Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Myriam Ounaies

Estimations du type Nevanlinna pour les applications non dégénérées de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 26, nº 4 (1998), p. 737-748

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1998_4_26_4_737_0>

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)
Vol. XXVI (1998), pp. 737-748

Estimations du type Nevanlinna pour les applications non dégénérées de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$

MYRIAM OUNAIES

Abstract. Considering a family of sets $\{E_a, a \in (\mathbb{C}^*)^n)\}$ which intersect the image of every non-degenerate holomorphic map, we show that the asymptotic growth of $F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)$ is the same for all $a \in (\mathbb{C}^*)^n$.

Mathematics Subject Classification (1991): 32A15 (primary), 32A22, 32H02, 32H30 (secondary).

Introduction

Nous nous intéressons dans ce travail à l'image des applications holomorphes non dégénérées de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ pour $n \geq 2$ et plus précisément à la taille de l'intersection de ces images avec des ensembles discrets inévitables. Nous généralisons ici aux applications non dégénérées (c'est à dire dont le Jacobien n'est pas identiquement nul) les résultats de [9] qui concernaient les applications dont le Jacobien est identiquement égal à une constante non nulle.

Ce travail est motivé par la théorie de Nevanlinna en une variable. Dans $\mathbb{C}$, une fonction méromorphe prend toute les valeurs de la sphère de Riemann sauf au plus deux. D'aprés la théorie de Nevanlinna [8], en dehors d'un ensemble exceptionnel dénombrable, chaque valeur est prise avec la même fréquence asymptotique.

La situation est différente dans $\mathbb{C}^n$ pour $n \geq 2$. Il existe en effet des applications biholomorphes dont le jacobien est identiquement égal à 1 mais dont l'image évite un ouvert de $\mathbb{C}^n$: les applications de Fatou-Bieberbach (cf. [2], [3], [11]). Il existe d'autres exemples d'applications non dégénérées dont l'image est petite (cf. [5]), voire de volume fini (cf. [10]).

Dans ce contexte, l'existence d'ensembles discrets qui rencontrent l'image de toute application holomorphe non dégénérée prend toute son importance. Rosay et Rudin ont montré l'existence de ces ensembles "inévitables" et L. Gruman ([7]) a montré qu'une condition suffisante pour qu'un ensemble discret soit inévitable est que ses points se resserrent à l'infini avec une certaine vitesse.

Pervenuto alla Redazione il 3 ottobre 1997.

Soit $\mathbb{C}_0^n = \mathbb{C}^n \backslash \{z/ \prod_{j=1}^n z_j = 0\}$ et $M_F(r) = \sup_{z\in B(0,r)} \|F(z)\|$. Gruman [7] a construit a construit une famille $\{E_a,\ a \in \mathbb{C}_0^n\}$ d'ensembles vérifiant cette condition, donc inévitables pour la famille $\mathcal{F}$ des applications holomorphes non dégénérées. Il a montré que, pour $a \in \mathbb{C}_0^n \setminus \psi_F$, où ψ_F est un ensemble pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$, la fréquence asymptotique de $F^{-1}(E_a) \cap B(0,r)$ est de l'ordre de $M_F(r)^{\log\log M_F(r)^{2n-1}}$.

Nous montrons dans cet article que, pour F dans $\mathcal{F}$, l'ensemble exceptionnel ψ_F est en fait vide.

0. – Notations et définitions

Nous désignerons par $||z|| = (\sum_{i=1}^n |z_i|^2)^{1/2}$ et $[z] = \sup_{j=1\dots,n} |z_j|$.

Si $z = (z_1, \dots, z_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$ sont dans $\mathbb{C}^n$, $\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^n z_j\, w_j$.

Nous noterons $B(a,r)$ la boule euclidienne de $\mathbb{C}^n$ de centre a et de rayon r.

Soient

$$\beta = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}||z||^2, \qquad \beta_k = \frac{1}{k!}\beta^k,$$
$$\alpha = i\partial\|z\|^2 \wedge \overline{\partial}\|z\|^2, \quad \gamma = i\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2 .$$

Si w est dans $\mathbb{C}$, nous noterons $\Re w = \frac{w+\bar{w}}{2} et \Im w = \frac{w-\bar{w}}{2i}$.

Pour une application holomorphe $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, nous notons $J_F(z)$ le Jacobien de F au point z, pour $a \in \mathbb{C}^n$, $F^{-1}(a)$ l'image réciproque de a par F et

$$M_F(r) = \sup_{z\in B(0,r)} \|F(z)\| .$$

Nous noterons $\mathcal{F}$ la famille $\{F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ \text{holomorphe} \quad J_F \not\equiv 0\}$.

Nous utiliserons également les notations suivantes:

$$e^{F(z)} = \left(e^{f_1(z)}, \dots, e^{f_n(z)}\right),$$

si $N = (N_1, \dots, N_n) \in \mathbb{Z}^n$, $F(N)(z) = (f_1(z) + 2\pi N_1, \dots, f_n(z) + 2\pi N_n)$.

Si $V : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction plurisousharmonique, nous notons

$$M_V(r) = \sup_{z\in B(0,r)} \left|V(z)\right|, \quad V^+(z) = \max\left(V(z), 0\right) \text{ et } V^-(z) = \max\left(-V(z), 0\right).$$

Nous avons donc $V = V^+ - V^-$ et $|V| = V^+ + V^-$.

Nous noterons $\mathbb{C}_0^n = \mathbb{C}^n \setminus \{z/\prod_{j=1}^n z_j = 0\}$.

Définition 0.1. Soit $\mathcal{C} = \{C^{(j)}, j = 1, \dots, 2n-1\}$ une famille de $2n-1$ vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Nous dirons que les vecteurs de $\mathcal{C}$ sont **en position générale** si toute partie de n éléments de $\mathcal{C}$ forme un système linéairement indépendant. □

Définition 0.2. Soit E un ensemble de $\mathbb{C}^n$. Nous dirons que E est un **ensemble $\mathcal{F}$-essentiel** pour tout $F \in \mathcal{F}$, pour tout r et r' dans $\mathbb{R}^+$ nous avons

$$F\left(\{z/\|z\| \geq r\}\right) \cap E \cap \left\{z/\|z\| \geq r'\right\} \neq \emptyset. \qquad \square$$

1. – Résultats préliminaires

On considère $F \in \mathcal{F}$. La difficulté par rapport au cas traité dans [9] réside dans le fait que le jacobien peut être très petit, nous allons donc introduire une fonction de troncature χ qui sera nulle là où le jacobien est petit.

Pour $j \in \mathbb{N}$, soit χ_j une fonction positive sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, bornée par 1 et vérifiant

$$\begin{aligned} \chi_j(x) &= 0 \qquad \text{si } x \leq j, \\ \chi_j(x) &= 1 \qquad \text{si } x \geq j+1. \end{aligned}$$

REMARQUE. Nous avons alors l'inégalité: $\chi_j \leq \chi_{j-1}$. Soit $\gamma > 2n-1$ et notons $m_F(r) = \exp\big(\log M_F(r)\, [\log\log M_F(r)]^\gamma\big)$.

LEMME 1. *Soient $r' > 0$ et $r'' > r'$ tels que $r'(r''-r)^{-1} \geq 1$ et $\varepsilon > 0$. On note $\varrho = \|z\|^2 - r'^2$.*
Soient $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$, $k < n$ des fonctions psh localement bornées sur $B(0,r) \setminus K$, (K compact dans $B(0,r)$).
On note $\theta = \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j$.

Soit φ une combinaison linéaire réelle des fonctions φ_j. Alors, pour $j \in \mathbb{N}$, si on pose $\psi_r = m_F(r)^{2\varepsilon} |J_F|^2$,

i) $\displaystyle\int_{B(0,r')} \varphi\, \theta \wedge i\partial\overline{\partial}\big(\varrho^2 \chi_j(\psi_r)\big) \wedge \beta_{n-k-1} = \int_{B(0,r')} \big(\varrho^2 \chi_j(\psi_r)\big) i\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \theta \wedge \beta_{n-k-1}.$

ii) *il existe une constante C qui ne dépend que de n telle que, pour $j \in \mathbb{N}$ et $r > 0$,*

$$\begin{aligned} &\int_{B(0,r')} \varphi\, \theta \wedge i\partial\overline{\partial}\big(\varrho^2 \chi_j(\psi_r)\big) \wedge \beta_{n-k-1} \\ &\qquad \leq C \frac{r'^4}{(r''-r')^{2n+2}} M_F(r'')^{2n} m_F(r)^{2\varepsilon} \int_{B(0,r')} \big(\chi_{j-1}(\psi_r)\big) |\varphi|\, \theta \wedge \beta_{n-k}\,. \qquad \square \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION.

i) C'est la même démonstration que dans le Lemme 1.2.2 dans [9] car

$$\overline{\partial}\big(\varrho^2 \chi_j(\psi_r)\big) = \varrho^2 \overline{\partial}(\chi_j(\psi_r)) + (\chi_j(\psi_r))\overline{\partial}\varrho^2 = 0 \ \text{ sur } bB(0,r)\,.$$

ii)

$$\int_{B(0,r')} \varphi\, \theta \wedge i\partial\overline{\partial}\big(\varrho^2 \chi_j(\psi_r)\big) \wedge \beta_{n-k-1} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4\,,$$

avec

$$I_1 = \int_{B(0,r')} \chi_j(\psi_r)\,\varphi\,\theta \wedge i\partial\overline{\partial}\varrho^2 \wedge \beta_{n-k-1}\,,$$

$$|I_1| \leq C_1\, r'^2 \int_{B(0,r')} \chi_j(\psi_r)\,|\varphi|\,\theta \wedge \beta_{n-k}\,.$$

Cette dernière inégalité provient du Lemme 1.2.2, ii) [9].

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{B(0,r')} \varphi\,\theta \wedge i\partial\varrho^2 \wedge \overline{\partial}\big(\chi_j(\psi_r)\big) \wedge \beta_{n-k-1} \\ &= \int_{B(0,r')} 2\,\varrho\,\varphi\,\chi_j'(\psi_r)\,m_F(r)^{2\varepsilon}\,(J_F)\,\theta \wedge i\partial\varrho \wedge \overline{\partial J_F} \wedge \beta_{n-k-1}\,. \end{aligned}$$

En utilisant les formules intégrales de Cauchy pour majorer $|\frac{\partial \overline{J_F}}{\partial \bar{z}_j}|$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C_2\, r^3 \frac{M_F(r'')^n m_F(r)^{\varepsilon}}{(r''-r')^{n+1}} \int_{B(0,r')\cap\{j\leq A^2\,|J_F|^2\}} |\varphi|\,\theta \wedge \beta_{n-k} \\ &\leq C_2\, r^3 \frac{M_F(r'')^n m_F(r)^{\varepsilon}}{(r''-r')^{n+1}} \int_{B(0,r')} \chi_{j-1}(\psi_r)|\varphi|\,\theta \wedge \beta_{n-k}\,. \end{aligned}$$

Nous avons bien-sûr la même majoration en norme pour

$$I_3 = \int_{B(0,r')} \varphi\,\theta \wedge i\partial\big(\chi_j(\psi_r)\big) \wedge \overline{\partial}\varrho^2 \wedge \beta_{n-k-1}\,.$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{B(0,r')} \varrho^2\varphi\,\theta \wedge i\partial\overline{\partial}\big(\chi_j(\psi_r)\big) \wedge \beta_{n-k-1} \\ &= \int_{B(0,r')} \varrho^2\varphi\, m_F(r)^{2\varepsilon}[m_F(r)^{2\varepsilon}|J_F|^2\,\chi_j''(\psi_r) \\ &\quad + \chi_j'(\psi_r)]\,\theta \wedge i\partial J_F \wedge \overline{\partial J}_F \wedge \beta_{n-k-1}\,. \\ &\leq C_3\, r'^4 \frac{M_F(r'')^{2n} m_F(r)^{2\varepsilon}}{(r''-r')^{2n+2}} \int_{B(0,r')} \chi_{j-1}(\psi_r)|\varphi|\theta \wedge \beta_{n-k}\,. \end{aligned}$$

2. – Résultat principal

Gruman [7] a donné une condition suffisante pour qu'un ensemble soit $\mathcal{F}$-essentiel et a donné une construction de tels ensembles:

THÉORÈME 2.1 [7]. *$\beta > 1$ et $E \in \mathbb{C}^n$ un ensemble qui vérifie la propriété suivante:*

$$(*) \quad \forall x \in B(0,m) \setminus B(0,m-1), \quad \exists y \in E \,/\, \|x-y\| \leq \frac{1}{m^{(\log\log m)^{\beta}}}\,.$$

Alors E est un ensemble essentiel pour $\mathcal{F}$. □

Rappelons la construction de ces ensembles:
Pour $\gamma > 2n-1$, soit la fonction d'une variable définie par

$$h(w) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + (w/(\exp\exp j^{1/\gamma})\right).$$

Soit $\mathcal{C} = \{C^{(j)},\ \ j = 1, \ldots, n\}$ une famille de vecteurs en position générale.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de tous les n-uplets $T = (t_1, \ldots, t_n)$ où $t_j = \pm 1$, $j = 1, \ldots, n$.

Pour tout $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathcal{L}$, pour tout $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathbb{Z}^n$ et tout $T \in \mathcal{T}$, on définit sur $\mathbb{C}^n$ l'application

$$G(\Lambda, N, T)(w) = \left(h(t_1\langle C^{(\lambda_1)}, w\rangle) + 2\pi N_1, \cdots, h(t_n\langle C^{(\lambda_n)}, w\rangle) + 2\pi N_n\right).$$

Pour tout $a \in \mathbb{C}_0^n$ on pose

$$\begin{aligned} E_a &= \bigcup_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N\in\mathbb{Z}^n\\ T\in\mathcal{T}}} \left\{(\exp\ \ G(\Lambda, N, T))^{-1}(a)\right\} \\ &= \bigcup_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N,N'\in\mathbb{Z}^n\\ T\in\mathcal{T}}} \left\{w \in \mathbb{C}^n / h\left(t_j\langle C^{(\lambda_j)}, w\rangle\right)\right. \\ &= \left. \log a_j + 2\pi N_j + 2i\pi N'_j,\ \ j = 1, \ldots, n\right\}. \end{aligned}$$

Notons $m_F(r) = \exp\left(\log M_F(r)\,[\log\log M_F(r)]^\gamma\right)$. L. Gruman a montré le

THÉORÈME 2.2 [7].

i) *Pour $a \in \mathbb{C}_0^n$, E_a est $\mathcal{F}$-essentiel.*

ii) *Soit $F \in \mathcal{F}$. Pour tout $a \in \mathbb{C}_0^n \setminus \psi_F$ avec ψ_F pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$ on a,*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{card F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)}}{\mathrm{m_F(r)^{n-\varepsilon}}} = +\infty. \qquad \square$$

Notre but est de montrer que l'ensemble ψ_F est vide.

Rappelons les résultats suivants qui sont démontrés dans [7]: Soit $F \in \mathcal{F}$, si on pose

$$S_F(r) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N\in\mathbb{Z}^n\\ T\in\mathcal{T}}} \int_{B(0,r)} (r^2 - \|z\|^2)^2 \left(i\partial\overline{\partial}\log^+[\exp(G(\Lambda, N, T) \circ F(z))]\right)^n$$

et pour $\varepsilon > 0$,

$$T_F(r,\varepsilon) = \int_{B(0,r)} \varrho^2 \exp\big((2n-\varepsilon)\log(\|F(z)\|+1) \cdot [\log\log(\|F(z)\|+1)]^\gamma\big)|J_F|^2 d\lambda(z),$$
$$\widetilde{T}_F(r,\varepsilon) = \int_{B(0,r)} \varrho^2 \exp\big((2n+\varepsilon)\log(\|F(z)\|+1) \cdot [\log\log(\|F(z)\|+1)]^\gamma\big)|J_F|^2 d\lambda(z).$$

Il existe une constante C_ε qui ne dépend que de n et ε telle que

$$C_\varepsilon^{-1} T_F(r,\varepsilon) - D_7' r^{2n+2}(r'-r)^{-2(n-1)} m_F(r')^{2(n-1)(1+\varepsilon)} \le S_F(r). \tag{2.3}$$

De plus, il existe une suite $r_\mu \nearrow +\infty$, associée à ε, telle que, si $1 < \beta < \frac{\gamma}{2n-1}$ et $r'_\mu = r_\mu + r_\mu[\log\log M_F(r_\mu)]^{-\beta}$ alors, pour μ assez grand, on a

$$T_F(r_\mu,\varepsilon) \ge r_\mu^{4+2n} m_F(r'_\mu)^{2n-2\varepsilon}. \tag{2.4}$$

Nous savons d'après les propriétés de h (cf. [7]) qu'il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $R \ge R_\varepsilon$, si $|w| < R$, alors

$$|h(w)| \le C_1 \exp\big((1+\varepsilon)\log R[\log\log R]^\gamma\big). \tag{2.5}$$

On suppose que pour tout $N \in \mathbb{C}^n$, $\Lambda \in \mathcal{L}$ et $T \in \mathcal{T}$, les zéros de $e^{G(\Lambda,N,T)\circ F} - a$ sont isolés. Dans le cas contraire, le cardinal de $F^{-1}(E_a) \cap B(0,r)$ est infini et il n'y a rien à montrer.

Nous pouvons donc définir $\big(i\partial\bar\partial \log \|\exp\big(G(\Lambda,N,T)\circ F\big) - a\|\big)^n$. Posons

$$n_F(r,a) = \frac{1}{(4\pi)^n} \sum_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N\in\mathbb{Z}^n\\ T\in\mathcal{T}}} \int_{B(0,r)} \big(i\partial\bar\partial \log\|\exp(G(\Lambda,N,T)\circ F(z)) - a\|^2\big)^n,$$

Avec la formule de E. Bedford [1],

$$\begin{aligned} n_F(r,a) &= \sum_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N\in\mathbb{Z}^n\\ T\in\mathcal{T}}} \sum_{\substack{w\in B(0,r)/F(w)\in\\ \exp(G(\Lambda,N))^{-1}(a)}} \deg_{(\exp(G(\Lambda,N,T))}(F(w)) \deg_F(w) \\ &\le \widetilde{C}(\log m_F(r))^n \sum_{w\in B(0,r)/F(w)\in E_a} \deg_F(w), \end{aligned}$$

Si r est assez grand, avec $\widetilde{C}$ ne dépndant que de n, γ et $\mathcal{C}$. En effet, la multiplicité de la fonction h en un point w dans le disque de rayon R est majorée par $C_1 \log M_h(2R)$ (cf. Lemme 1.3.1,i) [9]). h est prise ici en des points $w_j = t_j\langle C^{(\lambda_j)}, F(z)\rangle$ avec $|z| < r$.

Nous avons donc, pour $\varepsilon > 0$ et pour r assez grand,

$$n_F(r,a) \leq \widetilde{C}\, m_F(r)^{\varepsilon} \operatorname{card}\,_m F^{-1}(E_a) \cap B(0,r)$$

avec

$$\operatorname{card}_m\, F^{-1}(E_a) \cap B(0,r) = \sum_{w \in F^{-1}(E_a) \cap B(0,r)} \deg_F(w)\,. \tag{2.6}$$

C'est le nombre de solutions de l'équation $F(z) \in E_a$ dans la boule $\|z\| < r$ comptées avec multiplicité. Notons

$$\begin{aligned} N_F(r,a) = \frac{1}{(4\pi)^n} \sum_{\substack{\Lambda \in \mathcal{L} \\ N \in \mathbb{Z}^n \\ T \in \mathcal{T}}} \int_{B(0,r)} \left(r^2 - \|z\|^2\right)^2 \\ \cdot \left(i\partial\overline{\partial} \log \|\exp(G(\Lambda, N, T) \circ F(z)) - a\|^2\right)^n , \end{aligned}$$

Remarque. C.S. Cornalba et M. Shiffman [4] ont montré qu'il n'existe pas en général de borne supérieure de $G^{-1}(a) \cap B(0,r)$ par une fonction (indépendante de G) de a, r et $\|G\|$, pour une application holomorphe G.

Il est par conséquent clair qu'on ne peut pas comme dans [9] obtenir une majoration de $|N_F(r,a) - S_F(r)|$.

Nous allons ici majorer $S_F(r) - N_F(r,a)$ par un terme qui croît plus vite que $S_F(r)$.

Nous fixons maintenant $\Lambda \in \mathcal{L}$, $T \in \mathcal{T}$ et $N \in \mathbb{Z}^n$ tels que

$$\|N\| \leq C_4 m_F(r)^{(1+\varepsilon)} \text{ avec } C_4 = C_4(a, \mathcal{C})\,.$$

Notons comme dans le paragraphe précédent

$$\widetilde{F} = \left(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n\right) \text{ avec } \quad \tilde{f}_j = \langle C^{(\lambda_j)}, f\rangle$$

et, pour $w \in \mathbb{C}^n$, $h_j(w) = h(t_j w) + 2\pi N_j$, $j = 1, \ldots, n$.

$$G = \exp\left(G(\Lambda, N, T) \circ F\right) = (g_1, \ldots, g_n) \text{ avec } \quad g_j = \exp(h_j \circ \tilde{f}_j)\,.$$
$$\varphi = \log(\|G\|^2 + 1)\ , \quad \psi = \log \|G(z) - a\|^2\,.$$

Appliquons une fois encore le Lemme 1.3.2 de [9] avec $A = K\, m_F(r)^{\varepsilon}$ où K est une constante qui ne dépend que de n.

Pour tout $p > 1$, il existe $r_{p,\varepsilon}$ et il existe une constante $C_5 = C_5(a, n, p, \mathcal{C}, \varepsilon, \gamma)$ telle que, si $r > r_{p,\varepsilon}$ et $r' = r + r[\log\log M_F(r)]^{-\beta}$, alors nous avons la relation

$$\begin{aligned} \int_{B(0,r)\cap\Sigma_A} \left(\log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|)}\right)^p (i\partial\overline{\partial}\psi)^l \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^k \wedge \beta_{n-k-l} \\ \leq C_5 \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2(k+l)}}\, m_F(r')^{(1+3\varepsilon)(1+n)}\, m. \end{aligned} \tag{2.7}$$

LEMME 2.8. *Soit* $\varepsilon > 0$.

Il existe des constantes K_1 *et* K_2 *(dépendant de* $a, n, \mathcal{C}, \varepsilon$ *et* γ *), il existe* $r_\varepsilon > 0$ *tel que si* $r > r_\varepsilon$ *et* $r' = r + r[\log\log M_F(r)]^{-\beta}$*, alors, pour tout* $k/\ 0 \leq k \leq n-1$

$$\int_{B(0,r)} \chi_n\big(m_F(r)^{2\varepsilon}|J_F|^2\big)\big(i\partial\overline{\partial}\psi\big)^{n-1-k} \wedge \big(i\partial\overline{\partial}\varphi\big)^k \wedge \beta \leq K_1 \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2(n-1)}} m_F(r')^{(n-1)(1+4\varepsilon)},$$

$$\int_{B(0,r)} \chi_n\big(m_F(r)^{2\varepsilon}|J_F|^2\big) \log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|}\big(i\partial\overline{\partial}\psi\big)^{n-1-k} \wedge \big(i\partial\overline{\partial}\varphi\big)^k \wedge \beta \leq K_2 \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2(n-1)}} m_F(r')^{(n-1)(1+4\varepsilon)+\varepsilon}. \qquad \square$$

DÉMONSTRATION. Les constantes C_i et $\widetilde{C}_i$ ne dépendront que de $a, n, \mathcal{C}, \varepsilon$ et γ.

Soit $r'' = \dfrac{r'+r}{2}$. Fixons $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Pour $0 \leq l \leq n-1-k$, nous utiliserons les notations suivantes,

$$r_l = r'' - l\frac{r''-r}{n-1-k}, \quad \xi_l^r = \chi_{l+k+1}\big(m_F(r)^{2\varepsilon}|J_F|^2\big),$$
$$\mu_l = (i\partial\overline{\partial}\psi)^l \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^k \wedge \beta_{n-k-l},$$
$$I_l = \int_{B(0,r_l)} \xi_l^r\, d\mu_l, \quad \tilde{I}_l = \int_{B(0,r_l)} \xi_l^r \log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|}\, d\mu_l.$$

Nous allons montrer par récurrence que

$$I_l \leq C_l \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2(k+l)}} m_F(r')^{(k+l)(1+4\varepsilon)}$$

et

$$\tilde{I}_l \leq \widetilde{C}_l \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2(k+l)}} m_F(r')^{(k+l)(1+4\varepsilon)+\varepsilon},$$

Soient $p > \frac{(1+3\varepsilon)(1+n)}{\varepsilon}$, $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

D'après le Lemme 1.2.2, iii) de [9],

$$I_0 \leq \int_{B(0,r'')} (i\partial\overline{\partial}\varphi)^k \wedge \beta_{n-k} \leq C_0 r'^{2n}(r'-r'')^{-2k} m_F(r')^{(1+\varepsilon)k}.$$

D'après l'inégalité de Hölder, avec $A = (k+1)^{-1/2} m_F(r)^\varepsilon$,

$$\tilde{I}_0 = \int_{B(0,r'')\cap\Sigma_A} (\xi_0^r \circ |J_F|^2) \log^+ \frac{1}{\|G-a\|}\, d\mu_0 \le \left(\tilde{I}_{0,p}\right)^{\frac{1}{p}} I_0^{\frac{1}{q}} ,$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{0,p} &= \int_{B(0,r'')\cap\Sigma_A} \left(\log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|}\right)^p d\mu_0 \\ &\le C_0^1 \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2k}} m_F(r')^{(1+3\varepsilon)(1+n)} .\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\tilde{I}_0 \le \widetilde{C}_0 \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2k}} m_F(r')^{(1+\varepsilon)k+\varepsilon} .$$

Supposons les inégalités vraies pour $l-1$.

$$I_l \le \frac{1}{\left(r_{l-1}^2 - r_l^2\right)^2} \int_{B(0,r_{l-1})} \left(r_{l-1}^2 - \|z\|^2\right)^2 \xi_{l-1}^r \, d\mu_{l-1} .$$

Avec le Lemme 1,

$$I_l \le \frac{C_l^2\ r^2}{(r'-r)^{2n+4}} M_F(r')^{2n} m_F(r)^{2\varepsilon} \int_{B(0,r_{l-1})} \xi_{l-1}^r \left|\log\|G-a\|\right| d\mu_{l-1} .$$

En écrivant $\|G-a\| = \log^+ \frac{1}{\|G-a\|} + \log^+ \|G-a\|$, nous avons alors

$$I_l \le \frac{C_l}{(r'-r)^2} m_F(r')^{3\varepsilon} \left[m_F(r')^{1+\varepsilon} I_{l-1} + \tilde{I}_{l-1}\right] .$$

Nous obtenons la majoration voulue en appliquant l'hypothèse de récurrence. La majoration de $\tilde{I}_l$ s'obtient encore grâce à l'inégalité de Hölder et (2.7), comme pour $\tilde{I}_0$.

PROPOSITION 2.9. *Soit F dans $\mathcal{F}$ et a dans $\mathbb{C}_0^n$.*

Pour tous $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{2+4n}$, il existe des constantes $K > 0$ (dépendant de a, n, $\mathcal{C}$, ε et γ), $C_{\varepsilon'}$ qui ne dépend que de $\mathcal{C}$ et de ε' et un rayon $r_{\varepsilon,\varepsilon'}$ tels que, si $r > r_{\varepsilon,\varepsilon'}$ alors

$$C_{\varepsilon'} T_F(r,\varepsilon') - N_F(r,a) \le K\, r^{4+2n} m_F(r')^{2n-\varepsilon} . \qquad \square$$

DÉMONSTRATION. Prenons r assez grand pour que,

$$\forall\, w \in B\big(0, m_F(r)\big),\ \ |h(w)| \le m_F(r)^{1+(\varepsilon/2n)} .$$

Nous noterons

$$\varrho = r^2 - \|z\|^2, \;\; \psi_j = \chi_j\big(m_F(r)^{2\varepsilon}|J_F|^2\big) \text{ pour } j \in \mathbb{N}.$$

les constantes C_j ne dépendront que de $a, n, \mathcal{C}, \varepsilon$ et γ.

Il s'agit d'estimer $S_F(r) - N_F(r,a) = \sum_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L},\\ T\in\mathcal{T}}} (I_1^{\Lambda,T} + I_2^{\Lambda,T})$ avec

$$\begin{aligned} I_1^{\Lambda,T} &= \int_{B(0,r)} \varrho^2(1-\psi_{n+1})(\mu-\lambda_a), \quad I_2^{\Lambda,T} = \int_{B(0,r)} \varrho^2\,\psi_{n+1}(\mu-\lambda_a)\,,\\ \mu &= \sum_{N\in\mathbb{Z}^n} \big(i\partial\overline{\partial}\log^+\|\exp(G(\Lambda,N,T)\|^2\big)^n\,,\\ \cdot\lambda_a &= \sum_{N\in\mathbb{Z}^n} \big(i\partial\overline{\partial}\log\|\exp(G(\Lambda,N,T)-a\|^2\big)^n\,. \end{aligned}$$

Nous noterons $G(\Lambda,T) = (g_1,\dots,g_n)$, $v_j = (|\Im e^{i/4g_j}| + |\Re e^{i/4g_j}|$.
En reprenant la démonstration du Théorème 1 de [6] (avec $\widetilde{G} = (e^{i/4g_1},\dots,e^{i/4g_n})$), mais en utilisant le Lemme 1, nous avons

$$\left|\int_{B(0,r)} \varrho^2(1-\psi_{n+1})\left[\prod_{j=1}^n \frac{i\partial\overline{\partial}v_j}{\prod_{j=1}^n v_j} - \frac{|J_{\widetilde{G}}|^2}{\prod_{j=1}^n v_j^2}\,d\lambda(z)\right]\right| \le C_n r^4 m_F(r')^{2(n-1)(1+\varepsilon)+3\varepsilon}\,.$$

Sachant de plus (cf. [7], p. 88) qu'il existe une constante C_n' telle que

$$\mu = C_n' \bigwedge_{j=1}^n \frac{i\partial\overline{\partial}v_j}{\prod_{j=1}^n |e^{i/4g_j}|}\,,$$

nous obtenons alors,

$$\begin{aligned} I_1^{\Lambda,T} &\le \int_{B(0,r)} \varrho^2(1-\psi_{n+1})\mu\\ &\le C_1\int_{B(0,r)} \varrho^2(1-\psi_{n+1})|J_{G(\Lambda,T)}|^2\,d\lambda(z) + C_2 r^4 m_F(r')^{2(n-1)(1+\varepsilon)+3\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

Mais $|J_G(\Lambda,T)| = \prod_{j=1}^n |h'(t_j < C^{(\lambda_j)}, F>)|\,|\det C^{\Lambda)}|\,|J_F|$. D'où, en majorant (grâce aux formules de Cauchy) chaque $|h'(t_j < C^{(\lambda_j)}, F>)|$ par $C_2\,m_F(r')^{1+\varepsilon/2n}$,

$$I_1 \le C_3\,r^{4+2n} m_F(r')^{2n-\varepsilon}\,.$$

Regardons maintenant l'intégrale $I_2^{\Lambda,T}$.

Fixons N tel que $\|N\| \leq D\, m_F(r)^{1+(\varepsilon/2n)}$, $D = D(a, \mathcal{C})$.

$$\text{Posons} \quad G = \exp\big(G(\Lambda, N, T) \circ F\big),$$
$$\varphi = \log(\|G\|^2 + 1),\, \phi = \log\|G - a\|^2,\, \zeta = \log^+ \frac{\eta_a}{\|G - a\|^2}\,.$$

Nous voulons estimer

$$I = \int_{B(0,r)} \varrho^2\, \psi_{n+1}\big[(i\partial\overline{\partial}\varphi)^n - (i\partial\overline{\partial}\phi)^n\big]\,.$$

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{B(0,r)} \varrho^2\, \psi_{n+1} i\partial\overline{\partial}(\varphi - \psi) \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^{n-1-k} \wedge (i\partial\overline{\partial}\phi)^k\,.$$

En utilisant d'abord le Lemme 1, ensuite la relation

$$|\varphi - \phi| \leq C_a + \log^+ \frac{\eta_a}{\|G - a\|^2} = C_a + \zeta$$

et enfin le Lemme 2.7, nous avons

$$I \leq C_4 \frac{r'^4 M_F(r')^{2n} m_F(r')^{2\varepsilon}}{(r' - r)^{2+2n}} \sum_{k=0}^{n} \int_{B(0,r)} \psi_n (C_a + \zeta)(i\partial\overline{\partial}\varphi)^{n-1-k} \wedge (i\partial\overline{\partial}\phi)^k$$
$$\leq C_5\, r'^4\, m_F(r')^{(1+4\varepsilon)(n-1)+4\varepsilon}\,.$$

En sommant sur $N \;/\; \|N\| \leq D\, m_F(r')^{1+\varepsilon/2n}$, nous obtenons

$$I_2 \leq C_6\, r'^4\, m_F(r')^{2n-1+(4n+1)\varepsilon}\,.$$

Le résultat en découle en utilisant la relation 2.3.

THÉORÈME 2.10. *Soit $F \in \mathcal{F}$. Pour tout $a \in \mathbb{C}_0^n$ et pour $\varepsilon > 0$, nous avons*

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{N_F(r, a)}{T_F(r, \varepsilon)} = +\infty. \qquad \square$$

DÉMONSTRATION. Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{3(2+4n)}$. D'après Prop. 2.9 et 2.4, il existe une suite $r_\mu \nearrow +\infty$ telle que, pour μ assez grand,

$$C_\varepsilon T_F\big(r_\mu, \varepsilon/8\big) - N_F\big(r_\mu, a\big) \leq K\, r_\mu^{4+2n} m_F\big(r'_\mu\big)^{2n-3\varepsilon}\,.$$

En divisant par $T_F(r_\mu, \varepsilon)$ et en utilisant 2.4, nous avons

$$\frac{N_F(r_\mu, a)}{T_F(r_\mu, \varepsilon)} \geq C_\varepsilon m_F\big(r'_\mu\big)^{\varepsilon/4} - K\, m_F\big(r'_\mu\big)^{-\varepsilon}\,.$$

On obtient le résultat en faisant $\mu \to +\infty$.

COROLLAIRE 2.11. *Si $F \in \mathcal{F}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $a \in \mathbb{C}^n_0$, nous avons*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{card}_m F^{-1}(E_a) \cap B(0, r)}{m_F(r)^{n-\varepsilon}} = +\infty. \qquad \square$$

La démonstration est la même que la précedente mais en utilisant l'inégalité 2.6.

RÉFÉRENCES

[1] E. BEDFORD, *Survey of pluripotential theory*, Several complex variables: Proc. Mittag-Leffler Inst.,1987-88, edited by J. E. Fornaess, Math. Notes **38** (1993), 48-97.

[2] L. BIEBERBACH, *Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des $\mathbb{R}^4$ auf einen Teil seiner selbst vermitteln*, S.B. Preuss Akad. Wiss. **14/15** (1933), 476-479.

[3] S. BOCHNER –W. T. MARTIN, "Several complex variables", Princeton University Press, 1948.

[4] M. CORNALBA – B. SHIFFMAN, *A counterexample to the "Transcendental Bezout problem"*, Ann. of Math. **96**, 2 (1972), 402-406.

[5] P. G. DIXON – J. ESTERLE, *Michael's problem and the Poincaré-Fatou-Bieberbach phenomenon*, Bull. Amer. math. Soc (N.S) **15** (1986), 127-187.

[6] L. GRUMAN, *Value distribution for holomorphic maps in $\mathbb{C}^n$*, Math. Ann. **245** (1978), 199-218.

[7] L. GRUMAN, *L'image d'une application holomorphe*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **12** (1991), 75-100.

[8] R. NEVANLINNA, " Analytic functions", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, NewYork.

[9] M. OUNAÏES, *Estimations du type Nevanlinna pour les applications holomorphes de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **30** (1997), 797-819.

[10] J. P. ROSAY – W. RUDIN, *Holomorphic maps from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$*, Trans. Amer. math. Soc. **310** (1988), 47-86.

[11] J. L. STEHLÉ, *Plongements du disque dans $\mathbb{C}^2$*, Séminaire P. Lelong (Analyse) Lecture Notes in Math. **275** (1970), 119-130.

Université Louis Pasteur
UFR de mathématiques et d'informatique
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France
ounaies@math.u-strasbg.fr