

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ROBERT MOUSSU

Sur l'existence d'intégrales premières holomorphes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 26,
n° 4 (1998), p. 709-717

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1998_4_26_4_709_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur l'existence d'intégrales premières holomorphes

ROBERT MOUSSU

à R. Thom

Résumé. Le but essentiel de ce travail est de donner une nouvelle preuve du résultat suivant établi par J.-F. Mattéi et l'auteur dans [Ma-Mo]. Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe singulier sur un voisinage U de 0 dans \mathbb{C}^2 . Alors \mathcal{F} possède une intégrale première holomorphe sur un voisinage $V \subset U$ de 0 dans \mathbb{C}^2 si et seulement si toutes les feuilles de \mathcal{F} sont fermées dans $U \setminus \{0\}$ et seul un nombre fini d'entre elles adhèrent au point 0.

Mathematics Subject Classification (1991): 32B10 (primary), 32C30, 34A20 (secondary).

Au début des années soixante-dix, R. Thom proposa quatre conjectures sur l'existence d'intégrale première pour des germes de feuilletages holomorphes singuliers. Elles ont été essentiellement résolues dans les dix années suivantes. Le but, modeste, de ce travail est de proposer une nouvelle preuve d'une de ces conjectures. Mais je voudrais tout d'abord rappeler leurs énoncés, commenter brièvement les arguments de leurs preuves et indiquer les problèmes encore ouverts. Notons, comme c'est l'usage, \mathcal{O}_n l'anneau des germes de fonctions holomorphes au point 0 de \mathbb{C}^n .

CONJECTURE 1. Soit $\omega = \sum a_i dx_i$ un germe en $0 \in \mathbb{C}^n$ de 1-forme holomorphe intégrable (i.e. $\omega \wedge d\omega = 0$) à singularité isolée (i.e. $\{a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0\} = \{0\}$). Alors, si $n \geq 3$, ω possède une intégrale première holomorphe (i.e. il existe $f \in \mathcal{O}_n$ non constant tel que $\omega \wedge df \equiv 0$).

Cette conjecture a été démontrée par B. Malgrange [Mal] sous l'hypothèse plus faible: la codimension du lieu singulier de ω est au moins trois. Sa preuve comporte deux étapes. Dans la première, on montre [Mou], via le théorème de division de G. De Rham que ω possède un algorithme de Godbillon-Vey

et on en déduit, par un argument de J. Martinet, que ω possède une intégrale première formelle. Dans la seconde, on montre à partir d'un théorème de voisinages privilégiés [Mal] ou du théorème de réduction des singularités de Seidenberg [Ma,Mo], que l'existence d'une intégrale première formelle implique l'existence d'une intégrale première holomorphe. Ainsi, cette preuve repose sur deux implications consécutives de nature: topologique \Rightarrow formel \Rightarrow holomorphe. Ce passage par l'étape formelle n'est pas très satisfaisant. On aimerait avoir une preuve directe plus géométrique de cette conjecture.

Les trois autres conjectures peuvent être énoncées en dimension $n \geq 2$. Mais, d'après les théorèmes d'extension d'intégrales premières holomorphes ([Ma,Mo]) ou de facteurs intégrants holomorphes ([Ce,Mo]) il suffit de les étudier en dimension $n = 2$. Précisons le cadre dans lequel elles sont formulées. Soit ω un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme holomorphe à singularité isolée. Une séparatrice S de l'équation de Pfaff $\omega = 0$ est un germe de courbe analytique irréductible d'équation $f = 0$ tel que $\omega \wedge df$ est divisible par f . Soit ω_U un représentant de ω sur voisinage U de 0 dans \mathbb{C}^2 . On note \mathcal{F}_U le feuilletage (non singulier) de $U \setminus \{0\}$ défini par l'équation de Pfaff $\omega_U = 0$ et $S_U^* = S^*$ la feuille de \mathcal{F}_U correspondant à la séparatrice S de $\omega = 0$.

CONJECTURE 2. *Supposons que $\omega = 0$ a un nombre fini de séparatrices S_k , $k = 1, 2, \dots, p$ et que $\omega = 0$ possède un représentant ω_U tel que les feuilles de \mathcal{F}_U différentes des S_k^* sont fermées dans U . Alors, $\omega = 0$ possède une intégrale première holomorphe (i.e. $\omega \wedge df = 0$ avec $f \in \mathcal{O}_2$).*

Cette conjecture est prouvée dans [Ma,Mo] en raisonnant par récurrence sur le nombre d'éclatements nécessaires à la désingularisation de ω . Le but essentiel de ce travail est de proposer une preuve plus courte, plus géométrique de cette conjecture en étudiant l'espace des feuilles de \mathcal{F}_U . On montrera essentiellement qu'il existe un voisinage V de la réunion Σ des S_k tel que l'espace des feuilles du feuilletage induit par \mathcal{F}_U sur $V \setminus \Sigma$ est isomorphe au disque épointé.

CONJECTURE 3. *Supposons que $\omega = 0$ a un nombre fini de séparatrices S_k , $k = 1, 2, \dots, p$ d'équations $f_k = 0$ et que $\omega = 0$ possède un représentant ω_U tel que les feuilles de \mathcal{F}_U différentes des S_k^* ne contiennent pas 0 dans leur adhérence. Alors $\omega = 0$ possède une intégrale première logarithmique à coefficients réels positifs (i.e. $\omega \wedge \sum \lambda_k df_k/f_k = 0$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p > 0$).*

Cette conjecture est clairement une généralisation de la précédente. Elle se prouve facilement à partir de la réduction des singularités de ω en adaptant des arguments de [Ce,Ma] ou de [Pau] et en utilisant le résultat suivant de R. Perez Marco.

THÉORÈME [Mar]. *Soit h un biholomorphisme d'un voisinage Δ de 0 dans \mathbb{C} sur son image tel que $h(0) = 0$ et $h'(0) = \exp 2i\pi\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons que le germe en 0 de h n'est pas linéarisable. Alors, il existe un point z de Δ tel que, pour $\varepsilon = 1$ ou -1 , la demi orbite $0^\varepsilon(z) = \{h^{\varepsilon n}(z), n \in \mathbb{N}^*\}$ soit contenue dans Δ et le point 0 est contenu dans son adhérence.*

CONJECTURE 4. *Supposons que ω possède un représentant ω_U tel que l'adhérence de chaque feuille de \mathcal{F}_U soit une courbe analytique passant par 0. Alors $\omega = 0$ possède une intégrale première méromorphe (i.e. $\omega \wedge d(f/g) = 0$ avec $f, g \in \mathcal{O}_2$).*

D. Cerveau et J.-F. Mattei ont montré dans [Ce, Ma] que cette conjecture est fautive en reprenant un exemple de Suzuki [Suz]. Mais, dans [Klu], M. Kluhertz prouve qu'elle est vraie topologiquement. Plus précisément, elle montre, avec les hypothèses de la conjecture, le résultat suivant: il existe un représentant ω_U de ω , un homéomorphisme H de U sur $V = H(U)$ et des fonctions holomorphes f, g sur V telles que H applique \mathcal{F}_U sur le feuilletage défini par $gdf - fdg$. La non véracité analytique de cette conjecture provient essentiellement du fait que l'espace des feuilles de \mathcal{F}_U n'est pas séparé. Ce phénomène n'est pas encore bien compris. Plus généralement, l'étude des équations $\omega = 0$ dicritiques (i.e. possédant une infinité de séparatrices) n'a pas encore été vraiment entreprise. A ma connaissance, il existe seulement un mémoire (difficile à lire) de H. Dulac, [Dul] qui aborde l'étude qualitative et la classification analytique des équations $\omega = 0$ dicritiques.

Toute la suite de ce travail est consacrée à la preuve de la Conjecture 2. Plus précisément, nous allons prouver le résultat suivant.

THÉORÈME. *Soit ω_U une 1-forme holomorphe sur un voisinage U de 0 dans \mathbb{C}^2 dont 0 est le seul point singulier et soit \mathcal{F}_U le feuilletage défini par $\omega_U = 0$ sur $U \setminus \{0\}$. Supposons que ω_U possède seulement un nombre fini de séparatrices et que ses autres feuilles sont fermées dans U . Alors, Il existe un voisinage $V \subset U$ de 0 dans \mathbb{C}^2 et une fonction holomorphe p_V sur V tels que les fibres génériques de p_V , $p_V^{-1}(t)$ avec $t \neq 0$, soient les feuilles du feuilletage \mathcal{F}_V induit par \mathcal{F}_U sur V et tels que la fibre singulière $p_V^{-1}(0)$ soit l'ensemble des séparatrices de \mathcal{F}_V .*

Nous dirons que le germe en 0 de p_V est une *intégrale première primitive* de ω pour la raison suivante. Soit f_V une intégrale première holomorphe quelconque de \mathcal{F}_V , c'est-à-dire une fonction holomorphe sur V constante sur les feuilles de \mathcal{F}_V . Les fibres génériques de p_V étant connexes, il existe une application holomorphe φ_V de l'image de p_V sur l'image de f_V tel que $f_V = p_V \circ \varphi_V$. Le corollaire suivant est une conséquence directe du caractère primitif de p_V . Dans [Ma, Mo], c'est à l'opposé une des clés de la preuve de la Conjecture 2 et sa démonstration assez longue repose encore sur la réduction des singularités de df .

COROLLAIRE. *Soit $f = f_1^{n_1} \cdot f_2^{n_2} \cdots f_r^{n_r}$ la décomposition en facteurs irréductibles d'un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de fonction holomorphe. Il existe un représentant f_V de f sur un voisinage V de 0 qui est à fibre connexe si et seulement si $(n_1, n_2, \dots, n_r) = 1$.*

PREUVE. Si $(n_1, n_2, \dots, n_r) = q \neq 1$, on peut écrire $f = g^q$ où g est un germe de fonction holomorphe. Les fibres génériques d'un représentant de f ont, au moins, q composantes connexes. Supposons $(n_1, n_2, \dots, n_r) = 1$ et notons encore f_k un représentant du germe f_k sur un voisinage U de 0, pour $k = 1, 2, \dots, r$. La 1-forme $\omega = f_1 \cdot f_2 \cdots f_r \sum_{k=1}^r df_k / f_k$ définit un feuilletage holomorphe \mathcal{F}_U sur U qui vérifie les hypothèses du théorème. Soit p_V une

intégrale première primitive du feuilletage \mathcal{F}_V induit par \mathcal{F}_U sur un voisinage V de 0. La restriction f_V de $f = f_1^{n_1} \cdot f_2^{n_2} \cdots f_r^{n_r}$ à V s'écrit $f_V = \varphi_V \circ p_V$ avec $\varphi_V'(0) \neq 0$. Si ce n'était pas le cas on aurait $\varphi_V(z) = 0(z^q)$ avec $q > 1$ et les n_k seraient divisibles par q . En restreignant V si nécessaire, on peut supposer que φ_V est un biholomorphisme. Ainsi, f_V est une intégrale première primitive de \mathcal{F}_V et ses fibres sont connexes. \square

PREUVE DU THÉORÈME. Afin d'exposer le plan de la preuve du théorème précisons quelques notations. L'espace \mathbb{C}^2 , identifié à \mathbb{R}^4 , est muni d'une norme euclidienne $\|x\|$, B_r est la boule ouverte de centre 0 de rayon r , ∂B_r est le bord de B_r , \overline{B}_r l'adhérence de B_r . On note \mathcal{F}_r le feuilletage induit par \mathcal{F}_U sur B_r , et $\overline{\mathcal{F}}_r$, $\partial \mathcal{F}_r$ les feuilletages induits sur \overline{B}_r , ∂B_r par \mathcal{F}_U . Leurs feuilles sont les composantes connexes des intersections des feuilles de \mathcal{F}_U avec \overline{B}_r , ∂B_r . Notons $\omega = \omega_U$ une 1-forme holomorphe qui définit \mathcal{F}_U . Soient $\operatorname{Re} \omega$, $\operatorname{Im} \omega$ les parties réelles, imaginaires de ω . L'ensemble des points de tangence de \mathcal{F}_U avec les sphères ∂B_r est l'ensemble analytique réel X d'équations:

$$\operatorname{Re} \omega \wedge d\|x\|^2 = 0, \quad \operatorname{Im} \omega \wedge d\|x\|^2 = 0.$$

D'après des arguments classiques (théorème de Bertini-Sard, structure conique des germes d'ensembles analytiques, ...) on peut choisir la norme euclidienne telle que pour $0 < r < 3/2$ les deux conditions suivantes soient réalisées:

i) \overline{B}_r est contenu dans U et $X \cap \partial B_r$ est une union finie de courbes analytiques qui ne sont pas contenues dans des feuilles de \mathcal{F}_U .

ii) L'ensemble des séparatrices de \mathcal{F}_U coupe transversalement les sphères ∂B_r .

Dans la suite, nous supposons que ces deux conditions sont vérifiées pour $\|\cdot\|$. Nous étudierons essentiellement $\overline{\mathcal{F}}_1$ et, pour alléger les notations, nous écrirons $\overline{B}_1 = \overline{B}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$, $\partial \mathcal{F}_1 = \partial \mathcal{F}$, $\overline{\mathcal{F}}_1 = \overline{\mathcal{F}}$. L'intersection des séparatrices de \mathcal{F}_U avec \overline{B} est la réunion S de ℓ courbes holomorphes irréductibles S_k , $1 \leq k \leq \ell$. Le bord $\partial S_k = S_k \cap \partial B$ de S_k est une courbe lisse homéomorphe à un cercle et $S_k^* = S_k \setminus \{0\}$ est une feuille de $\overline{\mathcal{F}}$. La preuve du théorème se décompose en deux parties: construction d'un "bon" voisinage V de S qui est $\overline{\mathcal{F}}$ -invariant (Lemme 1), étude de l'espace quotient V/\mathcal{F}_V (Lemme 2).

LEMME 1. *Il existe un voisinage V de S dans \overline{B} tel que: V est $\overline{\mathcal{F}}$ -invariant et toutes ses feuilles coupent transversalement ∂B .*

Ce voisinage V de 0 dans \mathbb{C}^2 joue, pour le feuilletage \mathcal{F}_V induit par \mathcal{F}_U sur V , un rôle analogue à celui d'un "voisinage de Milnor", [Mil], pour un germe de fonction holomorphe. Notons $V^* = V \setminus S$, \mathcal{F}_{V^*} le feuilletage induit par \mathcal{F}_U sur V^* , V^*/\mathcal{F}_{V^*} l'espace des feuilles de V^* muni de sa structure topologique quotient et soit q_{V^*} l'application quotient de V^* sur V^*/\mathcal{F}_{V^*} .

LEMME 2. *Il existe un homéomorphisme h de V^*/\mathcal{F}_{V^*} sur $\mathbb{D}^* = \mathbb{D}_1 \setminus \{0\}$ tel que le composé $h \circ q_{V^*} = p_{V^*}$ soit holomorphe.*

Le théorème est une conséquence immédiate de ce lemme. En effet, $h \circ q_{V^*} = p_{V^*}$ est une application holomorphe bornée sur $V^* = V \setminus S$. Puisque S est un ensemble analytique complexe de codimension 1, p_{V^*} s'étend en une application holomorphe sur V qui vérifie les conclusions du théorème par construction. \square

La preuve des deux lemmes ci-dessus reposent essentiellement sur le théorème de stabilité de Reeb. Pour pouvoir l'appliquer nous devons montrer que les groupes d'holonomie des feuilles de \mathcal{F}_U sont finis. C'est une conséquence de la proposition suivante que l'on trouve déjà dans [Ma,Mo]. Nous allons en donner une preuve différente, plus courte qui utilise le théorème de P. Marco ou encore un résultat plus faible de V. Cavalier [Cav].

PROPOSITION. *Soient $f_k : v_k \rightarrow f_k(v_k) \subset \mathbb{C}$ des biholomorphismes tels que les v_k sont des voisinages de 0 dans \mathbb{C} et tels que $f_k(0) = 0$. Supposons que toutes les orbites du pseudo-groupe G engendré par les f_k sont finies. Alors, la restriction de G à un voisinage de 0 bien choisi est holomorphiquement conjuguée au groupe engendré par une rotation périodique $z \rightarrow \exp(2i\pi/q)$.*

PREUVE. Soit $f : v \rightarrow f(v) \subset \mathbb{C}$, un biholomorphisme tel que $f(0) = 0$, $f'(0) = \lambda$. Si $|\lambda| \neq 1$, f est une contraction ou une dilatation (stricte) et ses orbites sont infinies. Si $\lambda^q = 1$, pour un certain $q \in \mathbb{N}^*$ et si f n'est pas périodique, d'après la classification topologique des difféomorphismes résonnants [Ca] toutes les orbites de f sont infinies. Lorsque $\lambda = \exp 2i\pi\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, f possède au moins une orbite infinie d'après le théorème de R. Perez Marco rappelé précédemment. Ainsi, les éléments de G sont tous périodiques. De plus, le groupe G_0 des germes en $0 \in \mathbb{C}$ des éléments de G est commutatif puisque le commutateur de deux éléments quelconques de G_0 est tangent à l'identité et à orbites finies. Le groupe G_0 est commutatif et engendré par des éléments périodiques. On en déduit qu'il est monogène par un argument de moyennisation. \square

PREUVE DU LEMME 1. Soit L une feuille de $\overline{\mathcal{F}}_r$ qui coupe transversalement la sphère ∂B_r et qui ne contient pas 0 dans son adhérence. C'est une feuille compacte de $\overline{\mathcal{F}}_r$. Elle possède un voisinage V_L dans \overline{B}_r tel que toute feuille du feuilletage \mathcal{F}_{V_L} induit sur V_L par \mathcal{F}_U coupe transversalement ∂B_r . D'autre part, toutes les feuilles de $\overline{\mathcal{F}}$ étant fermées dans $U \setminus \{0\}$, leurs groupes d'holonomie sont finis d'après la proposition précédente. En appliquant une "version à bord" du théorème de stabilité de Reeb au couple (L, \mathcal{F}_{V_L}) on obtient l'assertion suivante:

ASSERTION 1. Soit L une feuille de $\overline{\mathcal{F}}_r$ contenue dans une feuille fermée de \mathcal{F}_U qui coupe transversalement ∂B_r . Alors L possède un système fondamental de voisinages fermés dans \overline{B}_r qui sont $\overline{\mathcal{F}}_r$ -invariants.

Puisque les séparatrices S_k coupent transversalement ∂B_r , chaque courbe ∂S_k possède un voisinage dans ∂B sur lequel $\partial \mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement holomorphe non singulier. En appliquant le théorème de stabilité de Reeb

au couple $(\partial S_k, \partial \mathcal{F})$, ∂S_k étant compacte à holonomie périodique, on obtient l'assertion suivante:

ASSERTION 2. Pour $k = 1, 2, \dots, \ell$, la feuille ∂S_k de $\partial \mathcal{F}$ possède un voisinage tubulaire $T_k(\varepsilon)$ dans ∂B ,

$$J_k : \mathbb{D}_\varepsilon \times S^1 \longrightarrow T_k(\varepsilon), \quad \mathbb{D}_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} / |z| < \varepsilon\}$$

tel que $J_k^{-1}(\partial \mathcal{F})$ soit une suspension d'une rotation périodique de centre 0 de \mathbb{D}_ε . En particulier, $T_k(\varepsilon)$ est $\partial \mathcal{F}$ -invariant et les $T_k(\varepsilon') = J_k(\mathbb{D}_{\varepsilon'} \times S^1)$ pour $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ forment un système fondamental de voisinages de ∂S_k dans ∂B . De plus les $T_k(\varepsilon)$ sont transverses à \mathcal{F}_U .

Montrons que ces deux assertions impliquent la propriété suivante:

ASSERTION 3. Il existe $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tel que l'intersection de ∂B avec le $\overline{\mathcal{F}}$ -saturé $V(\varepsilon')$ de $T_1(\varepsilon')$ soit contenue dans $T(\varepsilon)$ la réunion des $T_k(\varepsilon)$.

Supposons le contraire. Il existe une suite $\{a_n\} \subset T_1(\varepsilon)$ qui tend vers un point $a \in \partial S_1$ telle que la feuille L_n de $\overline{\mathcal{F}}$ passant par a_n recoupe ∂B en un point $b_n \notin T(\varepsilon)$. On peut supposer, $\partial B \setminus T(\varepsilon)$ étant compact que la suite $\{b_n\}$ tend vers un point b . Pour conclure ce raisonnement par l'absurde il suffit de montrer que la feuille L_b de $\overline{\mathcal{F}}$ passant par b possède un voisinage $\overline{\mathcal{F}}$ saturé dont l'adhérence ne rencontre pas S , l'ensemble des séparatrices de $\overline{\mathcal{F}}$. Si L_b coupe transversalement ∂B cette propriété est une conséquence de l'Assertion 1. Si L_b ne coupe pas transversalement ∂B , d'après la condition i) sur X (l'ensemble des points de tangence de \mathcal{F}_U et des ∂B_r) il existe $r > 1$ tel que L_b soit contenue dans une feuille L de $\overline{\mathcal{F}}_r$ qui coupe transversalement ∂B_r . En appliquant l'Assertion 1 à cette feuille on obtient un voisinage de L donc de L_b qui ne rencontre pas S .

Pour prouver le lemme montrons enfin l'assertion suivante:

ASSERTION 4. Il existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon'$ tel que $V(\varepsilon_1) = V$ le $\overline{\mathcal{F}}$ -saturé de $T_1(\varepsilon_1)$ soit un voisinage de 0 dans \overline{B} .

Le pseudo-groupe d'holonomie étant engendré par une infinité dénombrable de biholomorphismes ayant un nombre fini de points fixes non triviaux, l'ensemble des feuilles de $\overline{\mathcal{F}}$ qui ont une holonomie non triviale est dénombrable. Il existe $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon'$ tel que les feuilles de $\overline{\mathcal{F}}$ coupées par le cercle $J_1(\partial \mathbb{D}_{\varepsilon_1} \times 1) = C_{\varepsilon_1}$ ont une holonomie triviale. Ces feuilles étant compactes on peut leur appliquer le théorème de stabilité de Reeb. Quelque soit $a \in C_{\varepsilon_1}$ la feuille L_a de $\overline{\mathcal{F}}$ passant par a possède un voisinage tubulaire $\overline{\mathcal{F}}$ -saturé:

$$J_a : \tau_a \times L_a \longrightarrow T(L_a)$$

tel que $J_a^{-1}(\overline{\mathcal{F}})$ soit le feuilletage par les fibres $z \times L_a$, où τ_a est une petite courbe transverse à $\overline{\mathcal{F}}$ passant par a contenue dans $T_1(\varepsilon')$. En particulier le $\overline{\mathcal{F}}$ -saturé de $v_a = \tau_a \cap C_{\varepsilon_1}$ est C^∞ -difféomorphe au produit $v_a \times L_a$ et le $\overline{\mathcal{F}}$ -saturé de C_{ε_1} est une C^∞ -hypersurface (à bord contenu dans ∂B) qui fibre sur le cercle S^1 . Par construction, c'est le bord de $V = V(\varepsilon_1)$ le $\overline{\mathcal{F}}$ -saturé de $T_1(\varepsilon_1)$. \square

PREUVE DU LEMME 2. D'après l'Assertion 1, deux feuilles distinctes de $V^* = V \setminus S$ ont des voisinages $\overline{\mathcal{F}}$ -saturés disjoints. L'espace quotient V^*/\mathcal{F}_{V^*} muni de sa topologie quotient est séparé. Pour étudier sa structure holomorphe, remarquons tout d'abord que V^* est le $\overline{\mathcal{F}}$ -saturé de $\Delta_{\varepsilon_1}^* = J_1(\mathbb{D}_{\varepsilon_1} \setminus \{0\} \times 1)$ qui est une courbe transverse à \mathcal{F}_{V^*} diffeomorphe à $D_1 \setminus \{0\} = \mathbb{D}^*$. On munit $\Delta_{\varepsilon_1}^*$ de la structure holomorphe induite par ce diffeomorphisme. Soit q_{V^*} l'application quotient de V^* sur V^*/\mathcal{F}_{V^*} . Puisque $\Delta_{\varepsilon_1}^*$ coupe toutes les feuilles de \mathcal{F}_{V^*} , on peut identifier V^*/\mathcal{F}_{V^*} et l'image par q_{V^*} de $\Delta_{\varepsilon_1}^*$. Nous écrivons:

$$q = q_{V^*}/\Delta_{\varepsilon_1}^* : \Delta_{\varepsilon_1}^* \longrightarrow q(\Delta_{\varepsilon_1}^*) = V^*/\mathcal{F}_{V^*} = \tilde{\Delta}.$$

La feuille L_a de \mathcal{F}_{V^*} passant par un point quelconque $a \in \Delta_{\varepsilon_1}^*$ est compacte transverse à ∂B et son groupe d'holonomie est fini. C'est un sous-groupe du groupe des rotations de centre $0 \in \mathbb{C}$, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/n(a)\mathbb{Z}$ avec $n(a) \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème de stabilité de Reeb, il existe un voisinage Δ_a de a dans $\Delta_{\varepsilon_1}^*$ tel que le feuilletage induit par \mathcal{F}_{V^*} sur le \mathcal{F}_{V^*} -saturé de Δ_a soit biholomorphiquement conjugué au feuilletage de $\mathbb{D}_1 \times L_a$ ayant pour intégrale première $z \rightarrow z^{n(a)}$. Ainsi, il existe un biholomorphisme h_a de \mathbb{D}_1 sur Δ_a muni de la structure holomorphe induite par celle de $\Delta_{\varepsilon_1}^*$, un homéomorphisme g_a de $q(\Delta_a)$ sur \mathbb{D}_1 tels que:

$$g_a \circ q \circ h_a(z) = z^{n(a)}$$

et tels que $g_a \circ q_{V^*}$ soit holomorphe sur le \mathcal{F}_{V^*} -saturé de Δ_a . On vérifie facilement que l'ensemble des $\{g_a\}$ pour $a \in \Delta_{\varepsilon_1}^*$ est un atlas holomorphe sur $\tilde{\Delta} = V^*/\mathcal{F}_{V^*}$. Dans la suite, $\tilde{\Delta}$ est muni de la structure de surface de Riemann lisse ainsi définie. Par construction, les applications quotients q , q_{V^*} sont alors holomorphes et $q : \Delta_{\varepsilon_1}^* \equiv \mathbb{D}^* \longrightarrow \tilde{\Delta}$ est un revêtement ramifié. Les points de ramification éventuels correspondent aux points a tels que $n(a) > 1$. De plus q étant propre, c'est un revêtement ramifié à un nombre fini de feuilletés.

Montrons tout d'abord que $\tilde{\Delta}$ n'est pas simplement connexe. Supposons le contraire. Alors $\tilde{\Delta}$ est biholomorphe à \mathbb{D}_1 ou à \mathbb{C} et $\tilde{\Delta}$ possède un seul bout B de type hyperbolique si $\tilde{\Delta} \simeq \mathbb{D}_1$, de type parabolique si $\tilde{\Delta} \simeq \mathbb{C}$. L'application q étant propre, l'image inverse par $\tilde{\Delta}$ de B est la réunion des deux bouts de \mathbb{D}^* et ces deux bouts doivent être du même type que B . Ce qui est absurde puisque l'un des bouts de \mathbb{D}^* est parabolique et l'autre est hyperbolique.

Soient α , β deux courbes fermées simples passant par un point $q(a)$, $a \in \Delta_{\varepsilon_1}^*$ qui représentent des éléments non triviaux du groupe fondamental $\pi_1(\tilde{\Delta}, q(a))$. Puisque q est un revêtement ramifié fini, il existe des entiers ℓ , $m \in \mathbb{Z}$ tels que les relèvements de α^ℓ , β^m d'origine a dans \mathbb{D}^* soient des courbes fermées simples homotopes à un même générateur de $\pi_1(\mathbb{D}^*, a)$. Les lacets α^ℓ , β^m sont homotopes. Ainsi, $\tilde{\Delta}$ étant une surface, son groupe fondamental est monogène et $\tilde{\Delta}$ est homéomorphe à \mathbb{D}^* . Soient B_1 , B_2 les deux bouts de $\tilde{\Delta}$. L'image

réciproque $q^{-1}(B_i)$ de B_i par q est un bout de \mathbb{D}^* de même type que B_i et ainsi, $\tilde{\Delta}$ est biholomorphe à \mathbb{D}^* . \square

REMARQUE. Cette preuve (ou encore la conclusion du théorème) n'est pas encore entièrement satisfaisante. En effet, nous n'avons montré l'existence d'une intégrale première p_V que sur un voisinage V des séparatrices strictement contenu dans la boule \bar{B} . Notre méthode, l'étude de l'espace des feuilles V/\mathcal{F}_V nécessite la transversalité des feuilles de \mathcal{F}_V à la sphère ∂B . Elle ne permet pas d'étendre p_V en une intégrale première sur \bar{B} : aux points de tangence du feuilletage avec la sphère ∂B correspondent des points où l'espace des feuilles n'est pas en général séparé. Il serait intéressant d'étudier la structure analytique de l'espace quotient au voisinage de ces points.

Si dans l'étude de la Conjecture 4 (toutes les feuilles sont des séparatrices) on cherche à appliquer les mêmes arguments pour construire une intégrale première méromorphe, on se heurte au même type de difficulté. On ne peut pas en général construire de voisinage saturé de chaque feuille dont l'espace des feuilles a une bonne structure analytique. Cet échec est dû à une perte de transversalité du feuilletage avec des petites sphères qui empêche d'appliquer le théorème de stabilité. L'analyse de ce phénomène permettrait peut-être la classification analytique des feuilletages dont toutes les feuilles sont des séparatrices.

Cette preuve doit beaucoup à des conversations avec T. Barbot, C. Bonatti, J.-M. Lion, à une lettre de M. Sébastiani et surtout à de longues discussions avec M. Brunella.

RÉFÉRENCES

- [Ca] C. CAMACHO, *On the local structure of conformal mappings and holomorphic fields*, Astérisque **59-60** (1978), 83-94.
- [Cav] V. CAVALIER, "Feuilletages transversalement holomorphes quasi transversalement parallélisables", Thèse - Université de Montpellier II (1987).
- [Ce, Ma] D. CERVEAU – J.-F. MATTÉI, *Formes intégrables singulières*, Astérisque **97** (1982).
- [Ce, Mo] D. CERVEAU – R. MOUSSU, *Extension de facteurs intégrants et applications*, C.R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. **294** (1982), 17-19.
- [Dul] H. DULAC, *Sur les points singuliers d'une équation différentielle*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (3) **23** (1909), 328-379.
- [Klu] M. KLUGHERTZ, *Existence d'une intégrale première méromorphe pour des germes de feuilletages à feuilles fermées du plan complexe*, Topology **31** (1992), 255-269.
- [Mal] B. MALGRANGE, *Frobenius avec singularités I: codimension 1*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **46** (1976), 163-173.
- [Mil] J. MILNOR, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Stud. **61** (1968).
- [Ma, Mo] J.-F. MATTEI – R. MOUSSU, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), 469-523.
- [Mar] R. PEREZ-MARCO, *Sur les dynamiques holomorphes non linéarisables et une conjecture de V.I. Arnold*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **26** (1993), 565-644.

- [Mou] R. MOUSSU, *Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **26** (1976), 171-220.
- [Pau] E. PAUL, *Formes singulières à holonomie résoluble*, Preprint 64. Université de Toulouse, laboratoire E. Picard (1995).
- [Ree] G. REEB, "Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées", Act. Sc. et Ind., Herman, Paris, 1952.
- [Suz] M. SUZUKI, *Sur les intégrales premières de certains feuilletages analytiques complexes*, in: Lect. Notes in Math. **670**, Springer-Verlag, Berlin, 1976, pp. 53-58.

Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
CNRS UMR 5584 B.P. 400
21011 Dijon Cedex, France
rmoussu@u-bourgogne.fr