal{A}\|_{C', M^{(d)}} \leq \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M}$.

On rappelle que la condition $N_n \leq D^n M_n$ revient à dire que l'on a $\mathbb{C}[[X]](N) \subset \mathbb{C}[[X]](M)$. On verra que les conditions (a) ou (b) n'interviennent que dans la preuve de "(i) implique (ii)".

Le Théorème 3 contient le Théorème 2. En effet, dans ce cas on a $N = \mathbf{1}$ et la condition (b) est satisfaite. Il contient aussi le Théorème 1 ; on pose $M = N = \mathbf{1}$ et (b) est vérifiée. La preuve donnée ici permet d'obtenir une estimation ponctuelle uniforme des coefficients de la série \mathcal{A} en fonctions de ceux de $\mathcal{A} \circ F$. C'est l'inégalité (5.15). Enfin, comme dans [4], de la preuve de l'implication "(i) \Rightarrow (ii)" on tire une estimation du meilleur entier d vérifiant (ii). Ce point est développé dans le Paragraphe 11 et met en évidence le lien avec les inégalités de Chevalley linéaires [2], [6].

NOTATIONS 1. Soit $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$, on écrit

$$\mathcal{A} = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} a_J X^J = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J|=j}} a_J X^J = \sum_{j \in \mathbb{N}} H_j \mathcal{A}(X)$$

où $|J|$ désigne la longueur du multi-indice J ; $H_j \mathcal{A}(X)$ n'est autre que le polynôme homogène de degré j dans le développement de \mathcal{A} . On note aussi $\text{ord}(\mathcal{A}) = \inf\{j \in \mathbb{N}; H_j \mathcal{A}(X) \neq 0\}$, l'ordre d'annulation de \mathcal{A} , avec la convention $\text{ord}(\mathcal{A}) = \infty$ si \mathcal{A} est nulle.

Soit N une suite de réels positifs vérifiant (H_1) et (H_2) .

On dira que les suites M et N sont comparables s'il existe une constante D , $D \geq 1$ telle que l'on ait soit $M_n \leq D^n N_n$, pour tout entier n , soit $N_n \leq D^n M_n$, pour tout entier n . Si deux suites M et N sont comparables, on définit la suite $\max\{M, N\}$ par :

$$\begin{aligned} \max\{M, N\}_n &= D^n N_n, \quad \text{pour tout entier } n, \text{ si } M_n \leq D^n N_n. \\ \max\{M, N\}_n &= D^n M_n, \quad \text{pour tout entier } n, \text{ sinon.} \end{aligned}$$

On considère F une application formelle notée

$$F : (X_1, \dots, X_s) \rightarrow (F_1(X_1, \dots, X_s), \dots, F_s(X_1, \dots, X_s))$$

avec, pour tout i , $1 \leq i \leq s$, $F_i(X) \in \mathbb{C}[[X]](N)$ et $F_i(0, \dots, 0) = 0$. Dans toute la suite, on note Φ le jacobien de l'application F . Dans un premier temps, on suppose que $\mu = \text{ord}(\Phi)$ est fini, c'est à dire que le jacobien de l'application

F est non nul. On note $T_{p,l}(X)$, pour $1 \leq l, p \leq s$, les cofacteurs de la matrice jacobienne de F . On appelle $v = \inf_{l,p}(\text{ord}(T_{p,l}(X)))$.

Pour $l \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, \dots, p_l) \in \{1, \dots, s\}^l$, on pose

$$D_{(p_1, \dots, p_l)} = \frac{\partial^l}{\partial X_{p_1} \dots \partial X_{p_l}}.$$

Enfin, pour tout k de \mathbb{N}^* , la sommation indexée par le k -uplet (q_1, \dots, q_k) de $\{1, \dots, s\}^k$ est représentée par $\sum_{[[q,k]]}$. On a la formule de composition suivante.

LEMME 2 [12]. *Avec les notations précédentes, on a, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et tout (p_1, \dots, p_l) de $\{1, \dots, s\}^l$,*

$$(2.1) \quad \Phi(X)^{2l-1} D_{(p_1, \dots, p_l)}(\mathcal{A}) \circ F = \sum_{k=1}^l \sum_{[[q,k]]} A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) D_{(q_1, \dots, q_k)}(\mathcal{A} \circ F),$$

où les coefficients $A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}$ sont déterminés par récurrence sur l à l'aide des relations

$$(2.2) \quad A_{(q_1)}^{(p_1)}(X) = T_{p_1, q_1}(X), \text{ pour } l = 1,$$

puis, pour $l > 1$,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} A_{(q_1)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) &= \sum_{t=1}^s \Phi(X) A_{(t)}^{(p_1)}(X) \frac{\partial A_{(q_1)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X)}{\partial X_t} \\ &\quad - (2l-3) \sum_{t=1}^s \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_t} A_{(t)}^{(p_1)}(X) A_{(q_1)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X), \end{aligned}$$

puis, pour $2 \leq k \leq l-1$,

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) &= \sum_{t=1}^s \Phi(X) A_{(t)}^{(p_1)}(X) \frac{\partial A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X)}{\partial X_t} \\ &\quad - (2l-3) \sum_{t=1}^s \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_t} A_{(t)}^{(p_1)}(X) A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X) \\ &\quad + \Phi(X) A_{(q_1)}^{(p_1)}(X) A_{(q_2, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X), \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad A_{(q_1, \dots, q_l)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) = \Phi(X) A_{(q_1)}^{(p_1)}(X) A_{(q_2, \dots, q_l)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X).$$

LEMME 3. *On a*

$$H_j(A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X)) = 0 \text{ si } j < k - \mu + l(\mu + v - 1).$$

PREUVE. Ce résultat sur l'ordre des séries formelles $A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X)$ se démontre par une simple récurrence à partir des formules du Lemme 2. \square

On note $A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) = \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s \\ |J|=j}} (a_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J X^J$. On a une estimation des coefficients $(a_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J$.

LEMME 4. *Pour tous l et k entiers avec $1 \leq k \leq l$, tous (p_1, \dots, p_l) de $\{1, \dots, s\}^l$ et (q_1, \dots, q_k) de $\{1, \dots, s\}^k$ et tout multi-indice J , on a*

$$|(a_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \leq (C_1 C_3)^l (C_2 C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}.$$

où C_3 et C_4 sont des constantes, avec $C_3 \geq 1$, $C_4 \geq 1$, ne dépendant que de s .

PREUVE. On remarque d'abord que l'expression $N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}$ a bien un sens car, d'après le Lemme 3, on a $\text{ord}(A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X)) \geq k - \mu + l(\mu + \nu - 1)$. Il suffit donc d'estimer les termes pour tous les multi-indices J de longueur $j \geq k - \mu + l(\mu + \nu - 1)$.

Pour obtenir l'estimation demandée, on raisonne là aussi par récurrence sur l . Pour $l = 1$, on a $k = 1$ et les hypothèses sur F et sur la suite N permettent d'affirmer que le jacobien Φ , $\Phi(X) = \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s \\ |J|=j}} (\phi)_J X^J$, vérifie

$$(4.1) \quad |(\phi)_J| \leq C_1 C_2^j N_{j-\mu},$$

et que $T_{p_1, q_1}(X) = \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s \\ |J|=j}} (a_{q_1}^{p_1})_J X^J$ vérifie

$$(4.2) \quad |(a_{q_1}^{p_1})_J| \leq C_1 C_2^j N_{j-\nu},$$

pour des constantes C_1 et C_2 bien choisies. On remarquera que l'hypothèse (H_2) intervient ici de manière essentielle. La récurrence est alors amorcée en tenant compte de la relation $A_{(q_1)}^{(p_1)}(X) = T_{p_1, q_1}(X)$. On suppose la propriété vérifiée au rang $l-1$, avec $l \geq 2$. On regarde alors ce qui se passe au rang l . On se convainc facilement, au vue des formules de récurrence du Lemme 2, qu'il suffit d'obtenir l'estimation pour les coefficients $(a_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J$ avec $2 \leq k \leq l-1$. On a alors, en reprenant (2.4),

$$A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) = B_1(X) + B_2(X) + B_3(X),$$

avec

$$\begin{aligned} B_1(X) &= \sum_{t=1}^s \Phi(X) A_{(t)}^{(p_1)}(X) \frac{\partial A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X)}{\partial X_t} \\ B_2(X) &= -(2l-3) \sum_{t=1}^s \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_t} A_{(t)}^{(p_1)}(X) A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X) \\ B_3(X) &= \Phi(X) A_{(q_1)}^{(p_1)}(X) A_{(q_2, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X). \end{aligned}$$

On est conduit à estimer chacun des trois termes de cette somme.

Estimation du premier terme B_1 : On note

$$(4.3) \quad \frac{\partial A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X)}{\partial X_t} = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J X^J.$$

On obtient aisément

$$(4.4) \quad |(b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \leq (j+1) |(a_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)})_{J^{(p_1)}}|.$$

avec $J^{(p_1)} = (j_1, \dots, j_{p_1-1}, j_{p_1}+1, j_{p_1+1}, \dots, j_s)$. En appliquant alors l'hypothèse de récurrence au coefficient $(a_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)})_{J^{(p_1)}}$, on obtient l'estimation

$$(4.5) \quad |(b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \leq (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu+\nu}.$$

Un terme $(c_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J$, provenant alors du produit $A_{(t)}^{(p_1)}(X) \frac{\partial A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X)}{\partial X_t}$, s'écrit

$$(4.6) \quad (c_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J = \sum_{H+I=J} (a_{(t)}^{(p_1)})_H (b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_I.$$

Et donc, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, de (4.2), (4.5) et (4.6), on a

$$(4.7) \quad \begin{aligned} & |(c_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \\ & \leq \sum_{H+I=J} C_1 C_2^h N_{h-\nu} (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+i-k} \frac{(l+i-k)!}{i!} N_{l+i-k-l(\mu+\nu)+2\mu+\nu}. \end{aligned}$$

En remarquant que, pour tout $i \leq j$, $\frac{(l+i-k)!}{i!} \leq \frac{(l+j-k)!}{j!}$, et en utilisant la convexité logarithmique de la suite N , on obtient l'estimation

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & |(c_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \\ & \leq C_1 (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu} \sum_{H+I=J} C_4^{-h}. \end{aligned}$$

En remarquant alors que $\sum_{H+I=J} C_4^{-h} \leq \sum_{h=0}^{+\infty} s^h C_4^{-h}$, on choisit C_4 suffisamment grand pour que la série $\sum_{h=0}^{+\infty} s^h C_4^{-h}$ converge. Il vient donc, si on appelle C_5 cette somme,

$$(4.9) \quad |(c_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \leq C_5 C_1 (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu}.$$

Et donc en multipliant la série obtenue par $\Phi(X)$, en sommant sur s termes et en notant $B_1(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (B_1)_J X^J$, on obtient, pour tout multi-indice J ,

$$(4.10) \quad |(B_1)_J| \leq s C_1 C_5 \sum_{H+I=J} C_1 C_2^h N_{h-\mu} (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+i-k} \frac{(l+i-k)!}{i!} N_{l+i-k-l(\mu+v)+2\mu}.$$

Et ainsi, en tenant à nouveau compte de la convexité logarithmique de la suite N et de la convergence de la série $\sum_H C_4^{-h}$, on a

$$(4.11) \quad |(B_1)_J| \leq s C_1^2 C_5^2 (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+v)+\mu}.$$

Estimation du deuxième terme B_2 : On note

$$(4.12) \quad \frac{\partial \Phi(X)}{\partial X_t} A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J X^J.$$

On obtient aisément, compte tenu de l'hypothèse de récurrence, de (4.1) et (4.12),

$$(4.13) \quad |(b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \leq \sum_{H+I=J} \left((h+1) C_1 C_2^{h+1} N_{h-\mu+1} (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l-1+i-k} \times \frac{(l-1+i-k)!}{i!} N_{l-1+i-k-l(\mu+v)+2\mu+v} \right).$$

En majorant $h+1$ par 2^h et en reprenant les idées utilisées lors de l'estimation de B_1 , on obtient l'estimation

$$(4.14) \quad |(b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \leq C_1 (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \times \frac{(l-1+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+v)+\mu+v} \sum_{H+I=J} \frac{2^h}{C_4^{h+1}}.$$

Ainsi, quitte à augmenter C_4 pour que la série $\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{2^h s^h}{C_4^{h+1}}$ converge et en notant C_6 sa somme, on a alors l'inégalité

$$(4.15) \quad |(b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \leq C_6 C_1 (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \times \frac{(l-1+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+v)+\mu+v}.$$

Et donc en multipliant par $A_{(l)}^{(p_1)}(X)$, on obtient après sommation sur s termes et multiplication par $(2l-3)$, une majoration du terme $(B_2)_J$, pour tout multi-indice J ,

$$(4.16) \quad |(B_2)_J| \leq s C_1^2 C_5 C_6 (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} (2l-3) \times \frac{(l-1+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer qu'il suffit d'estimer les termes pour $j \geq k - \mu + l(\mu + \nu - 1)$, car, d'après le Lemme 3,

$$(4.17) \quad (a_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J = 0 \text{ si } j < k - \mu + l(\mu + \nu - 1).$$

Dans ce cas, on a $j - k \geq \mu + 2\nu - 2 \geq 0$. On a donc l'inégalité triviale

$$(4.18) \quad (2l-3)(l-1+j-k)! \leq 2(l+j-k)!.$$

Et ainsi, (4.16) devient

$$(4.19) \quad |(B_2)_J| \leq 2s C_1^2 C_5 C_6 (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}.$$

Estimation du troisième terme B_3 : On note

$$(4.20) \quad A_{(q_1)}^{(p_1)}(X) A_{(q_2, \dots, q_k)}^{(p_2, \dots, p_l)}(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J X^J.$$

On obtient aisément, de la même manière,

$$(4.21) \quad |(b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \leq C_5 C_1 (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+2\mu}.$$

Et donc, en remarquant qu'une multiplication par $\Phi(X)$ se traduit par une multiplication par $C_1 C_5$ de l'estimation et une translation de $-\mu$ sur la suite N , on obtient une majoration du terme $(B_3)_J$, pour tout multi-indice J ,

$$(4.22) \quad |(B_3)_J| \leq C_1^2 C_5^2 (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu}.$$

On obtient alors en sommant les trois estimations (4.11), (4.19) et (4.22) l'inégalité

$$(4.23) \quad |(a_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| \leq (C_1 C_3)^{l-1} (C_2 C_4)^{l+j-k} \frac{(l+j-k)!}{j!} N_{l+j-k-l(\mu+\nu)+\mu+1} \times (s C_1^2 C_5^2 + 2s C_1^2 C_5 C_6 + C_1^2 C_5^2)$$

En choisissant alors la constante C_3 telle que $C_3 = C_1 C_5 ((s+1)C_5 + 2sC_6)$, la propriété est bien vérifiée au rang l . \square

On obtient alors le théorème suivant.

THÉORÈME 5. *Soit M une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1) . Soit N une suite de réels strictement positifs vérifiant (H_1) et (H_2) . On suppose que M et N sont comparables. Soit $F(X_1, \dots, X_s) = (F_1(X), \dots, F_s(X))$ dans $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ vérifiant $F(0) = 0$ et de jacobien Φ non identiquement nul. Il existe une constante C' , $C' > 0$, ne dépendant que de F , telle que pour tout \mathcal{A} de $\mathbb{C}[[X]]$ et tout $C_0 > 1$, on ait*

$$\|\mathcal{A}\|_{C' C_0^{\mu-\nu+1}, \max\{N^{(\mu-\nu+1)}, M^{(\mu-\nu+1)}\}} \leq \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M}.$$

PREUVE. D'après (2.1), on a

$$(5.1) \quad \Phi(X)^{2l-1} D_{(p_1, \dots, p_l)}(\mathcal{A}) \circ F = C_{(p_1, \dots, p_l)}(X),$$

avec

$$(5.2) \quad \begin{aligned} C_{(p_1, \dots, p_l)}(X) &= \sum_{k=1}^l \sum_{[[q, k]]} A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) D_{(q_1, \dots, q_k)}(\mathcal{A} \circ F) \\ &= \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (c^{(p_1, \dots, p_l)})_J X^J. \end{aligned}$$

On pose alors

$$(5.3) \quad A_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)}(X) D_{(q_1, \dots, q_k)}(\mathcal{A} \circ F)(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J X^J.$$

On obtient aisément, compte tenu du Lemme 4 et de l'hypothèse $\|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M} < \infty$, l'existence d'une constante C_7 telle que

$$(5.4) \quad \begin{aligned} |(b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J| &\leq \sum_{H+I=J} (C_1 C_3)^l (C_2 C_4)^{l+h-k} \frac{(l+h-k)!}{h!} \\ &\quad \times N_{l+h-k-l(\mu+\nu)+\mu} C_7 C_0^{i+k} \frac{(i+k)!}{i!} M_{i+k}. \end{aligned}$$

D'une part, d'après la convexité logarithmique des suites, on a

$$(5.5) \quad N_{l+h-k-l(\mu+\nu)+\mu} M_{i+k} \leq \max\{M, N\}_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}.$$

D'autre part, il faut remarquer que, dans la somme $\sum_{H+I=J}$, on a $h+i=j$. Or, d'après le Lemme 3, on a $h \geq k - \mu + l(\mu + \nu - 1)$. Ainsi, on a l'inégalité

$$(5.6) \quad C_0^{i+k} \leq C_0^{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}.$$

Et enfin, en utilisant, pour tout multi-indice $R = (r_1, \dots, r_s)$, avec $|R| = r$, $R! = r_1! \dots r_s!$, l'inégalité $r! \leq (2^{s-1})^r R!$ plusieurs fois, on obtient

$$(5.7) \quad \frac{(l+h-k)! (i+k)!}{h! i!} \leq 2^{i+l+h} l!.$$

Ainsi, (5.4) devient

$$(5.8) \quad \left| (b_{(q_1, \dots, q_k)}^{(p_1, \dots, p_l)})_J \right| \leq 2^{l+j} l! (C_1 C_3)^l (C_2 C_4)^{l+j-k} C_7 C_0^{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} \\ \times \max\{M, N\}_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} \sum_{H+I=J} (C_2 C_4)^{-i}.$$

La série $\sum_{H+I=J} (C_2 C_4)^{-i}$ converge ; on peut donc majorer ce terme par C_8 . On majore alors après la double sommation le nombre de termes par $2^{l_s} l!$ et on obtient l'estimation

$$(5.9) \quad \left| (c^{(p_1, \dots, p_l)})_J \right| \leq 2^{l+j} (2s)^l l! (C_1 C_3)^l (C_2 C_4)^{l+j-1} C_7 C_8 C_0^{j+\mu-l(\mu+\nu-1)} \\ \times \max\{M, N\}_{j+\mu-l(\mu+\nu-1)}.$$

On reprend la relation (5.1). On a donc

$$(5.10) \quad C_{(p_1, \dots, p_l)}(X) = \Phi(X)^{2l-1} D_{(p_1, \dots, p_l)}(\mathcal{A}) \circ F.$$

On en déduit $\text{ordre}(C_{(p_1, \dots, p_l)}(X)) \geq (2l-1)\mu$. En considérant les termes de degré $(2l-1)\mu$ dans (5.10), on a

$$(5.11) \quad H_{(2l-1)\mu}(\Phi(X)^{2l-1}) l_1! \dots l_s! a_{(l_1, \dots, l_s)} = \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J| = (2l-1)\mu}} (c^{(p_1, \dots, p_l)})_J X^J.$$

Ainsi, si on note $\Phi(X)^{2l-1} = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} (\phi^{(2l-1)})_J X^J$, on obtient, pour tout multi-indice J , avec $|J| = (2l-1)\mu$,

$$(5.12) \quad (c^{(p_1, \dots, p_l)})_J = l_1! \dots l_s! a_{(l_1, \dots, l_s)} (\phi^{(2l-1)})_J.$$

On note alors

$$\Phi(X) = \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J| \geq \mu}} (\phi)_J X^J.$$

On ordonne l'ensemble des multi-indices J de \mathbb{N}^s suivant l'ordre habituel, défini, pour $I = (i_1, \dots, i_s)$ et $J = (j_1, \dots, j_s)$, par

$$I \leq J \text{ équivaut à } |I| < |J|, \text{ ou } I = J,$$

ou $|I| = |J|$ et $\exists k$ tel que $i_l = j_l$, pour $l = 1, \dots, k-1$, et $i_k > j_k$.

Si on note (p_1, \dots, p_s) le premier multi-indice tel que $(\phi)_{(p_1, \dots, p_s)} \neq 0$, alors on a $p_1 + \dots + p_s = \mu$ et

$$(5.13) \quad (\phi^{(2l-1)})_{((2l-1)p_1, \dots, (2l-1)p_s)} = ((\phi)_{(p_1, \dots, p_s)})^{2l-1}.$$

En utilisant alors la relation

$$(5.14) \quad (c^{(p_1, \dots, p_l)})_{((2l-1)p_1, \dots, (2l-1)p_s)} = l_1! \dots l_s! a_{(l_1, \dots, l_s)} ((\phi)_{(p_1, \dots, p_s)})^{2l-1}$$

et l'estimation (5.9), on a

$$(5.15) \quad \left| (c^{(p_1, \dots, p_l)})_{((2l-1)p_1, \dots, (2l-1)p_s)} \right| \leq l!(4C_2C_4)^{-\mu} C_7C_8C_9^l C_0^{l(\mu-\nu+1)} \\ \times \max\{M, N\}_{l(\mu-\nu+1)},$$

avec $C_9 = 4^{\mu+1} s C_1 C_3 (C_2 C_4)^{2\mu+1}$. On obtient bien le résultat annoncé en majorant $\frac{l!}{l_1! \dots l_s!}$ par $(2^{s-1})^l$. \square

REMARQUE. Les constantes de l'inégalité (5.15) ne dépendent que de l'application F . La division par le coefficient constant (5.13) donne une estimation ponctuelle uniforme des coefficients de \mathcal{A} en fonction de ceux de $\mathcal{A} \circ F$. E. Bierstone a utilisé ce résultat pour démontrer un théorème sur l'extension du domaine d'une fonction sous-analytique [1].

On montre, dans la suite, que les résultats présentés dans les paragraphes précédents sont optimaux. On analyse le cas où le jacobien Φ de l'application F est nul.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS 6. Dans toute la suite, comme dans le Théorème 3 de l'introduction, on suppose que, pour tout n , on a $N_n \leq D^n M_n$. On suppose aussi que les suites M et N vérifient (H_1) et que la suite N satisfait (H_2) . On suppose, enfin, que M et N vérifient l'une ou l'autre des conditions suivantes.

- (a) M vérifie (H_3) .
 (b) il existe D' et $\epsilon > 0$ tel que $N_h^{1+\epsilon} \leq D'^h M_h$ pour tout entier h .

On peut remarquer que la condition (a) permet d'affirmer

$$(6.1) \quad \exists i > 0, \exists E > 0, \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N}^* (M_n)^{1/n} \leq E n^i.$$

Ce résultat figure dans [3], Remarque 32 b.

Soit r un réel strictement positif et $\tilde{r} = (r, \dots, r)$. On pose, pour une série formelle $\mathcal{A}(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} a_J X^J$,

$$\|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}}^{(M)} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\substack{J \in \mathbb{N}^s; \\ |J|=j}} \frac{|a_J|}{M_j} r^j.$$

Le lemme suivant donne l'équivalence entre les normes $\|\cdot\|_{C_0, M}$ et $\|\cdot\|_{\tilde{r}}^{(M)}$. On utilisera indifféremment l'un ou l'autre des points de vue.

LEMME. Soit \mathcal{A} dans $\mathbb{C}[[X]]$ telle qu'il existe $C_0 > 0$ pour lequel on ait $\|\mathcal{A}\|_{C_0, M} < \infty$. Alors pour toute constante r , vérifiant $r < 1/sC_0$, on a

$$\|\mathcal{A}\|_{r^{-1}, M} \leq \|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}}^{(M)} \leq \frac{1}{1 - sC_0r} \|\mathcal{A}\|_{C_0, M}.$$

Soient $\mathcal{A}(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} a_J X^J$, $\mathcal{B}(X) = \sum_{J \in \mathbb{N}^s} b_J X^J$ et $S(y) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j y^j$, on notera $\mathcal{A} \ll S$, lorsque, pour tout entier j , on a $\sum_{|J|=j} |a_J| \leq |s_j|$. Si les coefficients s_j sont positifs, on a alors facilement la propriété

$$(6.2) \quad \mathcal{A} \ll S, \mathcal{B} \ll S \text{ implique } \mathcal{AB} \ll S^2.$$

Enfin, on note (\mathcal{P}) la propriété

$$(\mathcal{P}) \quad (\forall P \in \mathbb{C}[X])(P \circ F = 0 \Rightarrow P = 0)$$

Les deux lemmes suivants reprennent des idées et des notations de P. M. Eakin et G. M. Harris.

LEMME 7. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et soient F_1, \dots, F_s des séries formelles de $\mathbb{C}[[X]](N)$, ne dépendant que des $s - 1$ premières variables, telles que $F = (F_1, \dots, F_s)$ vérifie \mathcal{P} . Alors il existe une suite de polynômes $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

- (i) $P_k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_s]$ est de degré k
- (ii) $\max\{|b| \text{ tel que } b \text{ est un coefficient de } P_k\} = 1$
- (iii) $\exists r_0 > 0$ tel que $\forall r < r_0, \forall e \in \mathbb{N}^* \lim_{k \rightarrow \infty} (M_{ek} \|P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = 0$.

PREUVE. Soit $P_k \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_s]$ de degré k . D'après [5], on peut choisir P_k tel que

$$(7.1) \quad \text{ord}(P_k(F_1, \dots, F_s)) \geq [C_{10}k^{s/(s-1)}],$$

pour une constante $C_{10} > 0$ bien choisie. Pour obtenir (ii), on divise P_k ainsi construit par le plus grand coefficient en valeur absolue. Par hypothèse, il existe $t_0 > 0$ et $B > 0$ tels que, pour tout $t \leq t_0$ et pour tout $l = 1, 2, \dots, s$, on ait $\|F_l\|_{\tilde{r}}^{(N)} < B$. On obtient alors facilement $F_l \ll \sum_{k=0}^{\infty} BN_k \frac{y^k}{t^k}$. Ainsi, si on note $P_k = \sum_{i=0}^k \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^s; \\ |I|=i}} p_I X^I$, on obtient, en tenant compte de (ii),

$$(7.2) \quad \forall t \leq t_0, \sum_{i=0}^k \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^s; \\ |I|=i}} p_I F_1^{i_1} \dots F_s^{i_s} \ll \sum_{i=0}^k \sum_{\substack{I \in \mathbb{N}^s; \\ |I|=i}} \left(\sum_{h=0}^{\infty} BN_h \frac{y^h}{t^h} \right)^i.$$

Or, comme $i = |I| \leq k$, on a $(\sum_{h=0}^{\infty} BN_h \frac{y^h}{t^h})^i \ll (\sum_{h=0}^{\infty} BN_h \frac{y^h}{t^h})^k$ et donc on en déduit l'inégalité

$$(7.3) \quad \forall t \leq t_0, P_k(F_1, \dots, F_s) \ll \binom{k+s}{s} \left(\sum_{h=0}^{\infty} BN_h \frac{y^h}{t^h} \right)^k.$$

On montre alors facilement par récurrence

$$(7.4) \quad \left(\sum_{h=0}^{\infty} N_h \frac{y^h}{t^h} \right)^k \ll \sum_{h=0}^{\infty} N_h \binom{h+k-1}{k-1} \frac{y^h}{t^h}.$$

Ainsi, on a donc

$$(7.5) \quad \forall t \leq t_0, P_k(F_1, \dots, F_s) \ll \binom{k+s}{s} B^k \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h+k-1}{k-1} N_h \frac{y^h}{t^h}.$$

On utilise alors (7.1) et l'inégalité $\binom{h+k-1}{k-1} \leq 2^{h+k}$ pour obtenir

$$(7.6) \quad \forall t \leq t_0, P_k(F_1, \dots, F_s) \ll 2^{s+k} 2^k B^k \sum_{h \geq [C_{10} k^{s/(s-1)}]} 2^h N_h \frac{y^h}{t^h}.$$

PREMIER CAS. La condition (a) est vérifiée.

L'inégalité (7.6) devient, par définition de la norme et en utilisant l'inégalité $N_n \leq D^n M_n$,

$$(7.7) \quad \forall t \leq t_0, \|P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)} \leq 2^s 4^k B^k \left(\frac{2Dr}{t} \right)^{[C_{10} k^{s/(s-1)}]} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2Dr)^h}{t^h}.$$

On a alors, pour tout $e \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \leq t_0$,

$$(7.8) \quad \begin{aligned} (M_{ek} \|P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} &\leq 2^{s/k} 4B (M_{ek})^{1/k} \\ &\times \left(\frac{2Dr}{t} \right)^{[C_{10} k^{1/(s-1)}]} \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(2Dr)^h}{t^h} \right)^{1/k}. \end{aligned}$$

On remarque facilement que, pour $r < t/(2D)$, la série de droite converge. On note S sa somme. On a ainsi

$$(7.9) \quad (M_{ek} \|P_k(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq (2^s S)^{1/k} 4B (M_{ek})^{1/k} \left(\frac{2Dr}{t} \right)^{[C_{10} k^{1/(s-1)}]}.$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse (H_3) . En effet, d'après (6.1), on obtient l'existence d'un entier i tel que

$$(7.10) \quad \begin{aligned} \forall e > 0, \forall t \leq t_0 (M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s) \|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \\ \leq (2^s S)^{1/k} 4B E^e (ek)^{ei} \left(\frac{2Dr}{t} \right)^{[C_{10} k^{1/(s-1)}]}. \end{aligned}$$

Il est alors facile de conclure que, pour tout $t \leq t_0$, il existe r_0 tel que, pour tout $r < \min(r_0, t/(2D))$ et pour tout $e > 0$, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} (M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s) \|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = 0$.

SECOND CAS. La condition (b) est vérifiée.

L'inégalité (7.6) devient, par définition,

$$(7.11) \quad \forall t \leq t_0, \| P_k(F_1, \dots, F_s) \|_{\tilde{r}}^{(M)} \leq 2^s 4^k B^k \sum_{h \geq [C_{10} k^{s/(s-1)}]} \frac{N_h}{M_h} \frac{(2r)^h}{t^h}.$$

On a alors, pour tout $e > 0$ et tout $t \leq t_0$,

$$(7.12) \quad (M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s) \|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq 2^{s/k} 4B \left(\sum_{h \geq [C_{10} k^{s/(s-1)}]} M_{ek} \frac{N_h}{M_h} \frac{(2r)^h}{t^h} \right)^{1/k}.$$

On utilise (b). On obtient alors

$$(7.13) \quad \begin{aligned} (M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s) \|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} &\leq 2^{s/k} 4B \frac{M_{ek}^{1/k}}{(M_{[C_{10} k^{s/(s-1)}]})^{\epsilon/k(1+\epsilon)}} \\ &\times \left(\sum_{h \geq [C_{10} k^{s/(s-1)}]} \frac{(2D'^{1/(1+\epsilon)} r)^h}{t^h} \right)^{1/k}. \end{aligned}$$

D'une part, on remarque que l'on a, pour k suffisamment grand,

$$(7.14) \quad [C_{10} k^{s/(s-1)}] \geq e \left[\frac{1+\epsilon}{\epsilon} \right] k,$$

D'autre part, on a clairement d'après (H_1) , pour tout entier $\alpha \geq 1$,

$$(7.15) \quad M_{\alpha k} \geq M_k^\alpha.$$

De (7.13), on tire alors, en appliquant (7.14) avec $\alpha = [\frac{1+\epsilon}{\epsilon}]$,

$$(7.16) \quad (M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s) \|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} \leq 2^{s/k} 4B \left(\sum_{h \geq [C_{10} k^{s/(s-1)}]} \frac{(2D'^{1/(1+\epsilon)} r)^h}{t^h} \right)^{1/k}.$$

On remarque facilement alors que, pour $r < t/(2D')$, la série de droite converge. Il est alors facile de conclure que, pour tout $t \leq t_0$, il existe r_0 tel que, pour tout $r < \min(r_0, t/(2D))$ et pour tout entier $e > 0$, on a $\lim_{k \rightarrow \infty} (M_{ek} \| P_k(F_1, \dots, F_s) \|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = 0$. \square

REMARQUE. La condition (a) n'est pas nécessaire. En effet, il suffit que la suite M vérifie la condition suivante

(H'_3) il existe une constante C positive telle que $M_n \leq C n^{\frac{s}{s-1}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Clairement, (H_3) implique (H'_3).

LEMME 8. Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application formelle, sans terme constant, de $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$ et dont le jacobien Φ est nul. Alors il existe deux applications formelles G et H , de \mathbb{C}^s dans \mathbb{C}^s , appartenant à $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$, dont les jacobiens sont non nuls et telles que $G \circ F \circ H$ ne dépende que des $s - 1$ premières variables.

PREUVE. C'est une simple adaptation de la preuve donnée dans [5] au cas des séries formelles à croissance contrôlée. Il suffit, pour cela, d'utiliser le fait que la racine d -ième d'une série formelle à croissance contrôlée par la suite N est encore une série formelle à croissance contrôlée par la suite N [9]. \square

On déduit des Lemmes 7 et 8 le résultat suivant.

PROPOSITION 9. Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application formelle, sans terme constant, de \mathbb{C}^s dans \mathbb{C}^s , appartenant à $(\mathbb{C}[[X]](N))^s$, et dont le jacobien Φ est nul. Soient C_0 et C' deux constantes strictement positives et d un entier supérieur ou égal à 1. Il existe une série formelle \mathcal{A} qui vérifie

$$\|\mathcal{A}\|_{C', M^{(d)}} = \infty \text{ et } \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M} < \infty.$$

PREUVE.

PREMIER CAS. On suppose que l'application F ne vérifie pas la propriété (\mathcal{P}). On a alors l'existence d'un polynôme P de degré p tel que $P(F_1, \dots, F_s) = 0$. Quitte à le diviser par le maximum des modules de ses coefficients, on peut supposer $\max\{|a|, a \text{ coefficient de } P\} = 1$. En posant alors

$$(9.1) \quad \mathcal{A}(X_1, \dots, X_s) = \sum_{i=\max(2, p)}^{\infty} a_{2i!} (P(X_1, \dots, X_s))^{\frac{i!}{p}} X_1^{i!},$$

on remarque que \mathcal{A} est bien défini car, pour chaque i , $(P(X_1, \dots, X_s))^{\frac{i!}{p}} X_1^{i!}$ est de degré $2(i!)$ et d'ordre $\geq i!$. Ainsi, les termes d'indice $i \geq 2$ ne se mélangent pas car $2(i!) < (i+1)!$. Avec un bon choix de $a_{2(i!)}$, on aura $\|\mathcal{A}\|_{C', M^{(d)}} = \infty$ et, par construction, $\mathcal{A} \circ F = 0$, ce qui donne le résultat voulu.

SECOND CAS. Dans ce cas, on suppose que l'application F vérifie la propriété (\mathcal{P}). On utilise alors le fait que toute application formelle telle que $F(0) = 0$ et dont le jacobien est identiquement nul ne dépend, à changement de variables près, que des $s - 1$ premières variables. Le Lemme 8 donne deux applications formelles G et H , satisfaisant les mêmes conditions de croissance que F , telles que l'application $T = G \circ F \circ H$ ne dépende que des $s - 1$

premières variables. Alors, en utilisant le Lemme 7, on pose, pour $r > 0$ assez petit,

$$(9.2) \quad \mathcal{A}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\|P_{i!}(T_1, \dots, T_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}} P_{i!}(X_1, \dots, X_s) X_1^{i!}.$$

On remarque que \mathcal{A} est bien défini car, pour chaque i , $P_{i!}(T_1, \dots, T_s) \neq 0$ et $P_{i!}(X_1, \dots, X_s) X_1^{i!}$ est de degré $2(i!)$ et d'ordre $\geq i!$. Ainsi, les termes d'indice $i \geq 2$ ne se mélangent pas car $2(i!) < (i+1)!$. En outre, pour chaque indice i , le polynôme $P_{i!}$ a un coefficient égal à 1. De plus, d'après le Lemme 7, pour tout entier k , $i! \leq k \leq 2i!$, et, pour tout $e > 0$, on a $\lim_{i \rightarrow \infty} (1/\|M_{ek} P_{i!}(T_1, \dots, T_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{1/k} = \infty$. Ainsi, on a

$$(*) \quad \text{pour tout } d > 0 \text{ et pour tout } r > 0, \quad \|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}}^{M^{(d)}} = \infty.$$

Mais, on remarque, quitte à changer r , que l'on a la majoration

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A} \circ T\|_{\tilde{r}}^{(M)} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\|P_{i!}(T_1, \dots, T_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)}} \|P_{i!}(F_1, \dots, F_s)\|_{\tilde{r}}^{(M)} (\|T_1\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{i!} \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} (\|T_1\|_{\tilde{r}}^{(M)})^{i!} < \infty. \end{aligned}$$

Le lemme est donc vrai pour l'application T . Supposons qu'il ne soit pas vérifié pour l'application F . On suppose donc que toutes les séries formelles $\tilde{\mathcal{A}}$, telles que $\|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{C_0, M} < \infty$, satisfont l'inégalité

$$(9.3) \quad \|\tilde{\mathcal{A}}\|_{C', M^{(d)}} \leq \|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{C_0, M}$$

pour C' et d bien choisis. D'après le Paragraphe 6, cela revient à supposer que toutes les séries formelles $\tilde{\mathcal{A}}$, vérifiant $\|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty$, satisfont l'inégalité

$$(9.4) \quad \|\tilde{\mathcal{A}}\|_{\tilde{r}'}^{(M^{(d)})} \leq \|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{\tilde{r}}^{(M)}$$

pour r' et d bien choisis. Quitte à changer r , comme les coefficients des séries de l'application H sont contrôlées par la suite N , donc aussi par la suite M , on peut supposer

$$(9.5) \quad \|\tilde{\mathcal{A}} \circ F \circ H\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty.$$

On a donc, en notant k_h la constante associée, dans le Théorème 5, à l'application H , puisque celle-ci est de jacobien non nul, l'existence d'une constante r_1 telle que

$$(9.6) \quad \|\tilde{\mathcal{A}} \circ F\|_{\tilde{r}_1}^{(M^{(k_h)})} \leq \|\tilde{\mathcal{A}} \circ F \circ H\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty.$$

Soit \mathcal{A} la série construite ci-dessus. On pose $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \circ G$. L'inégalité (9.6) devient

$$(9.7) \quad \|\mathcal{A} \circ G \circ F\|_{\tilde{r}_1}^{(M^{(k_h)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G \circ F \circ H\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty.$$

Or, par hypothèse, on a $\|\mathcal{A} \circ G\|_{\tilde{r}'}^{(M^{(d)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G \circ F\|_{\tilde{r}}^{(M)}$. Quitte à diminuer r' , on a donc aussi

$$(9.8) \quad \|\mathcal{A} \circ G\|_{\tilde{r}'}^{(M^{(k_h d)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G \circ F\|_{\tilde{r}_1}^{(M^{(k_h)})}.$$

Comme le jacobien de l'application G est non nul, d'après le Théorème 5, il existe un entier k_g et une constante r_2 tels que

$$(9.9) \quad \|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}_2}^{(M^{(k_g k_h d)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G\|_{\tilde{r}'}^{(M^{(k_h d)})}.$$

On obtient donc, en regroupant les inégalités (9.7), (9.8) et (9.9), l'inégalité

$$(9.10) \quad \|\mathcal{A}\|_{\tilde{r}_2}^{(M^{(k_h k_g d)})} \leq \|\mathcal{A} \circ G \circ F \circ H\|_{\tilde{r}}^{(M)} < \infty.$$

Ceci contredit la propriété (*). On a donc le résultat annoncé. \square

On a donc, en regroupant le Théorème 5 et la Proposition 9, le théorème suivant.

THÉORÈME 10. *Soient M et N deux suites, M vérifiant (H_1) et N vérifiant (H_1) et (H_2) . On suppose qu'il existe une constante $D \geq 1$ telle que, pour tout entier n , on ait $N_n \leq D^n M_n$. On suppose aussi que M et N vérifient l'une ou l'autre des conditions (a) ou (b). Soit $F = (F_1, \dots, F_s)$ une application formelle de $\mathbb{C}[[X]](N)^s$ de jacobien Φ . Soit C_0 une constante strictement positive. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) Φ est non nul dans $\mathbb{C}[[X]]$,

(ii) il existe $C', C' > 0$ et d entier $d \geq 1$ tels que pour tout $\mathcal{A} \in \mathbb{C}[[X]]$, on ait $\|\mathcal{A}\|_{C', M^{(d)}} \leq \|\mathcal{A} \circ F\|_{C_0, M}$.

REMARQUES 11. a) Il est intéressant de noter que, dans le cas où l'application formelle F ne vérifie pas la propriété \mathcal{P} , la série formelle (9.1) construite dans la preuve du Lemme 9 peut appartenir à n'importe quelle classe avec un bon choix des coefficients a_{2i} . On peut alors se demander, dans le cas où l'application formelle F vérifie la propriété \mathcal{P} , à quelle classe appartient la série formelle (9.2)?

b) On dispose d'exemples pour lesquels $\mu - \nu + 1$ est le meilleur exposant d possible dans l'inégalité (ii) du Théorème 10. Il suffit de considérer l'application $F(X) = (X_1^k, X_2, \dots, X_s)$, où k est un entier non nul. Un calcul élémentaire

donne $\mu - \nu + 1 = k$. La série $\mathcal{A}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} M_{kj} X_1^j$ est alors telle que $\|\mathcal{A} \circ F\|_{C,M} = \|\mathcal{A}\|_{C^k, M^{(k)}}$.

c) On peut noter aussi que l'assertion (i) du Théorème 10 est équivalente à

(A) il existe $D > 0$ tel que, pour tout \mathcal{A} de $\mathbb{C}[[X]]$, $\text{ord}(\mathcal{A} \circ F) \leq D \text{ord}(\mathcal{A})$.

Le fait que (i) implique (A) est une étape dans la preuve du théorème sur les fonctions composées de Glaeser [7], [13]. La réciproque est démontrée dans ([5], Lemme 4.2). On peut s'en convaincre facilement au vu de l'inégalité (7.1) ci-dessus. Étant donné F , on note alors D_F la meilleure constante D de l'inégalité (A). On a $D_F \leq \mu - \nu + 1$ [4]. Dans [4], J. Chaumat et A.-M. Chollet posent la question suivante : peut-on trouver une application F telle que D_F soit strictement inférieure à $\mu - \nu + 1$? Dans [10], en réponse à cette question, on donne une famille d'exemples où l'on a $D_F < \mu - \nu + 1$. On peut prendre $F(X, Y) = (X^3 + Y^4, X^2)$. On a alors $D_F = \frac{7}{2}$ et $\mu - \nu + 1 = 4$. Il est facile de voir que, selon la donnée F , le meilleur entier d de l'inégalité (ii) de 10 vérifie $D_F \leq d \leq \mu - \nu + 1$. A-t-on $d = D_F$?

d) Soit \mathcal{I} l'idéal des relations entre les F_i , avec $1 \leq i \leq s$, défini par

$$\mathcal{I} = \{\mathcal{R} \in \mathbb{C}[[X]] \text{ tel que } \mathcal{R} \circ F = 0\}.$$

Si \mathcal{I} n'est pas réduit à $\{0\}$, la propriété (A) n'est pas vérifiée et le jacobien de l'application F est donc nul.

On considère alors l'inégalité de Chevalley linéaire suivante [2], [6]

il existe a et b tels que, pour tout \mathcal{A} de $\mathbb{C}[[X]]$,

(A') $\text{ord}(\mathcal{A} \circ F) \geq ak + b \Rightarrow$ il existe $\mathcal{R} \in \mathbb{C}[[X]]$
tel que $\mathcal{A} \circ F = \mathcal{R} \circ F$ et $\text{ord}(\mathcal{R}) \geq k$.

On peut poser la question suivante : a-t-on l'équivalence entre (A') et l'assertion

$\mathcal{A} \circ F \in \mathbb{C}[[X]](M)$ implique

(iii) il existe d entier, $d \geq 1$, et \mathcal{R} dans $\mathbb{C}[[X]](M^{(d)})$
tel que $\mathcal{A} \circ F = \mathcal{R} \circ F$?

Clairement, si \mathcal{I} est réduit à $\{0\}$, la propriété (A') n'est autre que (A), l'assertion (iii) s'identifie à (ii) et le théorème établi dans le Paragraphe 10 répond à la question.

RÉFÉRENCES

- [1] E. BIERSTONE, *Control of radii of convergence and extension of subanalytic functions*, Preprint, University of Toronto (2001).
- [2] E. BIERSTONE – P. D. MILMAN, *Geometric and differential properties of subanalytic sets*, Ann. of Math. **147** (1998), 731-785.
- [3] J. CHAUMAT – A. M. CHOLLET, *Propriétés de l'intersection des classes de Gevrey et de certaines autres classes*, Bull. Sci. Math. **122** (1998), 455-485.
- [4] J. CHAUMAT – A. M. CHOLLET, *On composite formal power series*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 1691-1703.
- [5] P. M. EAKIN – G. A. HARRIS, *When $\Phi(f)$ convergent implies f is convergent*, Math. Ann. **229** (1977), 201-210.
- [6] A. M. GABRIELOV, *Formal Relations Between Analytic Functions*, Math. USSR-Iz. **7** (1973), 1056-1088.
- [7] G. GLAESER, *Fonctions composées différentiables*, Ann. of Math. (1963), 193-209.
- [8] B. MALGRANGE, *Sur le théorème de Maillet*, Asymptotic Anal. **2** (1989), 1-4.
- [9] A. MOUZE, *Un théorème d'Artin pour des anneaux de séries formelles à croissance contrôlée*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **330** (2000), 15-20.
- [10] A. MOUZE, *Anneaux de séries formelles à croissance contrôlée*, Thèse, Université de Lille, juin 2000.
- [11] R. MOUSSU – J. C. TOUGERON, *Fonctions composées analytiques et différentiables*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **282** (1976), 1237-1240.
- [12] V. THILLIEZ, *Sur les fonctions composées ultradifférentiables*, J. Math. Pures Appl. (1997), 499-524.
- [13] J. C. TOUGERON, “Idéaux de fonctions différentiables”, Springer Verlag, Berlin (1972).

Laboratoire de Mathématiques, UMR 8524
Université des Sciences et Technologies de Lille
59650 Villeneuve d'Ascq
mouze@agat.univ-lille1.fr