Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Claudy Cancelier
Jean-Yves Chemin

Sous-ellipticité d'opérateurs intégro-différentiels vérifiant le principe du maximum

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 20, nº 2 (1993), p. 299-312

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1993_4_20_2_299_0>

Sous-ellipticité d'opérateurs integro-différentiels vérifiant le principe du maximum

CLAUDY CANCELIER - JEAN-YVES CHEMIN

0. - Introduction

On s'intéresse aux opérateurs intégro-différentiels elliptiques, du second ordre, de type Waldenfels $W = P + S$ où P est un opérateur différentiel du second ordre éventuellement dégénéré, à coefficient d'ordre 0 négatif et S un opérateur intégro-différentiel de la forme

$$Su(x) = \int [u(x+z) - u(x) - \nabla u(x) \cdot z] k(x,z)\, \mathrm{d}z \tag{0.1}$$

où $k(x,z)$ est une fonction positive sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ telle que:

$$\sup_x \int_{|z|\geq 1} |z| k(x,z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{soit fini,} \tag{0.2}$$

$$\sup_x \int_{|z|\leq 1} |z|^2 k(x,z)\, \mathrm{d}z \qquad \text{soit fini,} \tag{0.3}$$

parce que

les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés, fortement continus, contractants, ont cette forme (Bony, Courrège et Priouret [2], Cancelier [3]),

ils modélisent les processus de diffusion avec saut (Gimbert et Lions [4], Mikulevicius et Pragarauskas [10]).

L'étude de leur sous-ellipticité conduit aux Théorèmes 0.1 et 0.3 qui étendent aux opérateurs pseudo-différentiels du type $\Sigma X_j^* X_j$, X_j étant d'ordre ≤ 1, les résultats de sous-ellipticité connus pour les opérateurs du second ordre sommes de carrés de champs de vecteurs ou plus généraux de Hörmander [5], Kohn [7], Oleinik et Radkevic [12], Bolley, Camus et Nourrigat [1].

Pervenuto alla Redazione il 9 Novembre 1991 e in forma definitiva il 5 Giugno 1992.

On remarque que si u est une fonction bornée dans $\mathbb{R}^n$ et régulière près de x (de classe C^2 par exemple), $Su(x)$ est bien défini. Mais précisons le domaine de l'opérateur S:

Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et β un réel, le domaine $D_\beta(S)$ de l'opérateur S est la fermeture de l'espace $C^2_K(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\|u\|_\beta = |u|_\beta + |Su|_\beta$.

Par définition, on dira que S vérifie la *propriété de non annulation d'ordre* $2-\alpha$ ($\alpha \in]0,2[$) si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe une constante $\varepsilon > 0$, un cône ouvert convexe $\mathcal{C}$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de x tels que

$$\forall y \in \mathcal{V}, \quad \forall z \in B(0,\varepsilon) \cap \mathcal{C}, \quad k(y,z) \geq \varepsilon |z|^{-n-2+\alpha}. \tag{0.4}$$

THÉORÈME 0.1. *Soit S l'opérateur intégro-différentiel défini par* (0.1) *vérifiant la propriété de non annulation. Si S^*1 est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $D_{-1+\frac{\alpha}{2}}(S) \subset H^{1-\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^n)$.*

L'hypothèse sur S^*1 est satisfaite par exemple lorsque

$$\begin{aligned} &\int_{|z|\geq 1} \|\nabla_x k(\cdot,z)\|_{L^\infty} |z| \,\mathrm{d}z \qquad \text{et} \\ &\int_{|z|\leq 1} \|\nabla_x^2 k(\cdot,z)\|_{L^\infty} |z|^2 \,\mathrm{d}z \qquad \text{sont finies.} \end{aligned} \tag{0.5}$$

Considérons maintenant le cas particulier suivant:

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et S un opérateur pseudo-différentiel réel, proprement supporté d'ordre strictement inférieur à 2, appartenant à la classe $L^{2-\alpha}_{1,0}(\mathbb{R}^n)$ de Hörmander. Compte tenu des estimations bien connues sur son noyau distribution $k(x,z)$, on a pour $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ à support contenu dans Ω et $x \in \Omega$:

$$Su(x) = \int_\Omega k(x, x-y)[u(y) - u(x) - \nabla u(x)\cdot(y-x)]\,\mathrm{d}y + Au(x) \tag{0.6}$$

où A est un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On suppose que le noyau-distribution de S est une fonction positive sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La propriété de non annulation d'ordre $2-\alpha$ peut s'exprimer sous la forme plus faible: Pour tout $x \in \Omega$, il existe un cône ouvert convexe $\mathcal{C}$ et une constante $\varepsilon > 0$ tels que

$$\forall z \in B(0,\varepsilon) \cap \mathcal{C} \qquad k(x,z) \geq \varepsilon |z|^{-n-2+\alpha}. \tag{0.7}$$

Le Théorème 0.1 conduit au Corollaire 0.2 dont une démonstration directe peut être faite en calculant le symbole de S:

COROLLAIRE 0.2. *Soit S un opérateur pseudo-différentiel réel satisfaisant les hypothèses précédentes et la propriété de non annulation* (0.7). *Alors S est un opérateur elliptique.*

La démonstration du Théorème 0.1 et de son corollaire fera l'objet du premier paragraphe. Si l'on cherche à étudier la sous-ellipticité de l'opérateur $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - x_1^{2p}S$, où S vérifie les hypothèses du Corollaire 0.2, l'ellipticité de S permet de l'écrire $S = L^*L + L_0$, où L et L_0 sont des opérateurs d'ordres inférieurs à 1. On est naturellement conduit au théorème plus général suivant:

THÉORÈME 0.3. *Soient $(X_j)_{1\leq j\leq \ell}$ une suite d'opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés, appartenant à la classe $L^{m_j}_{1,0}(\Omega)$, $m_j \leq 1$, $1 \leq j \leq \ell$, à symboles principaux imaginaires purs, (x_0, ξ_0) un point de l'espace cotangent et Y un commutateur itéré des opérateurs $(X_j)_{1\leq j\leq \ell}$, de longueur r et d'ordre μ strictement positif. Si Y est elliptique microlocalement en (x_0, ξ_0), alors l'opérateur $P = \sum_{j=1}^{\ell} X_j^* X_j$ est sous elliptique microlocalement en (x_0, ξ_0) avec perte de $2\left(1 - \dfrac{\mu}{r}\right)$ dérivées.*

La démonstration de ce théorème sera faite au second paragraphe.

REMARQUE. S'il existe un triplet (Y, μ, r) vérifiant les hypothèses du théorème ci-dessus, alors il en existe un tel que $\dfrac{\mu}{r}$ soit maximal.

Dans tout l'article $|\cdot|_s$ désignera la norme de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$.

REMERCIEMENTS. Nous tenons à remercier J.-M. Bony et C.J. Xu pour de fructueuses discussions.

1. - Sous-ellipticité d'opérateurs intégro-différentiels vérifiant le principe du maximum

Avant de commencer la démonstration, vérifions que lorsque l'hypothèse (0.5) est vérifiée, S^*1 est essentiellement bornée. En effet:

$$\iint_{\{|z|\geq\varepsilon\}} [u(x+z) - u(x) - \nabla u(x)\cdot z] k(x,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \qquad u \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$= \iint_{\{|z|\geq\varepsilon\}} u(x)k(x-z,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \iint_{\{|z|\geq\varepsilon\}} u(x)k(x,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$+ \iint_{\{|z|\geq\varepsilon\}} u(x)\nabla_x k(x,z)\cdot z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\int u(x)S^*1(x)\,\mathrm{d}x = \int Su(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int\int u(x)[k(x-z,z) - k(x,z) + \nabla_x k(x,z)\cdot z]\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

d'où $|\int u(x)S^*1(x)\,\mathrm{d}x| \leq C\|u\|_{L^1}$.

La démonstration du Théorème 0.1 repose sur le calcul de l'intégrale (u, Su), sur la décomposition d'un élément quelconque en la différence de deux éléments d'un cône de non annulation de S et sur le fait que S^*1 soit bornée.

En remarquant que

$$Su^2(x) - \int |u(x+z) - u(x)|^2 k(x,z)\,\mathrm{d}z = 2u(x)Su(x),$$

on déduit immédiatement que

$$(1.1)\qquad (u, Su) = -\frac{1}{2}\int\int |u(x+z) - u(x)|^2 k(x,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int u^2(x)S^*1(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a aussi besoin du lemme géométrique qui permet coniquement près d'un point z_0 n'appartenant pas à un cône $\mathcal{C}_0$, de décomposer tout z en la différence de deux éléments de $\mathcal{C}_0$ dont la norme est voisine de celle de z. Plus précisément:

LEMME 1.1. *Soit $\mathcal{C}_0$ un cône ouvert convexe. Pour tout $z_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{C}_0$, il existe un cône ouvert convexe $\mathcal{C}$ contenant z_0 et deux applications w_1 et w_2: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ tels que:*

$$(1.2)\qquad w_1 - w_2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}.$$

(1.3) *w_i est un difféomorphisme C^∞, homogène de degré 1 de $\mathcal{C}$ sur son image $w_i(\mathcal{C}); i = 1, 2$.*

DÉMONSTRATION. En effet pour tout $z_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{C}_0$, on peut trouver une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée d'éléments de $\mathcal{C}_0$, telle qu'aucune coordonnée $\lambda_i(z_0)$, $1 \leq i \leq n$, dans cette base, ne soit nulle, caractère qui demeure dans un voisinage conique $\mathcal{C}$ de z_0. Le fait que z_0 n'appartienne pas à $\mathcal{C}_0$ assure que m (≥ 1) coordonnées $\lambda_i(z_0)$ sont strictement positives et $(n-m)$ strictement négatives.

On pose alors:

$$(1.4)\qquad w_1(z) = 2\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(z)e_i - \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i(z)e_i \qquad z \in \mathcal{C}$$

$$(1.5)\qquad w_2(z) = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(z)e_i - 2\sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i(z)e_i \qquad z \in \mathcal{C}.$$

Par ailleurs on sait que

$$|u|^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \int\int |u(x+z)-u(x)|^2 |z|^{-n-2+\alpha}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + |u|_0^2 \qquad u \in C_K^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.6}$$

En tenant compte

• de la propriété de non annulation (0.4) qui assure pour tout x l'existence d'un cône ouvert convexe $\mathcal{C}_{0,x}$, d'un voisinage $\mathcal{V}_x$, d'une constante $\mathcal{E}_x$ tels que

$$\forall y \in \mathcal{V}_x, \quad \forall z \in B(0,\varepsilon_x) \cap \mathcal{C}_{0,x} \qquad k(y,z) \geq \varepsilon_x |z|^{-n-2+\alpha},$$

et qui permet d'associer à tout $z \notin \mathcal{C}_{0,x}$ un cône ouvert convexe $\mathcal{C}$ contenant z et les applications w_1 et w_2 définies par (1.4) et (1.5): $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{0,x}$,

• de la compacité de la sphère S^{n-1} qui permet de la recouvrir par $S^{n-1} \cap \mathcal{C}_{0,x}$ et par un nombre fini d'ouverts du type $S^{n-1} \cap \mathcal{C}$ (on notera $\mathcal{C}_0$ tout ouvert convexe du type $\mathcal{C}_{0,x}$),

• de la compacité de K qui permet de le recouvrir par un nombre fini de $\mathcal{V}_x$ (on notera $\mathcal{V}$ un voisinage du type $\mathcal{V}_x$ et ε le plus petit ε_x),

• du fait que $-(u,Su)$ soit à un terme majoré par $\mathrm{Cte}|u|_0^2$ près, égal à:

$$\mathrm{Cte} \int\int |u(x+z)-u(x)|^2 k(x,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \qquad (\text{car } S^*1 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)),$$

• du fait que

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^n \times \{|z|\geq\varepsilon\}} |u(x+z)-u(x)|^2 |z|^{-n-2+\alpha}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

soit majoré par $\mathrm{Cte}|u|_0^2$,

il suffit pour démontrer que

$$|u|^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq C[-(u,Su) + |u|_0^2] \tag{1.7}$$

de vérifier que:

$$\begin{aligned} I = &\iint\limits_{\mathcal{V}\times B(0,\varepsilon)\cap\mathcal{C}} |u(x+z)-u(x)|^2 |z|^{-n-2+\alpha}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &\leq C \int\int |u(x+z)-u(x)|^2 k(x,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Grâce à l'inégalité triangulaire et vu que $w_1 - w_2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, alors

$$I \leq I_1 + I_2 \tag{1.9}$$

avec

$$I_1 = 2 \iint\limits_{\mathcal{V}\times B(0,\varepsilon)\cap\mathcal{C}} |u(x) - u(x + w_1(z))|^2 |z|^{-n-2+\alpha} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x$$

$$I_2 = 2 \iint\limits_{\mathcal{V}\times B(0,\varepsilon)\cap\mathcal{C}} |u(x+z) - u(x + z + w_2(z))|^2 |z|^{-n-2+\alpha} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x.$$

Les intégrales I_1 et I_2 se traitent de manière analogue. Etudions I_1:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \iint\limits_{\mathcal{V}\times B(0,\varepsilon)\cap\mathcal{C}} |u(x) - u(x + w_1(z))|^2 |w_1(z)|^{-n-2+\alpha} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \\ &\leq C \iint\limits_{\mathcal{V}\times B(0,\varepsilon)\cap\mathcal{C}} |u(x) - u(x + w_1(z))|^2 k(x, w_1(z))| \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.10}$$

puisque $w_1(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}_0$, puis en faisant le changement de variable qui transforme $w_1(z)$ en z et grâce à la positivité de k:

$$I_1 \leq C \iint |u(x+z) - u(x)|^2 k(x, z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x, \tag{1.11}$$

ce qui termine la démonstration de (1.7).

Dans le cas particulier où S est un opérateur pseudo-différentiel on peut démontrer directement le Corollaire 0.2.

Par un argument de perturbation classique on se ramène au cas où S est à coefficients constants.

$$Su(x) = \int\limits_{\Omega} k(x-y)[u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y - x)] \, \mathrm{d}y \qquad (u \in C_0^\infty(\Omega)). \tag{1.12}$$

Par définition de la transformée de Fourier, le symbole de S est égal à:

$$\sigma(\xi) = \int k(z)(e^{-iz\cdot\xi} - 1 + iz \cdot \xi) \, \mathrm{d}z. \tag{1.13}$$

Sa partie réelle est égale à:

$$\operatorname{Re} \sigma(\xi) = \int k(z)(\cos z \cdot \xi - 1) \, \mathrm{d}z. \tag{1.14}$$

Dans le cas particulier où K est homogène, on obtient en passant en coordonnées polaires:

$$\mathrm{Re}\,\sigma(\xi) = \int_{S^{n-1}} k(\theta) N(\theta, \xi)\,\mathrm{d}\theta \tag{1.15}$$

où

$$N(\theta, \xi) = \int_0^{+\infty} [\cos(r\theta \cdot \xi) - 1] r^{-3+\alpha}\,\mathrm{d}r.$$

Il est clair que $N(\theta, \xi)$ est homogène de degré $2-\alpha$ et que $N(\theta, \xi)$ est strictement négatif sur $S^{n-1} \times S^{n-1}$; le résultat est alors immédiat et l'hypothèse de non annulation est une condition nécessaire et suffisante d'ellipticité.

Dans le cas général, il faut être un peu plus précis:

Soit $\xi_0 \in S^{n-1}$, il existe un voisinage conique U de ξ_0 et un ouvert conique V tels que pour tout $(z, \xi) \in V \times U$, on ait:

$$|z \cdot \xi| \geq C|z||\xi| \quad \text{et} \quad k(z) \geq \varepsilon |z|^{-n-2+\alpha} \quad \text{pour tout} \quad z \in B(0, \varepsilon); \tag{1.16}$$

et de plus si $|z \cdot \xi| \leq 1$ alors

$$\cos z \cdot \xi - 1 \leq -\frac{1}{4}(z \cdot \xi)^2.$$

Donc

$$\mathrm{Re}\,\sigma(\xi) \leq -\frac{C}{4}|\xi|^2 \int_{B\left(0, \frac{1}{|\xi|}\right) \cap V} k(z)|z|^2\,\mathrm{d}z. \tag{1.17}$$

Par hypothèse (0.7):

$$k(z) \geq \varepsilon |z|^{-n-2+\alpha} \qquad \text{lorsque } |z| \leq \frac{1}{|\xi|} \leq \varepsilon$$

donc

$$\mathrm{Re}\,\sigma(\xi) \leq -\varepsilon \frac{C}{4}|\xi|^2 \int_{B\left(0, \frac{1}{|\xi|}\right) \cap V} |z|^{-n+\alpha}\,\mathrm{d}z, \tag{1.18}$$

d'où le résultat annoncé.

Le Corollaire 0.2 est aussi vrai pour tout opérateur S qui est une partie finie d'ordre $m - \alpha$ ($m \in \mathbf{N}^*$), à noyau positif vérifiant la propriété de non annulation (0.7) à l'ordre $m - \alpha$.

2. - Démonstration du Théorème 0.3

On supposera, sans perte de généralité, que les opérateurs X_j, $1 \leq j \leq \ell$, introduits au Paragraphe 0, sont définis globalement sur $\mathbb{R}^n$ et à noyaux distributions à supports compacts dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie graduée engendrée par les opérateurs pseudo-différentiels $X_1, \ldots, X_\ell$. Les opérateurs de $\mathcal{G}$ sont donc des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre $m \leq 1$ sur $\mathbb{R}^n$, anti-autoadjoints dont le noyau distribution est à support compact.

On peut en particulier associer à chaque $X \in \mathcal{G}$ d'ordre $m \leq 1$ un groupe à un paramètre $(e^{tX})_{t \in \mathbb{R}}$ d'opérateurs linéaires continus de $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ et vérifier par interpolation le résultat classique: pour tout $\sigma \in [0,1]$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad |e^{tX}u - u|_0 \leq Ct^\sigma |u|_{\sigma m}. \tag{2.1}$$

La Proposition 2.1 va généraliser ce résultat.

Etant donnés un entier q strictement positif, ε une suite de $\{-1,1\}^q$ et J une suite de $\{1,\cdots,\ell\}^q$, on notera $\exp t\mathcal{X}^\varepsilon$ l'opérateur $e^{t\varepsilon_1 X_1} \ldots e^{t\varepsilon_q X_q}$.

La proposition clef est la suivante:

PROPOSITION 2.1. *Soient Y un commutateur itéré de longueur r appartenant à $\mathcal{G}$ et N un entier positif, il existe un entier q, une suite ε de $\{-1,1\}^q$ et une suite J de $\{1,\cdots,\ell\}^q$ tels que l'opérateur H_t défini par*

$$H_t = \exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon e^{t^r Y} \tag{2.2}$$

vérifie

$$\begin{aligned} &\forall \sigma \in [0,1]\ \exists C, t_0 > 0: \quad \forall t \in [-t_0, t_0], \\ &\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad |H_t u - u|_0 \leq Ct^{N\sigma}|u|_\sigma. \end{aligned} \tag{2.3}$$

DÉMONSTRATION. Elle comprend une partie d'algèbre et une d'analyse. L'algèbre présente dans la démonstration nécessite l'introduction du formalisme suivant, tel qu'il est présenté dans [1]:

On désigne par $S(\mathcal{G})$ l'algèbre non commutative des séries formelles à une indéterminée $t \in \mathbb{R}$, à coefficients dans $\mathcal{G}$ de la forme

$$S \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j t^j \qquad a_j \in \mathcal{G}. \tag{2.4}$$

On dira qu'une série formelle $S \in S(\mathcal{G})$ est nulle à l'ordre $N \geq 1$ si $a_j = 0$ pour $j \leq N-1$. Soit $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ l'algèbre non commutative des opérateurs dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

de la forme suivante:

$$P = \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha X^\alpha \qquad a_\alpha \in \mathbf{C},\ p \in \mathbf{N}, \tag{2.5}$$

où pour toute suite finie $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ d'entiers $\alpha_j \in \{1, \cdots, \ell\}$, on note $|\alpha| = q$ et $X^\alpha = X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_q}$.

Soit $S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$ l'algèbre non commutative des séries formelles Σ à une indéterminée $t \in \mathbb{R}$, à coefficients dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, munie de la loi produit usuelle des séries formelles. A toute série $S \in S(\mathcal{G})$ on peut associer une série formelle $e^S \in S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$. D'après la formule de Campbell-Hausdorff, (voir par exemple [13]) pour tous S_1 et $S_2 \in S(\mathcal{G})$, il existe une unique série $S_{12} \in S(\mathcal{G})$ telle que dans $S(\mathcal{U}(\mathcal{G}))$:

$$e^{S_1} e^{S_2} = e^{S_{12}} \tag{2.6}$$

et l'on a

$$S_{12} = S_1 + S_2 + \frac{1}{2}[S_1, S_2] + \cdots . \tag{2.7}$$

Le lemme clef est le suivant:

LEMME 2.2. *Soient Y un commutateur itéré de longueur r appartenant à $\mathcal{G}$ et N un quelconque entier positif, il existe un entier q, une suite ε de $\{-1, 1\}^q$ et une suite J de $\{1, \cdots, \ell\}^q$ tels que* $\exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon = e^S$, *la série $S - t^r Y$ étant nulle jusqu'à l'ordre $N - 1$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons commencer par deux remarques:

1) Lorsque $r = 2$, la formule de Campbell-Hausdorff assure que

$$e^{tX_1} e^{tX_2} e^{-tX_1} e^{-tX_2} = e^S \tag{2.8}$$

avec

$$S = t^2 [X_1, X_2] + \sum_{k\geq 3} t^k S_k \tag{2.9}$$

où S_k est somme d'un nombre fini de commutateurs itérés de X_1 et X_2 de longueur k. Autrement dit, on peut associer au commutateur $[X_1, X_2]$ l'opérateur S vérifiant (2.8) et (2.9).

2) On peut consulter [1] dans le cas où $N = r + 1$.

En suivant pour Y la technique de [1] qui généralise la remarque 1), on obtient l'existence de q, de ε et de J tels que

$$\exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon = e^S \qquad \text{avec } S = t^r Y + \sum_{k\geq r+1} t^k S_k \tag{2.10}$$

où S_k est une somme finie de commutateurs itérés de longueur k, appartenant à $\mathcal{G}$.

En s'inspirant de [5], on applique de nouveau la technique de [1] à S_{r+1} lui-même d'où finalement après utilisation de (2.10), l'existence de q_1, ε^1, et J^1 tels que

$$\exp t\mathcal{X}_{J^1}^{\varepsilon^1} = e^{S^{(1)}} \qquad \text{avec } S^{(1)} = t^r Y + \sum_{k\geq r+2} t^k S_k^{(1)},$$

où $S_k^{(1)}$ est une somme finie de commutateurs itérés de longueur k, appartenant à $\mathcal{G}$.

En itérant le procédé jusqu'à $N-1$, on obtient le lemme.

On considère un entier q, une suite ε et une suite J donnés par le lemme algébrique 2.2. Soit $H_t = \exp t\mathcal{X}_J^\varepsilon e^{t^r Y}$. Le point essentiel de la partie d'analyse de la démonstration consiste en la preuve du lemme suivant:

LEMME 2.3. *L'opérateur H_t est, modulo un opérateur infiniment régularisant, un opérateur intégral de Fourier dont le symbole a appartient à $C^\infty([0,t_0];S^0_{1,0})$ et la phase à $C^\infty([0,t_0];S^1_{1,0})$ et vérifient:*

$$\exists\ b \in C^\infty([0,t_0];S^0_{1,0}) \qquad a(t,x,\xi) = 1 + t^N b(t,x,\xi),$$

$$\exists\ \psi \in C^\infty([0,t_0];S^1_{1,0}) \qquad \varphi(t,x,\xi) = \langle x,\xi\rangle + t^N \psi(t,x,\xi).$$

DÉMONSTRATION. On commence par démontrer qu'il existe $Z \in C^\infty([0,t_0];S^1_{1,0})$ tel que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H_t = Z(t) H_t. \tag{2.11}$$

Cela résulte du fait suivant. Soit $(A_i(t))_{1\leq i\leq 2} \in C^\infty([0,t_0];S^1_{1,0})$ antiautoadjoint, on considère $(F_i(t))_{1\leq i\leq 2}$ solution de l'équation $F_i'(t) = A_i(t)F_i(t)$ avec $F_i(0) = \mathrm{Id}$; $F_1 \circ F_2(t)$ est alors solution de $F'(t) = A_{12}(t)F(t)$ avec $F(0) = \mathrm{Id}$, où

$$A_{12}(t) = A_1(t) + F_1(t)A_2(t)F_1(t)^{-1}.$$

L'application répétée de cette remarque assure (2.11).

Le lemme algébrique 2.2 joint à la relation (2.11) assure que $Z(t)$ a un développement de Taylor en zéro nul jusqu'à l'ordre $N-1$.

D'après la théorie des opérateurs intégraux de Fourier (voir [6] et [8]) la phase φ de H_t vérifie:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t;x,\xi) = Z(t;x,\partial_x\varphi(t,x,\xi)) \\ \varphi(0;x,\xi) = \langle x,\xi\rangle. \end{cases}$$

La condition sur la phase en résulte clairement par intégration; celle sur le symbole vient du lemme 2.2.

Pour conclure la démonstration de la Proposition 2.1, il suffit d'appliquer le lemme suivant, démontré dans [1] p. 219.

LEMME 2.4. *Soit H_t un opérateur intégral de Fourier dont le symbole a appartient à $C^\infty([0,t_0];S^0_{1,0})$ et la phase à $C^\infty([0,t_0];S^1_{1,0})$ et vérifient:*

$$a(t,x,\xi) = 1 + t^N b(t,x,\xi), \qquad \text{avec } b \in C^\infty([0,t_0];S^0_{1,0}),$$

$$\varphi(t,x,\xi) = \langle x,\xi\rangle + t^N \psi_N(t;x,\xi), \qquad \text{avec } \psi_N \in C^\infty([0,t_0];S^1_{1,0});$$

alors, pour tout $\sigma \in [0,1]$, il existe C telle que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad |H_t u - u|_0 \leq C t^{N\sigma} |u|_\sigma .$$

COROLLAIRE 2.5. *Sous les hypothèses de la Proposition 2.1, alors, pour toute $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*

$$|(e^{t^r Y} - \mathrm{Id})^2 u|_0 \leq C \left(\sum_{j=1}^{\ell} |(e^{tX_j} - \mathrm{Id})^2 u|_0 + t^{N\sigma} |u|_\sigma \right).$$

DÉMONSTRATION. Voir [1].

Pour démontrer le Théorème 0.3 on aura besoin de quelques résultats d'interpolation ([1] p. 209 et [9] p. 55).

Soient $Y \in \mathcal{G}$ un commutateur itéré, $(\widetilde{Y}, D(\widetilde{Y}))$ le générateur infinitésimal du groupe unitaire $(e^{tY})_{t\in\mathbb{R}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On définit pour $\beta \in]0,2[$ un espace de moyenne entre $D(\widetilde{Y}^2)$ et $L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$D_\beta(\widetilde{Y}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY} - I)^2 u|_0^2}{t^{2\beta}} \frac{dt}{t} < +\infty \right\}. \tag{2.12}$$

D_β sera muni de sa norme canonique. On peut démontrer que lorsque $\beta \in]0,1[$, l'espace $D_\beta(\widetilde{Y})$ coïncide avec l'interpolé holomorphe $[L^2(\mathbb{R}^n), D(\widetilde{Y})]_\beta$ et que pour $\beta = 1$, $D_1(\widetilde{Y})$ est isomorphe (algébrique et topologique) à $D(\widetilde{Y})$ muni de la norme du graphe.

Le lemme suivant permet de comparer $|u|_{D_\beta(\widetilde{Y})}$ aux normes $|X_j u|_0$ et $|u|_\sigma$.

LEMME 2.6. *Soient $Y \in \mathcal{G}$ un commutateur itéré de longueur r et $\sigma \in \left]\frac{1}{N}, 1\right]$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que:*

$$|u|_{D_{\frac{1}{r}}(\tilde{Y})} \leq C\left[\sum_{j=1}^{\ell} |X_j u|_0^2 + |u|_\sigma\right]. \tag{2.13}$$

DÉMONSTRATION. Nous rappelons brièvement ici la preuve donnée dans [1].

$$|u|_{D_{\frac{1}{r}}(\widetilde{Y})} = |u|_0^2 + \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY} - I)^2 u|_0^2}{t^{2/r}} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Par changement de variable ($t = s^r$) on obtient:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tY} - I)^2 u|_0^2}{t^{2/r}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\leq C\left[\sum_{j=1}^{\ell} \int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tX_j} - I)^2 u|_0^2}{t^2} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_0^{t_0} \frac{t^{2N\sigma}}{t^2} |u|_\sigma^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} + |u|_0^2\right]$$

en vertu du Corollaire 2.5.

L'intégrale $\int_0^{t_0} t^{2N\sigma - 3}\,\mathrm{d}t$ est convergente puisque $\sigma > \frac{1}{N}$ et de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{|(e^{tX_j} - I)^2 u|_0^2}{t^2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq |u|_{D_1(\widetilde{X}_j)} \leq C[|X_j u|_0^2 + |u|_0^2], \text{ d'où le résultat.}$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 0.3. Soit $Y \in \mathcal{G}$ un commutateur itéré de longueur r, d'ordre μ, elliptique en (x_0, ξ_0). Alors il existe donc un voisinage compact K de x_0, un opérateur pseudo différentiel $\psi(x, D)$ d'ordre 0, elliptique en (x_0, ξ_0), nul pour $x \notin V$ où V est un voisinage de x_0, relativement compact dans $\overset{\circ}{K}$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad |\psi(x, D)u|_\mu \leq C[|Yu|_0 + |u|_0]. \tag{2.14}$$

Comme $\psi(x, D)$ est un opérateur d'ordre 0, donc linéaire continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, on déduit par interpolation qu'il est borné de l'interpolé holomorphe

$[L^2(\mathbb{R}^n), D(\widetilde{Y})]_{\frac{1}{r}} = D_{\frac{1}{r}}(\widetilde{Y})$ dans l'interpolé holomorphe $[L^2(\mathbb{R}^n), H^\mu(\mathbb{R}^n)]_{\frac{1}{r}} = H^{\frac{\mu}{r}}(\mathbb{R}^n)$ d'où

$$|\psi(x,D)u|^2_{\frac{\mu}{r}} \leq C|u|^2_{D_{\frac{1}{r}}(\widetilde{Y})}$$

(2.15)

$$\leq C\left[\sum_{j=1}^{\ell} |X_j u|_0^2 + |u|_\sigma^2\right] \quad \text{pour } \sigma \in \left]\frac{1}{N}, 1\right] \text{ (Lemme 2.6).}$$

La Proposition 2.1 laisse toute latitude sur le choix de N, donc il est possible de choisir N pour que $\frac{1}{N} < \frac{\mu}{r}$. D'où le Théorème 0.3.

Pour conclure, démontrons l'existence d'un triplet (Y_m, μ_m, r_m) tel que $\frac{\mu_m}{r_m}$ soit maximal. Soit (Y, μ, r) un triplet vérifiant l'hypothèse du Théorème 0.3. Tout triplet (Y', μ', r') tel que $\frac{1}{r'} < \frac{\mu}{r}$ donne lieu à un quotient $\frac{\mu'}{r'} < \frac{\mu}{r}$; donc le triplet réalisant le quotient $\frac{\mu'}{r'}$ maximal est à chercher dans un ensemble fini; d'où l'existence de (Y_m, μ_m, r_m).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Bolley - J. Camus - J. Nourrigat, *La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels*, Comm. Partial Differential Equations, **7** (2) (1982), 197-221.

[2] J.-M. Bony - P. Courrège - P. Priouret, *Semi-groupes de Feller sur une variété à bord compacte et problèmes aux limites intégro-différentiels du second ordre donnant lieu au principe du maximum*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 18, **2** (1968), 369-521.

[3] C.E. Cancelier, *Problèmes aux limites pseudo-différentiels donnant lieu au principe du maximum*, Comm. Partial Differential Equations, **11** (15) (1986), 1677-1726.

[4] F. Gimbert - P.L. Lions, *Existence and regularity results for solutions of second order, elliptic, integro-differential operators*, Ricerche Mat., vol. XXXIII, **2** (1984).

[5] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.

[6] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators IV*, Springer-Verlag, 1985.

[7] J.J. Kohn, *Pseudo-differential operators and non-elliptic problems*, Pseudo differential operators (C.I.M.E. Stresa, 1968), Edizioni Cremonese, Rome, 1969, 157-165 MR 41 # 3972.

[8] H. Kumano-Go, *A calculus of Fourier integral operators on $\mathbb{R}^n$ and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type*, Comm. Partial Differential Equations, **1** (1) (1976), 1-44.

[9] J.L. LIONS - J. PEETRE, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques n° 19, 1964.

[10] R. MIKULEVICIUS - H. PRAGARAUSKAS, *On the existence and uniqueness of solutions to the martingal problem*, à paraître.

[11] J. NOURRIGAT, *Subelliptic estimates for systems of pseudo-differential operators*. Notas de curso, Instituto de Matemática, Universidad federal de Pernambuco, Recife 1982.

[12] O.A. OLEINIK - E.V. RADKEVIC, *Second order equations with nonnegative characteristic form*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, Plenum Press, 1973.

[13] J.P. SERRE, *Lectures given at Harvard University, Lie algebras and Lie groups*, W.A. Benjamin, Inc. New-York Amsterdam, 1965.

Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 Palaiseau cedex