Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Jacques Chaumat
Anne-Marie Chollet

Classes de Gevrey non isotropes et application à l'interpolation

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 15, nº 4 (1988), p. 615-676
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1988_4_15_4_615_0>

Classes de Gevrey non isotropes et application à l'interpolation

JACQUES CHAUMAT - ANNE-MARIE CHOLLET

Introduction

Soit D un domaine borné dans $\mathbb{C}^n, n \geq 1$, à frontière ∂D de classe C^2, strictement pseudoconvexe, et soit $A^\infty(D)$ la classe des fonctions holomorphes dans D et indéfiniment dérivables dans $\overline{D}$.

On désigne par $A_{1+1/\alpha}(D), 0 < \alpha$, le sous-ensemble des fonctions f de $A^\infty(D)$ qui appartiennent à la classe de Gevrey $G_{1+1/\alpha}(D)$, c'est-à-dire qui vérifient la propriété suivante: il existe des constantes C_1 et C_2, $C_1 \geq 0, C_2 \geq 1$, telles que, pour tout z de D et tout h-uple de vecteurs unitaires $(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h)$, on ait

$$|\mathrm{d}^h f(z)(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h)| \leq C_1 C_2^h h!^{1+1/\alpha}.$$

On note E un sous ensemble fermé de ∂D. On s'intéresse ici au problème suivant. Etant donné un jet F sur E, c'est-à-dire, étant donnée une suite $\{F^k(\varsigma); \varsigma \in E\ k \in \mathbb{N}\}$ de k-formes $\mathbb{R}$-linéaires symétriques de $(\mathbb{C}^n)^k$ dans $\mathbb{C}$, quelles conditions faut-il imposer au jet F et quelles hypothèses faut-il mettre sur E pour qu'il existe une fonction f de $A_{1+1/\alpha}(D)$ telle que, pour tout entier k et tout ς de E, on ait

$$\mathrm{d}^k f(\varsigma) = F^k(\varsigma).$$

Il apparaît clairement que, puisque le jet F doit coïncider sur E avec les valeurs au bord d'une fonction f holomorphe dans D et de ses dérivées, il est nécessaire que le jet F sur E soit $\overline{\partial}$-plat, c'est-à-dire, que les formes $F^k(\varsigma)$ soient en fait $\mathbb{C}$-linéaires. Il est tout aussi évident que le jet F doit vérifier des conditions de régularité, en particulier il doit être un jet de Whitney sur E, de classe C^∞.

Si l'on se réfère à des travaux précédents des auteurs [5], [6], on constate que ces hypothèses sur le jet, associées à une condition dite d'Alexander-Taylor-Williams [1] portant sur E sont suffisantes pour que le problème posé ait une

Pervenuto alla Redazione il 7 Settembre 1987.

solution dans $A^\infty(D)$, c'est-à-dire, pour que l'ensemble E soit un ensemble d'interpolation pour $A^\infty(D)$.

Dans cet article, les auteurs s'attachent à montrer que, lorsque l'on veut interpoler un jet sur E par une fonction holomorphe appartenant à une classe de Gevrey, l'on doit tenir compte du fait qu'une telle fonction est, en fait, deux fois "plus régulière" dans les directions complexes tangentes que dans la direction complexe normale. Ce phénomène, complètement occulté dans le cas de $A^\infty(D)$, apparaît nettement ici. Il a été mis en évidence par E. Stein [16] dans le cas de $\mathrm{Lip}_\alpha(D)$ et exploité par J. Bruna et J. Ortega [3] dans leur étude des problèmes d'interpolation pour les classes Höldériennes $A_{m,s}(B)$ dans la boule unité de $\mathbb{C}^n$. On est donc amené ici, comme dans [3] et [12], à définir des polynômes de Taylor non isotropes, des jets et des classes de fonctions non isotropes.

Ce travail peut être divisé en deux parties. Dans les chapitres I à V, on met en place les outils nécessaires à l'écriture et à la preuve d'un théorème d'extension du type Whitney pour des jets sur E vérifiant une condition de Gevrey non isotrope $G^{NI}_{1+1/\alpha}(E)$. Ce travail n'utilise pas l'hypothèse de stricte pseudoconvexité de D. Dans une deuxième partie, les auteurs reprennent la méthode qu'ils ont développée pour $A^\infty(D)$ dans [5] et [6] et montrent qu'une condition sur E exprimée en termes de recouvrement de E par des boules est suffisante pour que E soit en ensemble d'interpolation pour $A_{1+1/\alpha}(D)$.

Plus précisément, on commence par introduire une classe de Gevrey non isotrope $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$ définie dans un voisinage V convenable de ∂D et l'on montre qu'elle contient $A_{1+1/\alpha}(D)$. L'une des difficultés de cette étude réside dans le fait que les auteurs se sont attachés à n'imposer à la frontière de D qu'une régularité C^2 et ne disposent pas comme J. Bruna et J. Ortega dans leur travail sur $A_{m,s}(B)$ de champs de vecteurs réels analytiques. Ceci fait l'objet des chapitres I et II.

Dans le chapitre III, après un rappel des définitions et des propriétés des polynômes de Taylor non isotropes, on établit une formule de Taylor avec estimation du reste lorsque la fonction associée est dans $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$. C'est l'objet du théorème III.7.

Dans [2], J. Bruna a construit des partitions de l'unité appartenant à une classe de Gevrey isotrope $G_{1+1/\alpha}(\mathbb{R}^n)$ sur lesquelles on a un bon contrôle de la croissance des dérivées successives. On les utilise dans le chapitre IV pour construire des partitions de l'unité non isotropes, appartenant donc à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$, que l'on associe à un recouvrement de Whitney du complémentaire d'un sous-ensemble E de ∂D.

Le chapitre V est consacré à la définition de jets non isotropes $G^{NI}_{1+1/\alpha}(E)$ sur un sous-ensemble E de ∂D et à la preuve d'un théorème d'extension du type Whitney, le Théorème V.8.

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe C^2, E un sous-ensemble fermé de ∂D et α un réel, $\alpha > 0$. Soit F un jet sur E appartenant à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(E)$. Il existe une fonction $\mathcal{F}$ appartenant à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$ telle que *l'on ait, pour tout entier k et tout ς de E,*

$$d^k \mathcal{F}(\varsigma) = F^k(\varsigma).$$

La méthode employée dans la preuve de ce théorème s'inspire d'une idée utilisée par E.M. Dyn'kin [10] dans son travail sur les extensions presque analytiques des fonctions appartenant à une classe de Carleman sur un ensemble compact du plan. Elle est développée par les auteurs dans le cas non isotrope mais elle s'écrit également dans le cas isotrope classique et a l'avantage sur les méthodes déjà connues [2] de fournir une écriture explicite de la fonction qui réalise l'extension.

Avec le chapitre VI débute la deuxième partie de ce travail. On y établit un résultat concernant l'opérateur $\overline{\partial}$ qui peut présenter un intérêt indépendant; c'est le Théorème VI.9.

Soit $\alpha, 0 < \alpha$. Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, à frontière ∂D de classe C^2. Soit q un entier, $1 \leq q \leq n$, et f une $(0,q)$ forme appartenant à $G^{0;q}_{1+1/\alpha}(D)$ et vérifiant $\overline{\partial} f = 0$. Alors, il existe une $(o, q-1)$ forme u de $G^{0;q-1}_{1+1/\alpha}(D)$ telle que l'on ait, dans D,

$$\overline{\partial} u = f.$$

Lorsque ∂D a la régularité $G_{1+1/\alpha}$, M. Derridj et D. Tartakov [9] ont établi l'existence d'une telle solution. Il n'existait pas, à la connaissance des auteurs, un résultat analoque lorsque ∂D n'a que la régularité C^2. Ceux-ci tiennent à remercier J. Michel pour leur avoir signalé l'existence des noyaux qu'ils estiment ici [15].

Les chapitres VII et VIII reprennent des idées et des techniques précédemment développées dans [5] et [6] et utilisées également par J. Bruna et J. Ortega [3]. Soit $\varepsilon, 0 < \varepsilon$ et K un sous-ensemble de $\overline{D} \cap V$. On note $N_\varepsilon(K)$ le nombre minimal de pseudoboules de rayon ε dont la réunion recouvre K et on établit alors le Théorème d'interpolation VIII.4.

Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à frontière de classe C^2 et E un sous-ensemble fermé de ∂D. Soit $\alpha, 0 < \alpha < 1$. S'il existe une constante $L_1, L_1 > 0$, telle que l'on ait

$$(I_\alpha) \qquad \int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\varepsilon^{-\alpha} d\varepsilon \leq L_1 r^{1-\alpha},$$

pour tout $r, 0 < r < 1$, et toute boule B_r de rayon r, centrée sur $\overline{D} \cap V$, alors, pour tout jet F de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(E)$, $\overline{\partial}$-plat, il existe une fonction f de $A_{1+1/\alpha}(D)$ telle que l'on ait, pour tout entier k et tout ς de E,

$$d^k f(\varsigma) = F^k(\varsigma).$$

La restriction imposée à $\alpha, 0 < \alpha < 1$, est naturelle ici car, un ensemble d'interpolation pour $A_{1+1/\alpha}(D)$ étant aussi un ensemble de non-unicité pour la classe, il importe que celle-ci soit non-quasi analytique.

Lorsque D est le disque unité du plan complexe (I_α) n'est autre que la condition nécessaire et suffisante établie par E.M. Dyn'kin et S.V. Hruscev [11] pour que E soit un ensemble d'interpolation pour $A_{1+1/\alpha}(D)$. Dans $\mathbb{C}^n, n > 1$, pour $A^\infty(D)$ ou $A_{1+1/\alpha}(D)$, on ne connait de caractérisations des ensembles d'interpolation que lorsqu'ils sont situés le long de courbes suffisamment régulières transverses en chaque point à l'espace tangent complexe.

Les auteurs tiennent enfin à mentionner que des classes de Gevrey non isotropes différentes ont été introduites pour étudier la régularité des opérateurs différentiels. On peut se référer par exemple aux travaux d'O. Liess et L. Rodino [14] ou de M.S. Baouendi et C. Goulaouic [17].

Ces résultats on été annoncés dans une note [7].

CHAPITRE I

Définition des classes de Gevrey non isotropes $G^{NI}_{1+1/\alpha}$

1. - Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière ∂D de classe C^2. D est donc défini par la donnée d'une fonction r de classe C^2 dans un voisinage de $\overline{D}$, l'adhérence de D telle que

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n ; r(z) < 0\}, \tag{1.1}$$

$$\text{grad } r \neq 0 \text{ sur } \partial D. \tag{1.2}$$

Pour z dans un voisinage convenable V de ∂D, on note $\vec{\nu}_z$ le vecteur unitaire de la normale menée de z à ∂D, orienté vers l'extérieur.

On a la décomposition orthogonale complexe

$$T_z(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}\vec{\nu}_z \oplus T^c_z.$$

On note $\langle .,. \rangle$ le produit hermitien dans $\mathbb{C}^n$, $|\ .\ |$ la norme associée et pour tout z dans D, $\mathrm{d}(z, \partial D) = \inf\{|\varsigma - z|, \varsigma \in \partial D\}$. On définit

(1.3) $\Pi_{1,z}$ la projection orthogonale complexe sur $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$

(1.4) $\Pi_{\frac{1}{2},z}$ la projection orthogonale complexe sur T^c_z

et, pour tout z de $\overline{D}$ et z_0 de $\overline{D} \cap V$, la pseudodistance de z à z_0,

$$\rho(z, z_0) = \max(|\Pi_{1,z_0}(z - z_0)|, |\Pi_{\frac{1}{2},z_0}(z - z_0)|^2). \tag{1.5}$$

On note $B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \overline{D}; \rho(z, z_0) < \varepsilon\}$, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule de centre z_0 et de rayon ε.

Pour x réel, on désigne par $\|x\|$, la partie entière de x. Dans l'identification entre $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^{2n}$, on représente $z = (z_1, \cdots, z_n)$ par $x = (x_1, \cdots, x_{2n})$ où $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}, j = 1, \cdots, n$.

2. - NOTATIONS. Soit f une fonction de classe C^∞ dans D et z un point de D. On note, pour k entier, $\mathrm{d}^k f(z)$ la k-ième dérivée de f au point z considérée comme k-forme $\mathbb{R}$-linéaire symétrique de $(\mathbb{C}^n)^k$, identifié à $(\mathbb{R}^{2n})^k$, dans $\mathbb{C}$.

De là, si on fait choix d'une base réelle de $T_z(\mathbb{C}^n)$, identifié à $\mathbb{R}^{2n}$, on a, si k est un entier, $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k, k$ vecteurs de $T_z(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{R}^{2n}$, f une fonction de classe C^∞ dans D et z un point de D

$$\mathrm{d}^k f(z)(\vec{v}_1, \cdots \vec{v}_k) = \sum_\sigma \frac{\partial^k f(z)}{\partial \xi_{\sigma(1)} \cdots \partial \xi_{\sigma(k)}} v_{1,\sigma(1)} \cdots v_{k,\sigma(k)}, \tag{2.1}$$

la somme portant sur toutes les applications σ de $[1, \cdots, k]$ dans $[1, \cdots, 2n]$ et $v_{i,j}$ désignant la j-ième composante réelle de $\vec{v}_i$ dans la base choisie.

Si on note $\vec{v}^k$ le multi-vecteur $(\vec{v}, \cdots, \vec{v})$ où $\vec{v}$ est répété k fois, on a donc

$$\mathrm{d}^k f(z)(\vec{v}^k) = \sum_{k_1 + \cdots + k_{2n} = k} \frac{k!}{k_1! \cdots k_{2n}!} \frac{\partial^k f(z)}{\partial \xi_1^{k_1} \cdots \partial \xi_{2n}^{k_{2n}}} v_1^{k_1} \cdots v_{2n}^{k_{2n}}. \tag{2.2}$$

On note, pour $h_1, \cdots, h_s$ des entiers et $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s$ des vecteurs de $\mathbb{C}^n$,

$$\frac{\partial^{h_1 + \cdots + h_s} f}{\partial \vec{v}_1^{h_1} \cdots \partial \vec{v}_s^{h_s}}(z) = \mathrm{d}^{h_1 + \cdots + h_s} f(z) \; (\vec{v}_1^{h_1}, \cdots, \vec{v}_s^{h_s}) \tag{2.3}$$

et, pour tout multi-indice $K = (k_1, \cdots, k_{2n})$ de longueur $k = k_1 + \cdots + k_{2n}$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial \xi^K}(z) = \frac{\partial^k f}{\partial \xi_1^{k_1} \cdots \partial \xi_{2n}^{k_{2n}}}(z). \tag{2.4}$$

3. - DÉFINITION. Soit α un réel, $0 < \alpha$. Une fonction f appartient à la classe de Gevrey isotrope $G_{1+1/\alpha}(D)$ si et seulement si f est de classe C^∞ dans D et s'il existe des constantes C_1 et $C_2, C_1 \geq 0, C_2 \geq 1$ telles que, pour tout z de D et tout h-uple de vecteurs $(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h)$ unitaires, on ait

$$|\mathrm{d}^h f(z)(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h)| \leq C_1 C_2^h h!^{1+1/\alpha}. \tag{3.1}$$

4. - DÉFINITIONS. Soit α un réel, $0 < \alpha$.

DÉFINITION (a) - Une fonction f appartient à la classe de Gevrey non isotrope $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V)$ si et seulement si f est de classe C^∞ dans $D \cap V$ et s'il existe des constantes C_1 et $C_2, C_1 \geq 0, C_2 \geq 1$ telles que, pour tout z

de $D \cap V$, tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$, tout vecteur unitaire $\vec{w}$ de T_z^c, on ait

$$\left|\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^{\ell+m+p} f(z)}{\partial \vec{v}^{\ell+m} \partial \vec{w}^p}\right| \leq C_1 C_2^{\ell+\frac{m+p}{2}} (\ell+m+p)! \left(\ell + \left\|\frac{m+p}{2}\right\|\right)!^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.1}$$

DÉFINITION (b) - Une fonction f appartient à la classe de Gevrey non isotrope $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V)$ si f est de classe C^∞ dans $D \cap V$ et s'il existe des constantes C_1 et $C_2, C_1 \geq 0, C_2 \geq 1$ telles que, pour tout z de $D \cap V$, tout couple d'entiers (h,k), tout h-uple de vecteurs unitaires $(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h)$, tout $A \geq 1$, et tout k-uple de vecteurs unitaires $(\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_k)$ vérifiant pour tout $j = 1, \cdots k$, $|\langle \vec{\nu}_z, \vec{b}_j \rangle| \leq A\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{1}{2}}$ on ait

$$|\mathrm{d}^{h+k} f(z)(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h, \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_k)| \leq C_1 C_2^{h+\frac{k}{2}} A^k (h+k)! \left(h + \left\|\frac{k}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha} \tag{4.2}$$

DÉFINITION (c) - Une fonction f appartient à la classe de Gevrey $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$ si et seulement si f est de classe C^∞ dans $D\cap V$ et s'il existe des constantes C_1 et $C_2, C_1 \geq 0, C_2 \geq 1$ telles que, pour tout couple d'entiers (h,k), tout h-uple de vecteurs $(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h)$ vérifiant $|\vec{a}_j| \leq 1, j = 1, \cdots, h$, tout $A \geq 1$ et tout k-uple de vecteurs $(\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_k)$ vérifiant pour tout $j = 1, \cdots k$, $|\vec{b}_j| \leq 1$ et $|\langle \vec{\nu}_z, \vec{b}_j \rangle| \leq A\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}$, on ait,

$$|\mathrm{d}^{h+k} f(z)(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h, \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_k)| \leq C_1 C_2^{h+\frac{k}{2}} A^k (h+k)! \left(h + \left\|\frac{k}{2}\right\|\right)!^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.3}$$

5. - PROPOSITION. *Les définitions* (a), (b) *et* (c) *sont équivalentes.*

PREUVE. Clairement (c) implique (b). On se propose de montrer que (b) implique (a). Dans le cas $\mathrm{d}(z,\partial D) > 1$, on a, si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ vérifient les hypothèses de (a),

$$|\langle \vec{\nu}_z, \vec{v} \rangle| \leq A\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2} \text{ et } |\langle \vec{\nu}_z, \vec{w} \rangle| \leq A\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}$$

avec $A = 1$

et donc, d'après (b),

$$|\mathrm{d}^{\ell+m+p} f(z)(\vec{v}^{\ell+m}, \vec{w}^p)| \leq C_1 C_2^{\frac{\ell+m+p}{2}} (\ell+m+p)! \left\|\frac{\ell+m+p}{2}\right\|!^{\frac{1}{\alpha}}$$

ce qui implique (a) d'après (2.3) puisque D est borné.

Si maintenant $\mathrm{d}(z,\partial D) \leq 1$, alors on écrit

$$\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^{\ell+m+p} f(z)}{\partial \vec{v}^{\ell+m} \partial \vec{w}^p} = \mathrm{d}^{\ell+m+p} f(z)(\vec{v}^\ell, (\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}\vec{v})^m, \vec{w}^p).$$

Il existe un $\lambda_z \in \mathbb{R}, |\lambda_z| \leq 2$, tel que le vecteur $\vec{h}$ défini par

$$\vec{h} = \mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}\vec{v} + \lambda_z \vec{w}$$

soit unitaire. De là, en utilisant la $\mathbb{R}$-multilinéarité de la dérivée, on a

$$|\mathrm{d}^{\ell+m+p} f(z)(\vec{v}^{\ell}, (\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}\vec{v})^m, \vec{w}^p)| \leq 4^m \sum_{\substack{j,k \\ j+k=m}} |\mathrm{d}^{\ell+m+p} f(z)(\vec{v}^{\ell}, \vec{h}^j, \vec{w}^{p+k})|.$$

On a

$$\langle \vec{\nu}_z, \vec{h} \rangle = \mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2} \langle \vec{\nu}_z, \vec{v} \rangle$$

et donc

$$|\langle \vec{\nu}_z, \vec{h} \rangle| \leq A\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2} \text{ et } |\langle \vec{\nu}_z, \vec{w} \rangle| \leq A\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}$$

avec $A = 1$.

On a alors, d'après (b),

$$|\mathrm{d}^{\ell+m+p} f(z)(\vec{v}^{\ell}, (\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}\vec{v})^m, \vec{w}^p)|$$
$$\leq C_1 (16 C_2)^{\ell + \frac{m+p}{2}} (\ell + m + p)! \left(\ell + \left\| \frac{m+p}{2} \right\| \right)!^{\frac{1}{\alpha}};$$

ceci établit (a).

On montre maintenant que (a) implique (c). On considère un h-uple de vecteurs $(\vec{a}_1, \cdots \vec{a}_h)$ vérifiant $|\vec{a}_j| \leq 1, j = 1 \cdots h$, et un k-uple de vecteurs $(\vec{b}_1, \cdots \vec{b}_k)$ vérifiant pour $j = 1, \cdots k, |\vec{b}_j| \leq 1$ et $|\langle \vec{\nu}_z, \vec{b}_j \rangle| \leq A\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}$ pour un certain $A, A \geq 1$.

On pose $\vec{b}_j = \vec{a}_{h+j}, j = 1 \cdots k$, et on décompose chacun des vecteurs $\vec{a}_i, i = 1, \cdots, h+k$ sur $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et T_z^c. On a

$$\vec{a}_i = \vec{c}_{i,1} + \vec{c}_{i,1/2} \text{ avec } \vec{c}_{i,1} \in \mathbb{C}\vec{\nu}_z \text{ et } \vec{c}_{i,1/2} \in T_z^c.$$

On pose $\vec{c}_{i,1} = |\vec{c}_{i,1}|\vec{u}_{i,1}$ et $\vec{c}_{i.1/2} = |\vec{c}_{i,1/2}|\vec{u}_{i,1/2}$ avec $\vec{u}_{i,1}$ et $\vec{u}_{i,1/2}$ unitaires.

On a alors

$$\mathrm{d}^{h+k} f(z)(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h, \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_k) = \sum_{\sigma} \mathrm{d}^{h+k} f(z)(\vec{u}^{\sigma})|\vec{c}^{\sigma}| \tag{5.1}$$

où σ parcourt l'ensemble des applications de $[1, \cdots, h+k]$ dans $[1/2, 1]$ et où on note $\vec{u}^{\sigma} = (\vec{u}_{1,\sigma(1)}, \cdots, \vec{u}_{h+k,\sigma(h+k)})$ et $|\vec{c}^{\sigma}| = \prod_{i=1}^{h+k} |\vec{c}_{i,\sigma(i)}|$. On a, par hypothèse, pour tout $i, i = h+1, \cdots h+k$,

$$|\langle \vec{\nu}_z, \vec{a}_i \rangle| = |\langle \vec{\nu}_z, \vec{c}_{i,1} \rangle| = |\vec{c}_{i,1}| \leq A\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}$$

et donc

$$|\vec{c}^{\sigma}| \leq [A\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}]^{\mathrm{card}\ \{\sigma^{-1}(1) \cap [h+1, \cdots, h+k]\}}. \tag{5.2}$$

On utilise maintenant un résultat de [4, page 88].

Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que l'on ait, pour toute s-forme $\mathbb{R}$-multilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^{2n}$ à valeurs complexes, notée L,

$$\begin{aligned} &\sup(|L(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_s)|; |\vec{u}_j| \leq 1, j = 1, \cdots, s) \\ =&\sup(|L(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_s)|; |\vec{u}_j| = 1, j = 1, \cdots, s) \\ \leq& C^s \ \sup(|L(\vec{u}^s)|; |\vec{u}| = 1). \end{aligned}$$

On a donc

$$|\mathrm{d}^{h+k} f(z)(\vec{u}^\sigma)| \leq C^{h+k} \sup_S |\mathrm{d}^{h+k} f(z)(\vec{v}^{\mathrm{card}\sigma^{-1}(1)}, \vec{w}^{\mathrm{card}\sigma^{-1}(1/2)})| \tag{5.3}$$

$$\text{où } S = \{(\vec{v}, \vec{w}); \vec{v} \in \mathbb{C}\vec{\nu}_z, \vec{w} \in T_z^c, |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1\}.$$

On utilise (a) pour majorer

$$\begin{aligned} E = &\ \mathrm{d}(z, \partial D)^{1/2 \ \mathrm{card}\{\sigma^{-1}(1) \cap [h+1, \cdots, h+k]\}} \\ &\sup_S |d^{h+k} f(z)(\vec{v}^{\mathrm{card}\sigma^{-1}(1)}, \vec{w}^{\mathrm{card}\sigma^{-1}(1/2)})| \end{aligned}$$

avec $\ell = \mathrm{card}\{\sigma^{-1}(1) \cap [1, \cdots, h]\}, m = \mathrm{card}\{\sigma^{-1}(1) \cap [h+1, \cdots, h+k]\}$ et $p = \mathrm{card}\ \sigma^{-1}(1/2)$.
On a $\ell + m + p = h + k$ et $\ell + \frac{m+p}{2} \leq h + \frac{k}{2}$ et donc

$$E \leq C_1 C_2^{h+\frac{k}{2}} (h+k)! \left(h + \left\|\frac{k}{2}\right\|\right)!^{\frac{1}{\alpha}}$$

On déduit de là, en utilisant (5.1), (5.2) et (5.3)

$$|\mathrm{d}^{h+k} f(z)(\vec{a}_1, \cdots, \vec{b}_k)| \leq C_1 (C_2 4 C^2)^{h+\frac{k}{2}} A^k (h+k)! \left(h + \left\|\frac{k}{2}\right\|\right)!^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On a donc établi (c).

6. - REMARQUE. Si f appartient à $G_{1+1/\alpha}(D)$ ou à $G_{1+1/\alpha}^{NI}(V \cap D)$ toutes ses dérivées se prolongent à ∂D et y vérifient les mêmes estimations.

7. - PROPOSITION. *$G_{1+1/\alpha}(D)$ et $G_{1+1/\alpha}^{NI}(V \cap D)$ sont des algèbres, invariantes par dérivation.*

PREUVE. Il s'agit là d'un résultat classique pour les classes de Gevrey isotropes. On utilise la définition (a) pour établir la proposition pour les classes de Gevrey non isotropes.

CHAPITRE II

Définitions de $A_{1+1/\alpha}(D)$ et propriétés relatives de $A_{1+1/\alpha}(D)$ et $G^{NI}_{1+1/\alpha}(V \cap D)$

Dans ce chapitre et le suivant, les constantes $A_i, i \in \mathbb{N}$, ne dépendent que de α et de la géométrie du domaine.

1. - DÉFINITIONS. Soit α un réel, $0 < \alpha$.

DÉFINITION (a) - Une fonction f appartient à $A_{1+1/\alpha}(D)$ si et seulement si f est holomorphe dans D et appartient à $G_{1+1/\alpha}(D)$ c'est-à-dire, d'après (I.3.1), s'il existe des constantes C_1 et $C_2, C_1 \geq 0, C_2 \geq 1$ telles que, pour tout z de D et tout h-uple de vecteurs unitaires $(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h)$, on ait

$$|\mathrm{d}^h f(z)(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_h)| \leq C_1 C_2^h h!^{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

DÉFINITION (b) - Une fonction f appartient à $A_{1+1/\alpha}(D)$ si et seulement si f est holomorphe dans D et s'il existe des constantes C_1 et $C_2, C_1 \geq 0$ et $C_2 \geq 1$ telles que, pour tout entier h, tout z de D et tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}^n$, on ait

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial \vec{v}^k}(z)\right| \leq C_1 C_2^k k!^{1+1/\alpha}.$$

DÉFINITION (c) - Une fonction f appartient à $A_{1+1/\alpha}(D)$ si et seulement si f est holomorphe dans D et s'il existe des constantes C_1 et $C_2, C_1 \geq 0$ et $C_2 \geq 1$ telles que, pour tout z de D et tout multi-indice $H = (h_1, \cdots, h_n)$ de longueur $h = h_1 + \cdots + h_n$, on ait

$$\left|\frac{\partial^h f}{\partial z_1^{h_1} \cdots \partial z_n^{h_n}}(z)\right| \leq C_1 C_2^h h!^{1+1/\alpha}.$$

2. - PROPOSITION. *Les définitions* (a), (b) *et* (c) *sont équivalentes.*

PREUVE. Il s'agit là d'une conséquence d'un résultat de [4, page 88] déjà utilisé dans la preuve de la proposition I.5.

3. - PROPOSITION. *Il existe V voisinage convenable de ∂D tel que l'on ait*

$$A_{1+1/\alpha}(D) \subset G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V).$$

PREUVE. Il existe un voisinage V de ∂D, un compact W de D et des constantes strictement positives A_0 et $A_1, A_0 < 1, A_1 > 1$ telles que, pour tout z de $D \cap V$, il existe z_0 dans $W, z_0 = z - \lambda_0 \vec{\nu}_z$ avec $\lambda_0 > 0$ tel que les propriétés suivantes soient vérifiées

(3.1) le segment $[z_0, z]$ est inclus dans D, (3.2) pour tout vecteur unitaire $\vec{w}_z$ de T_z^c

$$\bigcup_{\varsigma\in[z_0,z]} \{\varsigma + \lambda\vec{v}_z + \mu\vec{w}_z; (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2, |\lambda|\le A_0\mathrm{d}(\varsigma,\partial D), |\mu|\le\sqrt{A_0\mathrm{d}(\varsigma,\partial D)}\}$$

est compact dans D,

(3.3) pour tout ς de $[z_0,z]$,

$$\mathrm{d}(z,\partial D) + [\varsigma - z| \le A_1\mathrm{d}(\varsigma,\partial D).$$

Il s'agit là d'une conséquence du fait que D est un ouvert connexe borné à frontière de classe C^2.

Soit donc f une fonction de $A_{1+1/\alpha}(D\cap V)$. Soit z un point de $D\cap V$. Alors, pour tout entier j et tout ς de $[z_0,z]$, on peut appliquer la formule de Cauchy à la fonction $\frac{\partial^j f}{\partial \vec{v}_z^j}$ holomorphe sur le polydisque

$$\left\{\varsigma + \lambda\vec{v}_z + \mu\vec{w}_z; (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2, |\lambda|\le A_0\mathrm{d}(\varsigma,\partial D), |\mu|\le\sqrt{A_0\mathrm{d}(\varsigma,\partial D)}\right\}.$$

On a alors, pour tout triplet d'entiers (j,h,p), tout ς de $[z_0,z]$ et tout vecteur unitaire $\vec{w}_z$ de T_z^c

$$\left|\frac{\partial^{j+h+p} f}{\partial\vec{v}_z^{j+h}\partial\vec{w}_z^p}(\varsigma)\right| \le h!p!\frac{1}{[A_0\mathrm{d}(\varsigma,\partial D)]^{h+\frac{p}{2}}}\sup_{z\in D}\left|\frac{\partial^j f}{\partial\vec{v}_z^j}(z)\right|. \tag{3.4}$$

Pour estimer $\dfrac{\partial^{\ell+m+p} f}{\partial\vec{v}_z^{\ell+m}\partial\vec{w}_z^p}(z)$, pour tout triplet d'entiers (ℓ,m,p) et tout vecteur unitaire $\vec{w}_z$ de T_z^c, on utilise la formule de Taylor avec reste intégral le long de $[z_0,z]$ à l'ordre k. On a donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^{\ell+m+p} f}{\partial\vec{v}_z^{\ell+m}\partial\vec{w}_z^p}(z)\right| &\le \sum_{s=0}^{k}\frac{1}{s!}\left|\frac{\partial^{\ell+m+p+s} f}{\partial\vec{v}_z^{\ell+m+s}\partial\vec{w}_z^p}(z_0)\right| |z-z_0|^s \\ &+ \frac{1}{k!}\int_0^{|z-z_0|}\left(|z-z_0|-t\right)^k\left|\frac{\partial^{\ell+m+p+k+1} f}{\partial\vec{v}_z^{\ell+m+k+1}\partial\vec{w}_z^p}(\varsigma(t))\right|\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.5}$$

où $\varsigma(t)$ est le point défini par $\varsigma(t) = z_0 + t\vec{v}_z, t\in\mathbb{R}^+$.

On se propose maintenant de majorer chacune des deux expressions E_1 et E_2 figurant dans le membre de droite de l'inégalité (3.5).

Pour majorer E_1, on utilise (3.4) avec $j=0, h=\ell+m+s$ et $\varsigma=z_0$.

$$E_1 \le \sup_{z'\in D}|f(z')|\sum_{s=0}^{k}\frac{(\ell+m+s)!p!}{s!}\frac{|z-z_0|^s}{[A_0\mathrm{d}(z_0,\partial D)]^{\ell+m+s+\frac{p}{2}}}$$

et donc, d'après (3.3),

$$E_1 \leq \sup_{z' \in D} |f(z')|(\ell+m)!p! \frac{2^{\ell+m}}{[A_0 \mathrm{d}(z_0, \partial D)]^{\ell+m+\frac{p}{2}}} \sum_{s=0}^{k} (2A_1A_0^{-1})^s.$$

Ainsi, si on note $A_2 = 2A_1A_0^{-1}$, on a

$$\text{(3.6)} \qquad \mathrm{d}(z, \partial D)^{\frac{m}{2}} E_1 \leq \sup_{z' \in D} |f(z')| \frac{(\ell+m+p)!}{\mathrm{d}(z_0, \partial D)^{\ell+\frac{m+p}{2}}} (4A_0^{-2}A_1)^{\ell+\frac{m+p}{2}} A_2^{k+1}.$$

On majore maintenant E_2 en utilisant à nouveau (3.4) avec $j = k+1$, $h = \ell+m$ et $\varsigma = \varsigma(t)$. On a

$$E_2 \leq \sup_{z' \in D} \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \vec{\nu}_z^{k+1}}(z') \right| \frac{1}{k!}(\ell+m)!p! \int_0^{|z-z_0|} \frac{(|z-z_0|-t)^k}{[A_0 \mathrm{d}(\varsigma(t), \partial D)]^{\ell+m+\frac{p}{2}}} \mathrm{d}t$$

et donc, en utilisant à nouveau (3.3),

$$\mathrm{d}(z, \partial D)^{\frac{m}{2}} E_2 \leq \sup_{z' \in D} \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \vec{\nu}_z^{k+1}}(z') \right| \frac{1}{k!}(\ell+m)!p!(A_0^{-2}A_1^2)^{\ell+\frac{m+p}{2}} \int_0^{|z-z_0|} (|z-z_0|-t)^{k-(\ell+\frac{m+p}{2})} \mathrm{d}t.$$

Ainsi, donc, si on choisit $k = \ell + \|\frac{m+p}{2}\|$, on a

$$\int_0^{|z-z_0|} (|z-z_0|-t)^{k-(\ell+\frac{m+p}{2})} \mathrm{d}t = \begin{cases} |z-z_0| & \text{si } m+p \text{ est pair} \\ 2\sqrt{|z-z_0|} & \text{si } m+p \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc

$$\mathrm{d}(z, \partial D)^{\frac{m}{2}} E_2 \leq \sup_{z' \in D} \left| \frac{\partial^{k+1}}{\partial \vec{\nu}_z^{k+1}} f(z') \right| \frac{1}{k!}(\ell+m+p)!(A_0^{-2}A_1^2)^{\ell+\frac{m+p}{2}} \cdot \begin{cases} |z-z_0| & \text{si } m+p \text{ est pair,} \\ 2\sqrt{|z-z_0|} & \text{si } m+p \text{ est impair.} \end{cases}$$

Si f appartient à $A_{1+1/\alpha}(D)$, on a

$$\sup_{z' \in D} \left| \frac{\partial^{k+1} f}{\partial \vec{\nu}_z^{k+1}}(z') \right| \leq C_1 C_2^{k+1}(k+1)!^{1+1/\alpha}$$

et donc

$$\text{(3.7)}\qquad \mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m}{2}} E_2 \leq C_1(2^{1+\frac{1}{\alpha}}C_2)^{k+1}k!^{\frac{1}{\alpha}}(\ell+m+p)!(A_0^{-2}A_1^2)^{\ell+\frac{m+p}{2}}$$

$$\cdot\begin{cases} |z-z_0| & \text{si } m+p \text{ est pair,} \\ 2\sqrt{|z-z_0|} & \text{si } m+p \text{ est impair,}\end{cases}$$

avec $k=\ell+\|\frac{m+p}{2}\|$.

En reprenant (3.6) et (3.7), on déduit qu'il existe une constante $A_3, A_3>1$, telle que l'on ait, pour tout z de $V\cap D$, pour tout multi-indice (ℓ,m,p), pour tout vecteur unitaire $\vec{w}_z$ de T_z^c,

$$\left|\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^{\ell+m+p}f}{\partial\vec{v}_z^{\ell+m}\partial\vec{w}_z^p}(z)\right| \leq C_1(C_2A_3)^{\ell+\frac{m+p}{2}+1}(\ell+m+p)!\left(\ell+\left\|\frac{m+p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha}.$$

Ceci, compte tenu de la $\mathbb{C}$-linéarité de $\frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial\vec{v}_z^{\ell+m}\partial\vec{w}_z^p}f(z)$, établit l'appartenance de f à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(V\cap D)$.

CHAPITRE III

Dérivées et polynômes de Taylor non isotropes

Dans tout ce qui suit f désigne une fonction de classe C^∞ sur $\overline{D}\cap V$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. - DÉFINITION. Soit z un point de $\overline{D}\cap V$. Soient j et k deux entiers, $(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_j)$ des vecteurs de $\mathbb{C}^n\simeq\mathbb{R}^{2n}$. On appelle dérivée non isotrope d'ordre j et de poids k de f au point z et on note

$$({}^{NI}\mathrm{d}^{j,k}f)(z)(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_j)=\sum_\tau \mathrm{d}^jf(z)(\Pi_{\tau(1),z}(\vec{v}_1),\cdots,\Pi_{\tau(j),z}(\vec{v}_j))$$

où τ parcourt l'ensemble des applications de $[1,\cdots,j]$ dans $[\frac{1}{2},1]$ telles que $\sum\limits_{i=1}^{j}\tau(i)\leq k$.

2. - REMARQUE. Si $j\leq k$, on a ${}^{NI}\mathrm{d}^{j,k}f\equiv\mathrm{d}^jf$ et si $j>2k$, ${}^{NI}\mathrm{d}^{j,k}f\equiv 0$.

3. - DÉFINITION. Soient k un entier, ς dans $\overline{D}\cap V$ et z dans $\mathbb{C}^n$, on appelle

polynôme de Taylor non isotrope de poids k de f au point ς et on note

$$(T^k_\varsigma f)(z) = \sum_q \frac{1}{q!}({}^{NI}\mathrm{d}^{q,k} f)(\varsigma)((z-\varsigma)^q),$$

$z - \varsigma$ étant ici, considéré comme vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$.

4. - LEMME [3, page 17]

a) $({}^{NI}\mathrm{d}^{j,k}(T^k_\varsigma f))(\varsigma) = (\mathrm{d}^j(T^k_\varsigma f))(\varsigma) = ({}^{NI}\mathrm{d}^{j,k} f)(\varsigma)$

b) $T^k_{z_0}\left(f(z) - T^k_{z_0} f(z)\right)(z_0) = 0.$

5. - NOTATION ET REMARQUES.

En tout point ς de $\overline{D} \cap V$, on désigne par $(\vec{e}_{j,\varsigma})_{j=1,\cdots,2n}$ une base orthonormée de $T_\varsigma(\mathbb{C}^n)$ telle que $(\vec{e}_{i,\varsigma}), i = 3, \cdots, 2n$, engendrent T^c_ς et $\vec{e}_{1,\varsigma}, \vec{e}_{2,\varsigma}$ engendrent $\mathbb{C}\vec{\nu}_\varsigma$ avec $\vec{e}_{1,\varsigma} = \vec{\nu}_\varsigma$.

On notera $x_\varsigma(z)$ le système de coordonnées réelles représentant le vecteur $z - \varsigma$ dans la base $(\vec{e}_{i,\varsigma}), i = 1, \cdots, 2n$.

Soit $J = (j_1, \cdots, j_{2n})$ un multi-indice dans $\mathbb{N}^{2n}$. On note la longueur de J par $j = j_1 + \cdots + j_{2n}$ et on pose $J! = j_1! \cdots j_{2n}!$.

On note également le poids de J par $\omega(J)$

$$\omega(J) = j_1 + j_2 + \sum_{i=3}^{2n} \frac{j_i}{2}.$$

Pour tout x de $\mathbb{R}^{2n}, x = (x_1, \cdots, x_{2n})$, on note

$$x^J = x_1^{j_1} \cdots x_{2n}^{j_{2n}}.$$

Dans ce système de coordonnées, on a, pour tout entier k, pour tout ς de $\overline{D} \cap V$ et pour tout z de $\mathbb{C}^n$,

$$(5.1) \qquad (T^k_\varsigma f)(z) = \sum_{\substack{J \\ \omega(J) \le k}} \frac{1}{J!} \frac{\partial^j f}{\partial x_{1,\varsigma}^{j_1} \cdots \partial x_{2n,\varsigma}^{j_{2n}}}(\varsigma) x^J_\varsigma(z).$$

6. - On note δ un nombre réel plus grand que 1 et que le pseudodiamètre de D, c'est-à-dire ici la borne supérieure des $\rho(z, \varsigma), z \in \overline{D}, \varsigma \in \overline{D} \cap V$.

LEMME. *Il existe une constante $A_6, A_6 \ge 1$ telle que, pour tout ς de $V \cap \overline{D}$, tout $r, 0 \le r \le \delta$, tout t de $\mathbb{C}^n$ vérifiant $\rho(t, \varsigma) \le r$, tout h-uple de vecteurs $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_h)$ de norme inférieure à 1, tout k-uple de vecteurs $(\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k)$ de norme inférieure à 1, on ait*

$$(6.1) \qquad |\mathrm{d}^{h+k} x^J_\varsigma(t)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_h, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k)| \le A_6^{\omega(J)}(h+k)!, \text{ si } h+k \le j$$

et

$$\mathrm{d}^{h+k} x_\varsigma^J = 0, \ si\ h+k > j. \tag{6.2}$$

Si les vecteurs $\vec{w}_i, i = 1, \cdots, k$ *vérifient la propriété suivante: il existe* $A \geq 1$ *tel que, l'on ait*

$$|\Pi_{1,\varsigma} \vec{w}_i| \leq A\sqrt{r}, \ pour\ tout\ i = 1, \cdots, k,$$

alors, on a, si $\omega(J) \geq h + \frac{k}{2}$ *et* $h + k \leq j$,

$$|\mathrm{d}^{h+k} x_\varsigma^J(t)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_h, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k)| \leq A_6^{\omega(J)}(h+k)! A^k r^{\omega(J)-(h+\frac{k}{2})}. \tag{6.3}$$

Si on a, à la fois,

$$|\Pi_{1,\varsigma} \vec{w}_i| \leq A\sqrt{r}, \ pour\ tout\ i = 1, \cdots, k\ et$$

$$|\Pi_{\frac{1}{2},\varsigma} \vec{v}_i| \leq A\sqrt{r}, \ pour\ tout\ i = 1, \cdots, h,$$

alors, on a, si $h + \frac{k}{2} > \omega(J)$ *et* $h + k \leq j$,

$$|\mathrm{d}^{h+k} x_\varsigma^J(t)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_k)| \leq A_6^{\omega(J)}(h+k)! A\sqrt{r}. \tag{6.4}$$

PREUVE. Soit Q un multi-indice de longueur q, on a clairement

$$\frac{\partial^q x_\varsigma^J}{\partial \vec{e}_{1,\varsigma}^{\,q_1} \cdots \partial \vec{e}_{2n,\varsigma}^{\,q_{2n}}}(t) = \frac{J!}{(J-Q)!}\ x_\varsigma^{J-Q}(t), \ \text{si } J \geq Q,$$

et donc

$$\left| \left(\frac{\partial^q x_\varsigma^J}{\partial \vec{e}_{1,\varsigma}^{\,q_1} \cdots \partial \vec{e}_{2n,\varsigma}^{\,q_{2n}}} \right)(t) \right| \leq 2^j q! r^{\omega(J)-\omega(Q)} \leq 2^j q! \delta^{\omega(J)-\omega(Q)}. \tag{6.5}$$

Si $Q > J$ ou bien si Q n'est pas comparable à J pour la relation d'ordre sur les multi-indices, on a

$$\left(\frac{\partial^q x_\varsigma^J}{\partial \vec{e}_{1,\varsigma}^{\,q_1} \cdots \partial \vec{e}_{2n,\varsigma}^{\,q_{2n}}} \right)(t) = 0. \tag{6.6}$$

On note $\vec{w}_1 = \vec{v}_{h+1}, \cdots, \vec{w}_k = \vec{v}_{h+k}$ et on décompose chaque $\vec{v}_i$ dans la base $(\vec{e}_{i,\varsigma}), i = 1 \cdots 2n$. On a $\vec{v}_i = (v_{i,1}, \cdots, v_{i,2n})$ et

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^{h+k} x_\varsigma^J(t)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{h+k}) \\ &= \sum_\sigma \frac{\partial^{h+k} x_\varsigma^J}{\partial x_{\sigma(1),\varsigma} \cdots \partial x_{\sigma(h+k),\varsigma}}(t) v_{1,\sigma(1)} \cdots v_{h+k,\sigma(h+k)} \end{aligned} \tag{6.7}$$

la sommation étant faite sur toutes les applications σ de $[1,\cdots,h+k]$ dans $[1,\cdots,2n]$.

On note

$$\omega(\sigma) = \text{ card } \sigma^{-1}[1,2] + \frac{1}{2} \text{ card } \sigma^{-1}[3,\cdots,2n].$$

On a

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{2}(h+k) + \frac{1}{2} \text{ card } \sigma^{-1}[1,2], \tag{6.8}$$

De (6.5), (6.6) et (6.7) on déduit clairement (6.1) et (6.2).

On a plus précisément si, pour tout $i = 1\cdots k$, $|\Pi_{1,\varsigma}\vec{v}_{i+h}| \leq A\sqrt{r}$

$$|X_\sigma| = \left|\frac{\partial^{h+k} x_\varsigma^J}{\partial x_{\sigma(1),\varsigma}\cdots\partial x_{\sigma(h+k),\varsigma}}(t) v_{1,\sigma(1)}\cdots v_{h+k.\sigma(h+k)}\right|$$

$$\leq 2^j(h+k)!r^{\omega(J)-\omega(\sigma)}[Ar^{\frac{1}{2}}]^{\text{card}(\sigma^{-1}[1.2]\cap[h+1,\cdots,h+k])}$$

et donc en utilisant (6.8)

$$|X_\sigma| \leq 2^j A^k(h+k)!r^{\omega(J)-\frac{1}{2}(h+k)-\frac{1}{2}\text{ card}(\sigma^{-1}[1,2]\cap[1,\cdots.h])}$$

$$\leq 2^j A^k(h+k)!r^{\omega(J)-(h+\frac{k}{2})}r^{\frac{1}{2}\{h-\text{card}(\sigma^{-1}[1,2]\cap[1,\cdots,h])\}}$$

$$\leq 2^j A^k(h+k)!r^{\omega(J)-(h+\frac{k}{2})}\delta^{\frac{h}{2}}$$

et donc

$$|\sum_\sigma X_\sigma| \leq (2n\delta^{\frac{1}{2}})^{h+k}A^k(h+k)!2^j r^{\omega(J)-(h+\frac{k}{2})}.$$

Ceci établit (6.3) si on a $h+k \leq j$ et $\omega(J) \geq h+\frac{k}{2}$.

Si $\omega(J) < h+\frac{k}{2}$, pour établir (6.4), on décompose chaque vecteur $\vec{v}_i$

$$\vec{v}_i = \vec{u}_{i,1} + \vec{u}_{i,2}, \text{ avec } \vec{u}_{i.1} \in \mathbb{C}\vec{\nu}_\varsigma \text{ et } \vec{u}_{i.2} \in T_\varsigma^c.$$

On a alors

$$(\mathrm{d}^{h+k}x_\varsigma^J)(t)(\vec{v}_1,\cdots\vec{v}_{h+k}) = \sum_\tau(\mathrm{d}^{h+k}x_\varsigma^J)(t)(\vec{u}_{1,\tau(1)},\cdots,\vec{u}_{h+k,\tau(h+k)}) \tag{6.9}$$

la sommation portant sut toutes les applications τ de

$$[1,\cdots,h+k] \text{ dans } [1,2].$$

On a, pour $i \in [1,h]$ et $\tau(i) = 2, |\vec{u}_{i,2}| \leq A\sqrt{r}$ et, pour $i \in [h+1,h+k]$ et $\tau(i) = 1, |\vec{u}_{i.1}| \leq A\sqrt{r}$.

Donc, tous les termes de la somme figurant dans (6.9) ont $A\sqrt{r}$ en facteur sauf un

$$(\mathrm{d}^{h+k}x_\varsigma^J)(t)(\vec{u}_{1.1},\cdots,\vec{u}_{h,1},\vec{u}_{h+1,2},\cdots,\vec{u}_{h+k,2});$$

mais ce terme correspond à des multi-indices de dérivation Q de poids $\omega(Q) = h+\frac{k}{2}$. Or on a $h+\frac{k}{2} > \omega(J)$ et donc ce terme est nul d'après (6.6). On a donc

$$|\mathrm{d}^{h+k}x_\varsigma^J(t)(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{h+k})| \leq A\sqrt{r}(2n)^{h+k}(h+k)!2^j\delta^{\omega(J)}$$

ce qui donne (6.4) si $h+k \leq j$.

7. - THÉORÈME. *Il existe une constante $A_7 \geq 1$ telle que, pour toute fonction f de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(V\cap D)$, tout z_0 de ∂D, tout z de $\overline{D}\cap V$ et tout p entier, on ait,*

$$(7.1) \qquad |f(z) - T^p_{z_0}f(z)| \leq C_1(A_7C_2)^{p+1}(p+1)!^{\frac{1}{\alpha}}\rho(z_0,z)^{p+\frac{1}{2}},$$

et, de plus,

$$(7.2) \qquad \begin{aligned} &|\mathrm{d}^{h+k}(f - T^p_{z_0}f)(z)(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{h+k})| \\ &\leq C_1(C_2A_7)^{p+1}A^k(h+k)!(p+1)!^{\frac{1}{\alpha}}\rho(z_0,z)^{p+\frac{1}{2}-(h+\frac{k}{2})} \end{aligned}$$

pour tout couple d'entiers (h,k) vérifiant $h+\frac{k}{2} \leq p$, tout $A \geq 1$ et toute famille de vecteurs $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{h+k}$ de norme inférieure à 1 vérifiant la propriété:

$$(7.3) \qquad |\langle\vec{\nu}_z,\vec{v}_i\rangle| \leq A\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}, \text{ pour tout } i = h+1,\cdots,h+k.$$

La preuve du théorème nécessite un lemme géométrique.

8. - LEMME. *Il existe des constantes A_8, A_9, A_{10} et A_{11} strictement positives, $A_8 \leq 1, A_9 \geq 1, A_{10} \geq 1, A_{11} \leq 1$ telles que, pour tout z_0 de ∂D, tout $d, 0 < d \leq A_8$ et tout z de $\overline{D}\cap V$ vérifiant $\rho(z_0,z) \leq d$, le chemin linéaire par morceaux formé des trois segments*

$$\gamma_1 = z_0 + [0, -A_9 d\vec{\nu}_{z_0}] = [z_0, z_1]$$

$$\gamma_2 = z_1 + [0, \Pi_{1/2,z_0}(z - z_0)] = [z_1, z_2]$$

$$\gamma_3 = z_2 + [0, \Pi_{1,z_0}(z - z_0) + A_9 d\vec{\nu}_{z_0}] = [z_2, z]$$

soit inclus dans $[(V\cap D)\cup\{z_0,z\}]\cap B(z_0, A_{10}d)$ et vérifie les propriétés suivantes:

a) *pour tout ς de $\gamma_1, \mathrm{d}(\varsigma,\partial D) = |\varsigma - z_0|$,*

b) *pour tout ς de $\gamma_2, \mathrm{d}(\varsigma,\partial D) \geq A_{11}d$,*

c) *pour tout ς de $\gamma_3, \mathrm{d}(\varsigma,\partial D) \geq A_{11}[|z-\varsigma| + \mathrm{d}(z,\partial D)]$.*

9. - REMARQUES. 1°) On déduit du Lemme 8 qu'il existe une constante $A_{12} \geq 1$, telle que si $\vec{w}_0$ est un vecteur de $T^c_{z_0}$ de norme inférieure à 1, on ait, pour tout ς de γ_2,

$$|\langle \vec{\nu}_\varsigma, \vec{w}_0 \rangle| \leq A_{12} \mathrm{d}(\varsigma, \partial D)^{1/2}. \tag{9.1}$$

2°) De même, il existe une constante $A_{13} \geq 1$ telle que si $\vec{w}$ est un vecteur de norme inférieure à 1 vérifiant

$$|\langle \vec{\nu}_z, \vec{w} \rangle| \leq A \mathrm{d}(z, \partial D)^{1/2}$$

on ait, pout tout ς de $\gamma_2 \cup \gamma_3$,

$$|\langle \vec{\nu}_\varsigma, \vec{w} \rangle| \leq A A_{13} \mathrm{d}(\varsigma, \partial D)^{1/2}. \tag{9.2}$$

10. - PREUVE DU THÉORÈME 7. On note $\vec{i}_0$ le vecteur unitaire sur $[z_2, z]$ dirigé de z_2 vers z. Par définition de γ_3 le vecteur $\vec{i}_0$ appartient à $\mathbb{C}\vec{\nu}_{z_0}$. Si z_2 est confondu avec z alors on prend pour $\vec{i}_0$ un vecteur unitaire quelconque de $\mathbb{C}\vec{\nu}_{z_0}$.

De même on note $\vec{j}_0$ le vecteur unitaire sur $[z_1, z_2]$ dirigé de z_1 vers z_2. Par définition de γ_2, $\vec{j}_0$ appartient à $T^c_{z_0}$. Si z_1 est confondu avec z_2, on prend pour $\vec{j}_0$ un vecteur unitaire quelconque de $T^c_{z_0}$.

On pose $g(z) = f(z) - T^p_{z_0} f(z)$.

Soit (h, k) un couple d'entiers quelconques, vérifiant $h + \frac{k}{2} \leq p$ et $\vec{v} = (\vec{v}_i)_{i=1\cdots h+k}$, une famille de vecteurs vérifiant la propriété (7.3). Pour estimer $(\mathrm{d}^{h+k} g)(z)(\vec{v})$ on lui applique la formule de Taylor le long de γ_3 à l'ordre t où t est choisi tel que l'on ait

$$t + h + \frac{k}{2} \leq p < t + 1 + h + \frac{k}{2}. \tag{10.1}$$

On a

$$\mathrm{d}^{h+k} g(z)(\vec{v}) = \sum_{\ell=0}^{t} \frac{1}{\ell!} \mathrm{d}^{h+k+\ell} g(z_2)(\vec{v}, \vec{i}_0^{\,\ell}) |z - z_2|^\ell + R_1 \tag{10.2}$$

avec $|R_1| \leq \frac{1}{(t+1)!} |z - z_2|^{t+1} \sup\limits_{\varsigma \in \gamma_3} |\mathrm{d}^{h+k+t+1} g(\varsigma)(\vec{v}, \vec{i}_0^{\,t+1})|$.

On se propose maintenant d'estimer R_1. On a

$$|\mathrm{d}^{h+k+t+1} g(\varsigma)(\vec{v}, \vec{i}_0^{\,t+1})| \leq |\mathrm{d}^{h+k+t+1} f(\varsigma)(\vec{v}, \vec{i}_0^{\,t+1})| + |\mathrm{d}^{h+k+t+1} T^p_{z_0} f(\varsigma)(\vec{v}, \vec{i}_0^{\,t+1})|$$

avec, d'après (I.4.3) et (9.2)

$$\begin{aligned} &|\mathrm{d}^{h+k+t+1} f(\varsigma)(\vec{v}, \vec{i}_0^{\,t+1})| \\ &\leq C_1 (A A_{13})^k C_2^{h+t+1+\frac{k}{2}} (h+t+1+k)! \left(h + t + 1 + \left\| \frac{k}{2} \right\|\right)!^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

D'après la définition de $T^p_{z_0} f$ et (6.1), on a aussi

$$|\mathrm{d}^{h+k+t+1} T^p_{z_0} f(\varsigma)(\vec{v}, \vec{i}_0^{t+1})| \leq A^p_{14}(h+t+1+k)! C_1 C_2^p p!^{1/\alpha}.$$

On a donc

$$|\mathrm{d}^{h+k+t+1} g(\varsigma)(\vec{v}, \vec{i}_0^{t+1})| \leq C_1 A^k (A_{15}C_2)^{p+1}(h+k)!(t+1)!(p+1)!^{1/\alpha}$$

et ainsi

$$|R_1| \leq C_1 A^k (A_{16}C_2)^{p+1}(h+k)!(p+1)!^{1/\alpha} d^{t+1}.$$

Mais compte tenu de la définition (10.1) de t, on a toujours

$$t+1 \geq p-h-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}.$$

On conclut ainsi

(10.3) $$|R_1| \leq C_1 A^k (A_{16}C_2)^{p+1}(h+k)!(p+1)!^{1/\alpha} d^{p+\frac{1}{2}-(h+\frac{k}{2})}.$$

Pour estimer la somme intervenant dans (10.2) on applique la formule de Taylor à $\mathrm{d}^{h+k+\ell} g(z_2)(\vec{v}, \vec{i_0}^{\ell})$ le long de γ_2. On a

(10.4) $$\mathrm{d}^{h+k+\ell} g(z_2)(\vec{v}, \vec{i_0}^{\ell}) = \sum_{m=0}^{q_\ell} \frac{1}{m!} \mathrm{d}^{h+k+\ell+m} g(z_1)(\vec{v}, \vec{i}_0^{\ell}, \vec{j}_0^{m})|z_1-z_2|^m + R_{2,\ell}$$

avec $$|R_{2,\ell}| \leq \frac{1}{(q_\ell+1)!}|z_1-z_2|^{q_\ell+1} \sup_{\varsigma \in \gamma_2} |d^{h+k+\ell+q_\ell+1} g(\varsigma)(\vec{v}, \vec{i}_0^{\ell}, \vec{j}_0^{q_\ell+1})|$$

où q_ℓ est choisi tel que

(10.5) $$h+\frac{k}{2}+\ell+\frac{q_\ell}{2} \leq p < h+\frac{k}{2}+\ell+\frac{q_\ell+1}{2}.$$

On estime $R_{2,\ell}$ en utilisant les idées qui ont servi précédemment à estimer R_1 et en remarquant que l'on a non seulement, pour tout ς de γ_2,

$$|\langle \vec{\nu}_\varsigma, \vec{v}_i| \leq A A_{13} \mathrm{d}(\varsigma, \partial D)^{1/2}, \quad i = h+1, ..., h+k,$$

mais aussi, d'après (9.1),

$$|\langle \vec{\nu}_\varsigma, \vec{j}_0 \rangle| \leq A_{12} \mathrm{d}(\varsigma, \partial D)^{1/2}.$$

On a alors

$$|\mathrm{d}^{h+k+\ell+q_\ell+1} f(\varsigma)(\vec{v}, \vec{i}_o^{\ell}, \vec{j}_0^{q_\ell+1})|$$

$$\leq C_1 A^k (A_{17}C_2)^{h+\ell+\frac{k+q_\ell+1}{2}}(h+k+\ell+q_\ell+1)! \left(h+\ell+\left\|\frac{k+q_\ell+1}{2}\right\|\right)!^{\frac{1}{\alpha}}$$

et $|\mathrm{d}^{h+k+\ell+q_\ell+1}T^p_{z_0}f(\varsigma)(\vec{v},\vec{i}_0^{\,\ell},\vec{j}_0^{\,q_\ell+1})| \le A_{18}^p(h+k+\ell+q_\ell+1)!C_1C_2^p p!^{1/\alpha}$.

On conclut donc

$$|R_{2,\ell}| \le C_1A^k(A_{19}C_2)^{p+1}(h+k+\ell)!(p+1)!^{1/\alpha}d^{\frac{q_\ell+1}{2}}$$

mais, ici encore, compte tenu de la définition de q_ℓ en (10.5) on a

$$\frac{q_\ell+1}{2} \ge p-h-\frac{k}{2}-\ell+\frac{1}{2}.$$

On conclut donc

$$|R_{2,\ell}| \le C_1A^k(A_{19}C_2)^{p+1}(h+k+\ell)!(p+1)!^{1/\alpha}d^{p-(h+\frac{k}{2})-\ell+1/2}. \tag{10.6}$$

On rassemble (10.2), (10.3), (10.4) et (10.6) pour écrire

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^{h+k}g(z)(\vec{v})\\ &=\sum_{\ell=0}^{t}\sum_{m=0}^{q_\ell}\frac{1}{\ell!}\frac{1}{m!}\mathrm{d}^{h+k+\ell+m}g(z_1)(\vec{v},\vec{i}_0^{\,\ell},\vec{j}_0^{\,m})|z-z_2|^\ell|z_1-z_2|^m+R_2,\end{aligned} \tag{10.7}$$

avec $\qquad |R_2| \le C_1A^k(A_{20}C_2)^{p+1}(h+k)!(p+1)!^{1/\alpha}d^{p+\frac{1}{2}-(h+\frac{k}{2})}$.

Compte tenu des définitions (10.1) et (10.5) de t et q_ℓ, on a

$$\sum_{\ell=0}^{t}\sum_{m=0}^{q_\ell} = \sum_{\substack{\ell,m\\ \ell\ge0,m\ge0,\ell+\frac{m}{2}\le p-(h+\frac{k}{2})}}. \tag{10.8}$$

Pour estimer cette somme double, on décompose chacun des vecteurs $\vec{v}_i$, $i=1,\dots,h+k$ sur $\mathbb{C}\vec{\nu}_{z_0}$ et $T^c_{z_0}$. On a

$$\vec{v}_i=\vec{v}_{i,1}+\vec{v}_{i,1/2} \text{ avec } \vec{v}_{i,1}\in\mathbb{C}\vec{\nu}_{z_0} \text{ et } \vec{v}_{i,1/2}\in T^c_{z_0}.$$

On pose $\vec{v}_{i,1}=|\vec{v}_{i,1}|\vec{u}_{i,1}$ et $\vec{v}_{i,1/2}=|\vec{v}_{i,1/2}|\vec{u}_{1,1/2}$ avec $\vec{u}_{i,1}$ et $\vec{u}_{i,1/2}$ unitaires.

Pour $i=h+1,\dots,h+k$ on a, $|\langle\vec{\nu}_{z_1},\vec{v}_i\rangle| \le AA_{13}\mathrm{d}(z,\partial D)^{1/2}$ et donc

$$|\langle\vec{\nu}_{z_0},\vec{v}_i\rangle| = |\vec{v}_{i,1}| \le AA_{13}\mathrm{d}(z_1,\partial D)^{1/2}. \tag{10.9}$$

On a donc

$$\mathrm{d}^{h+k+\ell+m}g(z_1)(\vec{v},\vec{i}_0^{\,\ell},\vec{j}_0^{\,m})=\sum_\sigma \mathrm{d}^{h+k+\ell+m}g(z_1)(\vec{u}^\sigma,\vec{i}_0^{\,\ell},\vec{j}_0^{\,m})|\vec{v}^\sigma|$$

où σ parcourt l'ensemble des applications de $[1, ..., h + k]$ dans $[\frac{1}{2}, 1]$ et où on note $\vec{u}^\sigma = (\vec{u}_{1,\sigma(1)}, ..., \vec{u}_{h+k,\sigma(h+k)}), |\vec{v}^\sigma| = \prod_{i=1}^{h+k} |\vec{v}_{i.\sigma(i)}|$ et $\omega(\sigma) =$ card $\sigma^{-1}(1) + \frac{1}{2}$card $\sigma^{-1}(\frac{1}{2})$. On déduit de (10.9) que

$$|\vec{v}^\sigma| \leq [AA_{21}\mathrm{d}(z_1, \partial D)^{1/2}]^{\mathrm{card}\{\sigma^{-1}(1)\cap[h+1,...,h+k]\}}.$$

On va étudier dans la somme portant sur σ celles des applications σ pour lesquelles on a $\ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) > p$. En effet, pour elles, on a

$$\mathrm{d}^{h+k+\ell+m} T^p_{z_0} f(z_1)(\vec{u}^\sigma, \vec{i}_0^\ell, \vec{j}_0^m) = 0$$

et donc

$$\text{(10.10)} \qquad |\mathrm{d}^{h+k+\ell+m} g(z_1)(\vec{u}^\sigma, \vec{i}_0^\ell, \vec{j}_0^m)||\vec{v}^\sigma||z - z_2|^\ell |z_1 - z_2|^m$$

$$\leq A^k A_{22}^{p+1} |\mathrm{d}^{h+k+\ell+m} f(z_1)(\vec{u}^\sigma, \vec{i}_0^\ell, \vec{j}_0^m)| d^{\frac{1}{2}\mathrm{card}\ \{\sigma^{-1}(1)\cap[h+1,...,h+k]\}+\ell+\frac{m}{2}}$$

or, quel que soit σ,

$$\begin{aligned}\omega(\sigma) &= h + k - \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\ \sigma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= h + k - \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\left\{\sigma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cap [1, ..., h]\right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}\mathrm{card}\ \left\{\sigma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cap [h + 1, ..., h + k]\right\}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\omega(\sigma) &= h + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\ \left\{\sigma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cap [1, ..., h]\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\ \{\sigma^{-1}(1) \cap [h + 1, ..., h + k]\}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) &= \ell + \frac{m}{2} + h + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\ \left\{\sigma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cap [1, ..., h]\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\ \{\sigma^{-1}(1) \cap [h + 1, ..., h + k]\}.\end{aligned}$$

De là, pour les applications σ qui vérifient $\ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) > p$ on peut écrire

$$\ell + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\ \{\sigma^{-1}(1) \cap [h + 1, ..., h + k]\} = p - \left(h + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{r}{2}$$

avec r entier positif ou nul.

On a alors $\ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) - \frac{r}{2} \leq p+1$ et aussi, puisque $\ell + \frac{m}{2} \leq p - (h + \frac{k}{2})$,

$$r \leq \text{ card } \{\sigma^{-1}(1) \cap [h+1, ..., h+k]\} \leq \text{ card } \sigma^{-1}(1).$$

De ces inégalités, on déduit

$$\begin{aligned}&|\mathrm{d}^{h+k+\ell+m} f(z_1)(\vec{u}^{\sigma}, \vec{i}_0^{\ell}, \vec{j}_0^{m}) d^{\frac{r}{2}}| \\ &\leq C_1(h+k+\ell+m)!(A_{23}C_2)^{\omega(\sigma)+\ell+\frac{m}{2}-\frac{r}{2}} \left\|\omega(\sigma) + \ell + \frac{m}{2} - \frac{r}{2}\right\|!^{1/\alpha}\end{aligned}$$

et donc

$$|\mathrm{d}^{h+k+\ell+m} f(z_1)(\vec{u}^{\sigma}, \vec{i}_0^{\ell}, \vec{j}_0^{m}) d^{r/2}| \leq C_1(h+k+\ell+m)!(A_{23}C_2)^{p+1}(p+1)!^{1/\alpha}.$$

Ainsi, en reprenant (10.10), on a donc, pour les applications σ vérifiant $\ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) > p$

$$\begin{aligned}&|\mathrm{d}^{h+k+\ell+m} g(z_1)(\vec{u}^{\sigma}, \vec{i}_0^{\ell}, \vec{j}_0^{m})||\vec{v}^{\sigma}||z-z_2|^{\ell}|z_1-z_2|^{m} \\ &\leq C_1(h+k+\ell+m)!A^k(C_2A_{24})^{p+1}(p+1)!^{1/\alpha} d^{p+\frac{1}{2}-(h+\frac{k}{2})}.\end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire en reprenant (10.7) et (10.8) et en ne gardant dans la sommation que les applications σ qui vérifient $\ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) \leq p$.

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^{h+k} g(z)(\vec{v}) \\ &= \sum_S \frac{1}{\ell!}\frac{1}{m!}\mathrm{d}^{h+k+\ell+m} g(z_1)(\vec{v}^{\sigma}, \vec{i}_0^{\ell}, \vec{j}_0^{m})|z-z_2|^{\ell}|z_1-z_2|^{m} + R_3\end{aligned} \tag{10.11}$$

où S est $\{(\ell, m, \sigma); \ell \geq 0, m \geq 0, \ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) \leq p, \ell + \frac{m}{2} \leq p - (h + \frac{k}{2})\}$ avec $|R_3| \leq C_1 A^k (C_2 A_{25})^{p+1}(h+k)!(p+1)!^{1/\alpha} d^{p+\frac{1}{2}-(h+\frac{k}{2})}$.

Pour estimer les dérivées intervenant dans la somme figurant dans (10.11), on applique la formule de Taylor sur le segment $[z, z_0]$.

On a

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}^{h+k+\ell+m} g(z_1)(\vec{v}^{\sigma}, \vec{i}_0^{\ell}, \vec{j}_0^{m}) \\ &= \sum_{s=0}^{s_\sigma} \frac{1}{s!}\mathrm{d}^{h+k+\ell+m+s} g(z_0)(\vec{u}^{\sigma}, \vec{i}_0^{\ell}, \vec{j}_0^{m}, \vec{\nu}_{z_0}^{s})|\vec{v}^{\sigma}|(-A_9 d)^s + R^{\ell,m,\sigma}\end{aligned} \tag{10.12}$$

où s_σ est l'entier qui vérifie $s_\sigma + \ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) \leq p < s_\sigma + 1 + \ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma)$. De la définition de $T_{z_0}^p$, on déduit que l'on a

$$\mathrm{d}^{h+k+\ell+m+s} g(z_0)(\vec{u}^{\sigma}, \vec{i}_0^{\ell}, \vec{j}_0^{m}, \vec{\nu}_{z_0}^{s}) = 0 \text{ pour } s + \ell + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) \leq p.$$

Ensuite, en reprenant les idées utilisées pour la majoration de R_1, on a

$$|R_{\ell,m,\sigma}| \leq C_1 A^k (C_2 A_{26})^{p+1} (h+k+\ell+m)! \\ (p+1)!^{1/\alpha} d^{s_\sigma + 1 + \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\{\sigma^{-1}(1)\cap[h+1,\dots,h+k]\}}$$

mais on a $s_\sigma + 1 + \frac{m}{2} + \omega(\sigma) \geq p + \frac{1}{2}$ et, en utilisant (10.9),

$$s_\sigma + 1 + \ell + \frac{m}{2} + h + \frac{k}{2} - \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\ \left\{\sigma^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cap [1,\dots,h]\right\} \\ + \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\ \{\sigma^{-1}(1) \cap [h+1,\dots,h+k]\} \geq p + \frac{1}{2}$$

on conclut

$$s_\sigma + 1 + \frac{1}{2}\ \mathrm{card}\ \{\sigma^{-1}(1) \cap [h+1,\dots,h+k]\} \geq p - \left(\ell + \frac{m}{2}\right) - \left(h + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

De là, on a

$$|R_{\ell,m,\sigma}| \\ \leq C_1 A^k (C_2 A_{26})^{p+1} (h+k+\ell+m)!(p+1)!^{1/\alpha} d^{p-(\ell+\frac{m}{2})-(h+\frac{k}{2})+\frac{1}{2}} \tag{10.13}$$

et donc, en reportant (10.13) dans (10.12), puis dans (10.11),

$$|\mathrm{d}^{h+k} g(z)(\vec{v})| \leq C_1 A^k (C_1 A_{26})^{p+1} (h+k)!(p+1)!^{1/\alpha} d^{p+\frac{1}{2}-(h+\frac{k}{2})}.$$

On a donc établi (7.2) en utilisant le Lemme 8 dans le cas où $\rho(z_0, z) \leq A_8$. Dans le cas où $\rho(z_0, z) > A_8$, l'estimation (7.2) est immédiate à partir des définitions en utilisant le Lemme 6.

11. - PROPOSITION. *Pour tout z_0 de ∂D, tout entier p et tout fonction f de classe C^∞ dans $V \cap \overline{D}, T^p_{z_0} f$ est l'unique polynôme Q en $z - \varsigma$ considéré comme vecteur de $\mathbb{R}^{2n}$, de degré inférieur ou égal à $2p$ tel que l'on ait*

$$^{NI}\mathrm{d}^{k,P} Q(z_0) = \mathrm{d}^k Q(z_0), \text{ pour tout } k, \tag{11.1}$$

$$|f(z) - Q(z)| = O(\rho(z_0, z)^p). \tag{11.2}$$

PREUVE. Il suffit comme dans [3] d'écrire le polynôme Q en coordonnées locales.

CHAPITRE IV

Partitions de l'unité non isotropes

Les constantes, $B_i, i \in \mathbb{N}$, intervenant dans ce chapitre ne dépendent que de α et de la géometrie du domaine.

1. - DÉFINITIONS. Soit α un réel, $0 < \alpha$.
On note, pour tout $r > 0$,

$$N(r) = \min\{p \in \mathbb{N}; \inf_k (k!^{1/\alpha} r^k) = p!^{1/\alpha} r^p\} \tag{1.1}$$

et

$$h(r) = \inf_k k!^{1/\alpha} r^k. \tag{1.2}$$

On vérifie aisément que la fonction $k \to k!^{1/\alpha} r^k$ est décroissante pour $k \leq N(r)$, puis croissante pour $k > N(r)$ et qu'il existe $r_0 < 1$ tel que, pour tout $r, 0 < r < r_0$, on ait

$$\frac{r^{-\alpha}}{2} \leq N(r) \leq 2r^{-\alpha} \tag{1.3}$$

et

$$\exp\left[-\frac{2}{\alpha} r^{-\alpha}\right] \leq h(r) \leq \exp\left[-\frac{r^{-\alpha}}{2\alpha}\right]. \tag{1.4}$$

On utilisera également le fait qu'il existe une constante $\lambda, 0 < \lambda < 1$ telle que, pour tout r, $0 < r < r_0$, on ait

$$2N(r) \leq N(\lambda r). \tag{1.5}$$

2. - LEMME [9]. *Soit β un réel, $0 < \beta$. Il existe une constante $B(\beta)$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 1$, il existe une fonction $\Phi_{\varepsilon,t,\beta}$ de $G_{1+1/\beta}(\mathbb{R})$ vérifiant*

a) $0 \leq \Phi_{\varepsilon,t,\beta}(x) \leq 1$, *pour tout x de $\mathbb{R}$,*

b) $\Phi_{\varepsilon,t,\beta}(x) = 1$, *pour tout x de $\mathbb{R}, |x| \leq 1$,*

c) $\Phi_{\varepsilon,t,\beta}(x) = 0$, *pour tout x* de $\mathbb{R}, |x| \geq t$.

d) $|d^j \Phi_{\varepsilon,t,\beta}(x)(\vec{v}^j)| \leq \varepsilon^j (j!)^{1+1/\beta} \exp B(\beta)[\varepsilon(t-1)]^{-\beta}$, *pout tout x* de $\mathbb{R}$, *tout entier j et tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{R}$.*

3. - LEMME. *Soient α et k deux réels, $\alpha > 0$, $k > 1$. Il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout z_0 de $V \cap \overline{D}$, pour tout $\eta > 0$ et pour tout $r, 0 < r \leq 1$ il existe une fonction ψ de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V)$ vérifiant*

a) $0 \leq \psi(z) \leq 1$, *pour tout* z,

b) $\psi(z) = 1$, si z appartient à $B(z_0, r)$,

c) $\psi(z) = 0$, *si* z n'appartient pas à $B(z_0, kr)$,

d) $|r^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}^{\ell+m} \partial \vec{w}^p} \psi(z)| \leq \eta^{\ell+\frac{m+p}{2}} (\ell+m+p)!(\ell+\|\frac{m+p}{2}\|)!^{1/\alpha} \exp B(\eta r)^{-\alpha}$,

pour tout z de $V \cap \overline{D}$, tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), tout vecteur $\vec{v}$ unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur $\vec{w}$ unitaire de T^c_z.

PREUVE. Soit z_0 un point de $V \cap \overline{D}$. On pose

$$\psi(z) = \psi_1(|z_1|) \cdot \psi_2(|z_2|) \tag{3.1}$$

où $z_1 = \Pi_{1/2, z_0}(z - z_0)$ et $z_2 = \Pi_{1, z_0}(z - z_0)$

et

$$\psi_1(u) = \Phi_{\sqrt{\eta r}, \sqrt{k}, 2\alpha}\left(\frac{u}{\sqrt{r}}\right) \tag{3.2}$$

$$\psi_2(u) = \Phi_{\sqrt{\eta r}, k, 2\alpha}\left(\frac{u}{r}\right). \tag{3.3}$$

Les projections $\Pi_{1/2, z_0}$ et Π_{1, z_0} ont été définies en (I.1.3) et (I.1.4), la boule $B(z_0, r)$ en (I.1.5).

Les propriétés a), b) et c) sont clairement vérifiées compte tenu du lemme 2 et de la définition (I.1.5).

Pour établir d), on procède en deux étapes. On montre d'abord qu'il existe une constante B_1 telle que l'on ait

$$\begin{aligned} &\left| r^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}_0^{\ell+m} \partial \vec{w}_0^p} \psi(z) \right| \\ &\leq \eta^{\ell+\frac{m+p}{2}} (\ell+m+p)! \left(\ell + \left\| \frac{m+p}{2} \right\| \right)!^{1/\alpha} \exp B_1(\eta r)^{-\alpha} \end{aligned} \tag{3.4}$$

pour tout z de $B(z_0, kr)$, tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), tout vecteur $\vec{v}_0$ unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_{z_0}$ et tout vecteur $\vec{w}_0$ unitaire de $T^c_{z_0}$.

Pour cela, on écrit

$$r^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}_0^{\ell+m} \partial \vec{w}_0^p} \psi(z) = r^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m}}{\partial \vec{v}_0^{\ell+m}} \psi_2(|z_2|) \cdot \frac{\partial^p}{\partial \vec{w}_0^p} \psi_1(|z_1|). \tag{3.5}$$

On évalue séparément chacun des facteurs du produit.

Soit

$$I = r^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m}}{\partial \vec{v}_0^{\ell+m}} \psi_2(|z_2|).$$

On a, d'après (3.3) et d) du lemme 2,

$$|I| \leq r^{m/2} \left(\frac{1}{r}\right)^{\ell+m} (\eta r)^{\frac{\ell+m}{2}} (\ell+m)!^{1+1/2\alpha} \exp B_2[\eta r(k-1)]^{-\alpha}.$$

De là, en utilisant les inégalités

$$(\ell+m)! \leq 2^{\ell+m} \ell! m! \quad \text{et} \quad m! \leq 2^{2m} \left\| \frac{m}{2} \right\| !^2,$$

on a

$$|I| \leq 2^{\frac{\ell+3m}{2\alpha}} \eta^{\ell+\frac{m}{2}} (\eta r)^{-\frac{\ell}{2}} \ell!^{-1/2\alpha} (\ell+m)! \ell!^{1/\alpha} \left\| \frac{m}{2} \right\| !^{1/\alpha} \exp\ B_2[\eta r(k-1)]^{-\alpha}.$$

De plus, pour tout ℓ, on a, en utilisant la définition de l'exponentielle

$$\ell!^{-1/2\alpha} (\eta r)^{-\ell/2} \leq \exp\ \frac{1}{2\alpha} (\eta r)^{-\alpha},$$

ce qui permet de conclure

(3.6)
$$|I| \leq 2^{\frac{\ell+3m}{2\alpha}} \eta^{\ell+\frac{m}{2}} (\ell+m)! \ell!^{1/\alpha} \left\| \frac{m}{2} \right\| !^{1/\alpha} \exp\ \left[\frac{1}{2\alpha} + B_2(k-1)^{-\alpha}\right] (\eta r)^{-\alpha}.$$

On considère maintenant

$$J = \frac{\partial^p}{\partial \vec{w}_0^p} \psi_1(|z_1|).$$

On a, d'après (3.2) et d) du lemme 2,

$$|J| \leq \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{p}{2}} (\eta r)^{p/2} p!^{1+1/2\alpha} \exp\ B_2(\sqrt{k}-1)^{-2\alpha} (\eta r)^{-\alpha},$$

(3.7)
$$|J| \leq \eta^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{p}{\alpha}} p! \left\| \frac{p}{2} \right\| !^{\frac{1}{\alpha}} \exp\ B_2(\sqrt{k}-1)^{-2\alpha} (\eta r)^{-\alpha}.$$

De là, en utilisant (3.5), (3.6) et (3.7), on conclut

$$\left| r^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}_0^{\ell+m} \partial \vec{w}_0^p} \psi(z) \right| \leq 2^{\frac{\ell+3m+2p}{2\alpha}} \eta^{\ell+\frac{m+p}{2}} (\ell+m+p)! \left(\ell + \left\| \frac{m+p}{2} \right\| \right)!^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\exp\left[\frac{1}{2\alpha} + 2B_2(\sqrt{k}-1)^{-2\alpha}\right] (\eta r)^{-\alpha}$$

et donc

$$\left| r^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}_0^{\ell+m} \partial \vec{w}_0^{p}} \psi(z) \right| \leq (8^{1/\alpha}\eta)^{\ell+\frac{m+p}{2}} (\ell+m+p)! \left(\ell + \left\| \frac{m+p}{2} \right\| \right)!^{1/\alpha}$$

$$\times \exp\left[\frac{4}{\alpha} + 16B_2(\sqrt{k}-1)^{-2\alpha}\right](8^{1/\alpha}\eta r)^{-\alpha}.$$

Ceci, quitte à changer η en $8^{1/\alpha}\eta$, établit la majoration (3.4).

On se propose maintenant, compte tenu de (3.4), de majorer

$$r^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}^{\ell+m} \partial \vec{w}^{p}} \psi(z) = r^{m/2} \mathrm{d}^{\ell+m+p} \psi(z)(\vec{v}^{\ell+m}, \vec{w}^{p}) \tag{3.8}$$

pour tout z de $B(z_0, kr) \cap V \cap \overline{D}$, tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), tout vecteur $\vec{v}$ unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur $\vec{w}$ unitaire de T_z^c. Pour cela, on remarque qu'il existe une constante B_3 ne dépendant que de la géométrie du domaine D telle que, pour tout z de $B(z_0, kr) \cap V \cap \overline{D}$, tout vecteur $\vec{v}$ unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur $\vec{w}$ unitaire de T_z^c, si on écrit

$$\vec{v} = \vec{v}_{0,1} + \vec{v}_{0,1/2} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{w}_{0,1} + \vec{w}_{0,1/2}$$

avec $\vec{v}_{0,1}$ et $\vec{w}_{0,1}$ dans $\mathbb{C}\vec{\nu}_{z_0}$ et $\vec{\nu}_{0,1/2}$ et $\vec{w}_{0,1/2}$ dans $T_{z_0}^c$, on ait

$$|\vec{v}_{0,1/2}| \leq B_3\sqrt{kr} \quad \text{et} \quad |\vec{w}_{0,1}| \leq B_3\sqrt{kr}.$$

Compte tenu de la $\mathbb{R}$-multilinéarité de $\mathrm{d}^{\ell+m+p}$ et du résultat de [4, page 88], en reprenant des techniques déjà développées dans les précédents chapitres, il suffit, pour majorer (3.8), de majorer des termes de la forme

$$K = r^{\frac{m}{2}} r^{\frac{\ell''+m''}{2}} r^{\frac{p'}{2}} \mathrm{d}^{\ell+m+p} \psi(z)(\vec{u}_{0,1}^{\,\ell'+m'+p'}, \vec{u}_{0,1/2}^{\,\ell''+m''+p''}) \tag{3.9}$$

où $\vec{u}_{0,1}$ est un vecteur unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_{z_0}, \vec{u}_{0.1/2}$ un vecteur unitaire de $T_{z_0}^c, \ell', m', p', \ell'', m'', p''$ des entiers tels que $\ell = \ell' + \ell'', m = m' + m'', p = p' + p''$. On a toujours

$$m + \ell'' + m'' + p' \geq m' + p'$$

et donc

$$|K| \leq r^{\frac{m'+p'}{2}} |\mathrm{d}^{\ell+m+p} \psi(z)(\vec{u}_{0,1}^{\,\ell'+m'+p'}, \vec{u}_{0,1/2}^{\,\ell''+m''+p''})|.$$

On déduit de là, d'après (3.4),

$$|K| \leq \eta^{\ell+\frac{m+p}{2}} (\ell+m+p)! \left(\ell' + \left\| \frac{\ell''+m+p}{2} \right\| \right)!^{1/\alpha} \exp B_1(\eta r)^{-\alpha}$$

et donc

$$|K| \leq \eta^{\ell+\frac{m+p}{2}} (\ell+m+p)! \left(\ell + \left\| \frac{m+p}{2} \right\| \right)!^{1/\alpha} \exp B_1(\eta r)^{-\alpha}$$

ce qui établit l'affirmation d) du lemme, quitte ici aussi à changer η en $B_4\eta$ où B_4 est une constante absolue.

Puisque D est borné, on déduit de d) que ψ appartient à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$.

4. - PROPOSITION [8]. *Il existe des constantes k, a, b et M strictement positives, $a < 1, b > 1, k > 1, M > 1$, telles que si E est un sous-ensemble fermé de ∂D, il existe une famille de boules $\{B(z_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes*

a) $(V\cap\overline{D})\backslash E = (\bigcup\limits_i B(z_i, r_i))\cap(V\cap\overline{D}) = (\bigcup\limits_i B(z_i, kr_i))\cap(V\cap\overline{D})$,

b) *si z appartient à une boule $B(z_i, kr_i)\cap V\cap\overline{D}$, on a, à la fois,*

$$ar_i \leq \rho(z, E) \leq br_i$$

et

$$a\rho(z, E) \leq \rho(z_i, E) \leq b\rho(z, E)$$

où $\rho(z, E) = \inf\limits_{w\in E} \rho(z, w)$,

c) *pour chaque j,* la boule *$B(z_j, kr_j)$ ne peut couper plus de M boules distinctes de la famille $\{B(z_i, kr_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

5. - PROPOSITION. *Soit α un réel, $0 < \alpha$. Il existe des constantes B_5 et B_6 strictement positives telles que, quel que soit $\eta > 0$, il existe une famille de fonctions $\{\varphi_{i,\eta}\}_{i\in\mathbb{N}}$ appartenant à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(V\cap\overline{D})$ vérifiant les propriétés suivantes:*

a) $0 \leq \varphi_{i,\eta} \leq 1$, *pour tout i,*

b) supp $\varphi_{i,\eta} \subset B(z_i, kr_i)$, *pour tout i,*

c) $\sum\limits_i \varphi_{i,\eta}(z) = 1$, *pour tout z de $(V\cap\overline{D})\backslash E$,*

d) *pour tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), tout i, tout z de $(V\cap\overline{D})\backslash E$, tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur unitaire $\vec{w}$ de T^c_z, on a*

$$\left| r_i^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial\vec{v}^{\ell+m}\partial\vec{w}^p}\varphi_{i,\eta}(z)\right|$$
$$\leq B_5\eta^{\ell+\frac{m+p}{2}}(\ell+m+p)!\left(\ell+\left\|\frac{m+p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha} \exp B_6(\eta r_i)^{-\alpha}.$$

PREUVE. Soit k fixé vérifiant la proposition 4. Il existe, d'après le lemme 3, une constante B telle que, quel que soit $\eta > 0$, à la suite $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ introduite dans la proposition 4, on associe une suite de fonctions $\psi_{i,\eta}$ de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$ vérifiant

$$0 \leq \psi_{i,\eta} \leq 1, \tag{5.1}$$

$$\psi_{i,\eta}(z) = 1, \text{ si } z \text{ appartient à } B(z_i, r_i), \tag{5.2}$$

$$\psi_{i,\eta}(z) = 0, \text{ si } z \text{ n'appartient pas à } B(z_i, kr_i), \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} &\left| r_i^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}^{\ell+m} \partial \vec{w}^p} \psi_{i,\eta}(z) \right| \\ &\leq \eta^{\ell+\frac{m+p}{2}} (\ell+m+p)! \left(\ell + \left\| \frac{m+p}{2} \right\| \right)!^{1/\alpha} \exp B(\eta r_i)^{-\alpha}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

pout tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), tout i, tout z de $V \cap \overline{D}$, tout vecteur $\vec{v}$ unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur $\vec{w}$ unitaire de T_z^c.

On pose

$$\begin{aligned} \varphi_{1,\eta} &= \psi_{1,\eta}, \\ \varphi_{2,\eta} &= \psi_{2,\eta}(1-\psi_{1,\eta}), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{j,\eta} &= \psi_{j,\eta}(1-\psi_{1,\eta}) \cdots (1-\psi_{j-1,\eta}), j \geq 2. \end{aligned}$$

Les fonctions $\varphi_{j,\eta}$ appartiennent à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(V \cap \overline{D})$ et vérifient clairement les affirmations a) et b) de la proposition 5.

De plus, on a,

$$\varphi_{1,\eta} + \cdots + \varphi_{i,\eta} = 1 - (1-\psi_{1,\eta})(1-\psi_{2,\eta}) \cdots (1-\psi_{i,\eta})$$

et

$$(V \cap \overline{D}) \backslash E = (\bigcup_i B(x_i, r_i)) \cap (V \cap \overline{D}).$$

Donc, si $z \in (V \cap \overline{D}) \backslash E$, il existe i_z tel que z appartienne à $B(x_{i_z}, r_{i_z})$ et donc tel que la fonction $\psi_{i_z,\eta}$ soit égal à 1 en ce point. De là, on déduit

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_{i,\eta}(z) = 1, \text{ pour tout } z \text{ dans } (V \cap \overline{D}) \backslash E.$$

Ceci établit c).

Pour prouver d), on remarque que, pour tout i, dans l'expression définissant $\varphi_{i,\eta}$ il y a au plus M facteurs différents de 1, ceci se déduit de la propriété (4.c) du recouvrement et de (5.3). De là, en appliquant la règle de dérivation d'un produit, on déduit de (4.b) et de (5.4) qu'il existe des constantes B_5 et B_6 telles que l'on ait, pour tout $\eta > 0$, tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), tout i, tout z

de $V \cap \overline{D}$, tout vecteur $\vec{v}$ unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur $\vec{w}$ unitaire de T_z^c

$$\left| r_i^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}^{\ell+m} \partial \vec{w}^p} \varphi_{i,\eta}(z) \right|$$

$$\leq B_5 \eta^{\ell+\frac{m+p}{2}} (\ell+m+p)! \left(\ell + \left\| \frac{m+p}{2} \right\| \right)!^{1/\alpha} \exp B_6 (\eta r_i)^{-\alpha}.$$

Ceci établit d).

CHAPITRE V

Jets non isotropes et théorème d'extension

Dans tout ce chapitre, les constantes $D_i, i \geq 1$, ne dépendent que de α et de la géométrie du domaine.

1. - DÉFINITION. Soit E un sous-ensemble compact de ∂D. Un jet F sur E est la donnée d'une suite $\{F^k(\varsigma); \varsigma \in E, k \in \mathbb{N}\}$ de k-formes $\mathbb{R}$-linéaires, symétriques, de $(\mathbb{C}^n)^k$ dans $\mathbb{C}$ dépendant continuement du paramètre ς.

Pour tout jet F, tout ς de E et tout entier p, on définit, en reprenant les notations de (III.5), le polynôme de Taylor de F non isotrope $T_\varsigma^p F$, pour tout z de $\mathbb{C}^n$, par

$$T_\varsigma^p F(z) = \sum_{J; \omega(J) \leq p} \frac{1}{J!} F^j(\varsigma)(\vec{e}_{1,\varsigma}^{\,j_1}, \cdots, \vec{e}_{2,\varsigma}^{\,j_{2n}}) x_\varsigma^J(z). \tag{1.1}$$

On peut remarquer que l'on pourrait écrire une définition intrinsèque de $T_\varsigma^p f(z)$ analogue à celle donnée en (I.3).

Dans la suite, on note, pour simplifier l'écriture, pour tout multi-indice J,

$$F^J(\varsigma) = F^j(\varsigma)(\vec{e}_{1,\varsigma}^{\,j_1}, \cdots, \vec{e}_{2n,\varsigma}^{\,j_{2n}}). \tag{1.2}$$

2. - DÉFINITION. Soit α un réel, $0 < \alpha$. Un jet F sur E appartient à la classe de Gevrey non isotrope $G_{1+1/\alpha}^{NI}(E)$ s'il existe des constantes C_1 et $C_2, C_1 \geq 0, C_2 \geq 1$ telles que

a) pour tout ς de E, tout couple d'entiers (h,k), tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_\varsigma$, tout vecteur unitaire $\vec{w}$ de T_ς^c, on ait

$$|F^{h+k}(\varsigma)(\vec{v}^h, \vec{w}^k)| \leq C_1 C_2^{h+\frac{k}{2}} (h+k)! (h + \left\| \frac{k}{2} \right\|)!^{1/\alpha}, \tag{2.1}$$

b) pour tout couple (ς, z) de $E \times E$, tout entier p, tout couple d'entiers (h,k) vérifiant $h + \frac{k}{2} \leq p$, tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$, tout vecteur unitaire

$\vec{w}$ de T_z^c, on ait

$$(2.2)\qquad \begin{aligned}&|(F^{h+k} - \mathrm{d}^{h+k} T_\varsigma^p F)(z)(\vec{v}^h, \vec{w}^k)|\\ &\leq C_1 C_2^{p+1}(h+k)!(p+1)!^{1/\alpha}\rho(\varsigma, z)^{p+\frac{1}{2}-(h+\frac{k}{2})}.\end{aligned}$$

3. - REMARQUE. Si f appartient à $G_{1+1/\alpha}^{NI}(D\cap V)$ alors

$$\{\mathrm{d}^k f(\varsigma), \varsigma \in E, k \in \mathbb{N}\}$$

est un jet appartenant à $G_{1+1/\alpha}^{NI}(E)$. Dans ce chapitre , on s'attache à obtenir une réciproque à cette remarque.

4. - LEMME. *Soit α un réel, $0 < \alpha$. Il existe une constante D_1 telle que, pour tout jet F appartenant à $G_{1+1/\alpha}^{NI}(E)$, tout entier p, tout couple d'entiers (h,k) vérifiant $h + \frac{k}{2} > p$, tout z_0 de E, tout z de $\overline{D}\cap V$, tout vecteur $\vec{v}$ unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$, tout vecteur $\vec{w}$ unitaire de T_z^c, on ait*

$$(4.1)\qquad \left|\frac{\partial^{h+k}}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k} T_{z_0}^p F(z)\right| \leq C_1(D_1C_2)^p(h+k)!p!^{1/\alpha}\rho(z,z_0)^{1/2}.$$

PREUVE. Il existe une constante $D_2 \geq 1$ ne dépendant que de la géométrie du domaine telle que l'on ait

$$|\Pi_{1,z_0}\vec{w}| \leq D_2\rho(z_0,z)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad |\Pi_{1/2,z_0}\vec{v}| \leq D_2\rho(z_0,z)^{1/2}.$$

On a alors d'après (III 6.4), pour tout multi-indice J tel que $\omega(J) \leq p < h + \frac{k}{2}$

$$|\mathrm{d}^{h+k} x_{z_0}^J(z)(\vec{v}^h, \vec{w}^k)| \leq A_6^{\omega(J)}(h+k)!D_2\rho(z_0,z)^{1/2}.$$

De là, en utilisant l'écriture (1.1) et la définition (2.1), on a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^{h+k}}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k} T_{z_0}^p F(z)\right|\\ &\leq (h+k)!D_2\rho(z_0,z)^{1/2} \sum_{J;\omega(J)\leq p} \frac{1}{J!} A_6^{\omega(J)} J! C_1 C_2^{\omega(J)} \|\omega(J)\|!^{1/\alpha}\end{aligned}$$

Ceci établit clairement (4.1).

5. - LEMME. *Soit α un réel, $0 < \alpha$. Il existe une constante $D_3 \geq 1$ telle que, pour tout jet F appartenant à $G_{1+1/\alpha}^{NI}(E)$, tout entier p, tout couple (z_0, z_1) de points de E, tout z de $\overline{D}\cap V$, tout vecteur $\vec{v}$ unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$, tout vecteur $\vec{w}$ unitaire de T_z^c, tout couple d'entiers (h,k), on ait:*

$$\left|\frac{\partial^{h+k}}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}(T_{z_0}^p F - T_{z_1}^p F)(z)\right| \leq (h+k)!C_1(D_3C_2)^{p+1}(p+1)!^{1/\alpha}\rho(z_0,z_1)^{1/2}$$

$$
.\begin{cases} [\rho(z_0,z)+\rho(z_1,z)]^{p-(h+k/2)} & si \quad h+\frac{k}{2}\le p, \\ 1 & si \quad 2p\ge h+k>p, \\ 0 & si \quad h+k>2p. \end{cases}
$$

PREUVE. On écrit le développement de Taylor de la fonction $T^p_{z_0}F - T^p_{z_1}F$ au point z_0. On a

$$
\begin{aligned}
T^p_{z_0}F(z) - T^p_{z_1}F(z) = &\sum_{J;\omega(J)\le p} \frac{1}{J!}[F^j(z_0) - \mathrm{d}^j T^p_{z_1}F(z_0)](\vec{e}^{\,j_1}_{1.z_0},\cdots,\vec{e}^{\,j_{2n}}_{2n,z_0})x^J_{z_0}(z) \\
&- \sum_{J;\omega(J)>p} \frac{1}{J!}\mathrm{d}^j(T^p_{z_1}F)(z_0)(\vec{e}^{\,j_1}_{1,z_0},\cdots,\vec{e}^{\,j_{2n}}_{2n,z_0})x^J_{z_0}(z).
\end{aligned}
$$

On note S_1 le premier terme de la différence et S_2 le second.

On a, en utilisant le lemme III.6 et la définition (2.2), si $h+\frac{k}{2}\le p$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^{h+k}S_1}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}\right| \le (h+k)!C_1C_2^{p+1}(p+1)!^{1/\alpha}\{ &\sum_{J;\omega(J)<h+\frac{k}{2}} \frac{j!}{J!}A_6^{\omega(J)}\rho(z_0,z_1)^{p+\frac{1}{2}-\omega(J)} \\
+ &\sum_{J;p\ge\omega(J)\ge h+\frac{k}{2}} \frac{j!}{J!}A_6^{\omega(J)}D_2^k\rho(z_0,z)^{\omega(J)-(h+\frac{k}{2})}\rho(z_0,z_1)^{p+\frac{1}{2}-\omega(J)}\}
\end{aligned}
$$

et donc, toujours si $h+\frac{k}{2}\le p$,

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad \left|\frac{\partial^{h+k}S_1}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}\right| \le\ &(h+k)!C_1(D_4C_2)^{p+1}(p+1)!^{1/\alpha}[\rho(z_0,z)+ \\
&+\rho(z,z_1)]^{p-(h+\frac{k}{2})}\rho(z_0,z_1)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Si, maintenant $2p\ge h+\frac{k}{2}>p$, on a

$$
\left|\frac{\partial^{h+k}S_1}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}\right| \le (h+k)!C_1C_2^{p+1}(p+1)!^{1/\alpha}\sum_{J;\omega(J)\le p}\frac{j!}{J!}A_6^{\omega(J)}\rho(z_0,z_1)^{p+\frac{1}{2}-\omega(J)}
$$

et donc

$$
(5.2)\qquad \left|\frac{\partial^{h+k}S_1}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}\right| \le (h+k)!C_1(D_5C_2)^{p+1}(p+1)!^{1/\alpha}\rho(z_0,z_1)^{1/2}.
$$

On estime maintenant le deuxième terme. On a, si $h+k/2\le p$, en utilisant (4.1),

$$\left|\frac{\partial^{h+k}S_2}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}\right|$$

$$\leq (h+k)!C_1(D_1C_2)^p p!^{1/\alpha}\rho(z_0,z_1)^{1/2}\sum_{J;\omega(J)>p}\frac{j!}{J!}A_6^{\omega(J)}D_2^k\rho(z_0,z)^{\omega(J)-(h+\frac{k}{2})}$$

et, de là, puisque $2p \geq \omega(J) > p$,

$$\left|\frac{\partial^{h+k}S_2}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}\right| \leq (h+k)!C_1(D_6C_2)^{p+1}(p+1)!^{1/\alpha}\rho(z_0,z)^{p-(h+\frac{k}{2})}\rho(z_0,z_1)^{1/2} \tag{5.3}$$

et, si $2p \geq h+\frac{k}{2} > p$,

$$\left|\frac{\partial^{h+k}S_2}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}\right| \leq (h+k)!C_1(D_1C_2)^p p!^{1/\alpha}\rho(z_0,z_1)^{1/2}\sum_{J:\omega(J)>p}\frac{j!}{J!}A_6^{\omega(J)},$$

donc

$$\left|\frac{\partial^{h+k}S_2}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}\right| \leq (h+k)!C_1(D_7C_2)^{p+1}(p+1)!^{1/\alpha}\rho(z_0,z_1)^{1/2}. \tag{5.4}$$

Le lemme se déduit de (5.1), (5.2), (5.3) et (5.4).

6. - DÉFINITION. Soit E un sous-ensemble fermé de ∂D. Quel que soit z appartenant à $V\cap\overline{D}$, on note $\hat{z}$ un point de E vérifiant $\rho(z,\hat{z})=\rho(z,E)$.

7. - PROPOSITION. *Il existe des constantes D_8, D_9 et D_{10}, supérieures à 1, telles que, pour tout sous-ensemble E compact de ∂D, tout jet F appartenant à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(E)$ vérifiant* (2.a) *et* (2.b), *toute constante $L\geq \max(2, D_8, C_2)$, tout z de $V\cap\overline{D}$ vérifiant $0<\rho(z,E)\leq L^{-1}r_0$, le polynôme $T_{\hat{z}}^{2N[L\rho(z,E)]}F$ vérifie la propriété suivante:*

pour tout triplet (ℓ,m,p) d'entiers, tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur unitaire $\vec{w}$ de T_z^c, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(z,\partial D)^{m/2}\left|\frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial\vec{v}^{\ell+m}\partial\vec{w}^p}T_{\hat{z}}^{2N[L\rho(z,E)]}F(z)\right|\\&\leq C_1(LD_9C_2)^{\ell+\frac{m+p}{2}+1}(\ell+m+p)!\left(\ell+\left\|\frac{m+p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha}\end{aligned} \tag{7.1}$$

et, si $\ell+p/2\leq 2N[L\rho(z,E)]$,

$$\left|\frac{\partial^{\ell+p}}{\partial\vec{v}^\ell\partial\vec{w}^p}T_{\hat{z}}^{2N[L\rho(z,E)]}F(z)-F^{\ell+p}(\hat{z})(\Pi_{1,\hat{z}}\vec{v}^\ell,\Pi_{1/2,\hat{z}}\vec{w}^p)\right| \tag{7.2}$$

$$\leq C_1(LD_{10}C_2)^{\ell+\frac{p}{2}+1}(\ell+p)!\left(\ell+\left\|\frac{p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha}\rho(z,\hat{z})^{1/2}.$$

N.B. a) r_0 et $N(r)$ ont été définis dans IV.1.

b) la notation $\frac{\partial^{h+k}}{\partial\vec{v}^h\partial\vec{w}^k}T_{\hat{z}}^{2N[L\rho(z.E)]}F(z)$ signifie que l'on a dérivé le polynôme $t\to T_{\hat{z}}^{2N[L\rho(z,E)]}(t)$ défini en (1.1) par rapport à $\vec{v}$, h fois et $\vec{w}, k$ fois, puis que l'on a évalué cette dérivation au point z.

PREUVE. Pour simplifier l'écriture, on pose

$$J=(\ell,m,p),\qquad j=\ell+m+p,\qquad \omega(J)=\ell+\frac{m+p}{2}$$

et

$$N[L,w]=N[L\rho(w,E)].$$

De la définition du polynôme de Taylor non isotrope, on déduit

$$\frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial\vec{v}^{\ell+m}\partial\vec{w}^p}T_{\hat{z}}^{2N[L.z]}F(z)=\frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial\vec{v}^{\ell+m}\partial\vec{w}^p}\left\{\sum_{\substack{Q\\ \omega(Q)\leq 2N[L.z]}}\frac{1}{Q!}x_{\hat{z}}^Q(t)F_{(\hat{z})}^Q\right\}(z).$$

Compte tenu du Lemme III.6 on a

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m}{2}}\frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial\vec{v}^{\ell+m}\partial\vec{w}^p}T_{\hat{z}}^{2N[L.z]}F(z)\right|\\ &\leq\sum_{\substack{Q\\ \omega(J)\leq\omega(Q)\leq 2N[L.z]}}j!D_{11}^{\omega(Q)+\omega(J)}\rho(z,E)^{\omega(Q)-\omega(J)}\frac{1}{Q!}|F^Q(\hat{z})|\\ &+\sum_{\substack{Q\\ \omega(Q)\leq 2N[L,z]\\ \omega(Q)<\omega(J)}}j!D_{11}^{\omega(Q)+\omega(J)}\frac{1}{Q!}|F^Q(\hat{z})|.\end{aligned}\tag{7.3}$$

On note $\sum_1$ et $\sum_2$ les deux sommes intervenant au second membre de (7.3).

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_1&\leq\sum_{\substack{Q\\ \omega(J)\leq\omega(Q)\leq 2N[L.z]}}j!D_{12}^{\omega(Q)+\omega(J)}\rho(z,E)^{\omega(Q)-\omega(J)}C_1C_2^{\omega(Q)}\|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}\\ &\leq j!C_1[D_{12}\rho(z,E)^{-1}]^{\omega(J)}\sum_{\substack{Q\\ \omega(J)\leq\omega(Q)\leq 2N[L.z]}}[D_{12}C_2\rho(z,E)]^{\omega(Q)}\\ &\|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}.\end{aligned}$$

De là, en utilisant (IV. 1.5), puisque l'on a $\rho(z,E) < r_0 L^{-1}$, et en remarquant que le nombre de multi-indice Q de même poids $\omega(Q)$ est majoré par $D_{13}^{\omega(Q)}$, on a

$$\sum\nolimits_1 \leq j! C_1 [D_{14}\rho(z,E)^{-1}]^{\omega(J)} \sum_{\substack{\omega(Q) \\ \omega(J) \leq \omega(Q) \leq N[\lambda L, z]}} [D_{14} C_2 \rho(z,E)]^{\omega(Q)} \|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}.$$

On isole dans la somme figurant à droite les termes correspondant à $\omega(Q) = \omega(J)$ et $\omega(Q) = \omega(J) + 1/2$. On a

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &\leq j! C_1 (D_{15} C_2)^{\omega(J)+1} \|\omega(J) + 1\|!^{1/\alpha} \\ &+ j! C_1 [D_{14}\rho(z,E)^{-1}]^{\omega(J)} \sum_{\substack{\omega(Q) \\ \omega(J)+1 \leq \omega(Q) \leq N[\lambda L, z]}} [D_{14} C_2 \rho(z,E)]^{\omega(Q)} \\ &\|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Pour les $\omega(Q)$ intervenant dans la somme de (7.4), on a

$$\|\omega(J)\| + 1 \leq \|\omega(Q)\| \leq N[\lambda L, z]$$

et donc d'après les propriétés de $N(r)$ défini en (IV 1.1)

$$[L\lambda\rho(z,E)]^{\|\omega(Q)\|} \|\omega(Q)\|!^{1/\alpha} \leq [L\lambda\rho(z,E)]^{\|\omega(J)\|+1} \|\omega(J) + 1\|!^{1/\alpha}.$$

On déduit de là, puisque l'on a $L\lambda\rho(z,E) \leq 1$,

$$[L\lambda\rho(z,E)]^{\omega(Q)} \|\omega(Q)\|!^{1/\alpha} \leq [L\lambda\rho(z,E)]^{\|\omega(J)+1\|} \|\omega(J) + 1\|!^{1/\alpha}. \tag{7.5}$$

On utilise (7.5) pour majorer (7.4)

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &\leq j! C_1 (D_{16} L C_2)^{\omega(J)+1} \|\omega(J) + 1\|!^{1/\alpha} \\ &\{1 + \sum_{\substack{\omega(Q) \\ \omega(J)+1 \leq \omega(Q) \leq N[\lambda L, z]}} \left(\frac{D_{14} C_2}{L\lambda}\right)^{\omega(Q)} \}. \end{aligned}$$

De là, si on a

$$\frac{D_{14} C_2}{L\lambda} \leq \frac{1}{2},$$

on obtient

$$\sum\nolimits_1 \leq C_1 (D_{17} L C_2)^{\omega(J)+1} j! \|\omega(J)\|!^{1/\alpha}. \tag{7.6}$$

On estime maintenant le deuxième terme de (7.3). On a

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits_2 \leq \sum_{\substack{Q \\ \omega(Q)\leq\omega(J) \\ \omega(Q)\leq N[L\lambda,z]}} C_1 C_2^{\omega(Q)} j! D_{12}^{\omega(Q)+\omega(J)} \|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}, \\
(7.7)\qquad &\sum\nolimits_2 \leq C_1 D_{12}^{\omega(J)} j! \|\omega(J)\|!^{1/\alpha} \sum_{\substack{\omega(Q) \\ \omega(Q)\leq\omega(J)}} (D_{18}C_2)^{\omega(Q)},
\end{aligned}
$$

$$
(7.8)\qquad \sum\nolimits_2 \leq C_1 (D_{19}C_2)^{\omega(J)+1} j! \|\omega(J)\|!^{1/\alpha}.
$$

On a donc, d'après (7.6) et (7.8),

$$
\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 \leq C_1 (LD_9 C_2)^{\omega(J)+1} j! \|\omega(J)\|!^{1/\alpha},
$$

ce qui achève la preuve de (7.1).

Pour établir (7.2), on sépare la somme définissant $T_{\hat{z}}^{2N[L,z]} F(z)$ en trois sommes. On écrit, si $\ell + p/2 \leq 2N[L,z]$,

$$
T_{\hat{z}}^{2N[L,z]} F(z) = \sum_{\substack{Q \\ \omega(Q)\leq 2N[L,z] \\ \omega(Q)>\ell+p/2}} + \sum_{\substack{Q \\ \omega(Q)\leq 2N[L,z] \\ \omega(Q)<\ell+p/2}} + \sum_{\substack{Q \\ \omega(Q)\leq 2N[L,z] \\ \omega(Q)=\ell+p/2}}
$$

et de là, on a, pour tout couple (ℓ, p) d'entiers vérifiant $\ell + p/2 \leq 2N[L,z]$, tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur unitaire $\vec{w}$ de T_z^c,

$$
(7.9)\qquad \frac{\partial^{\ell+p}}{\partial \vec{v}^{\ell} \partial \vec{w}^{p}} T_{\hat{z}}^{2N[L,z]} F(z) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 .
$$

On utilise alors le lemme III.6 et les calculs développés précédemment pour conclure

$$
(7.10)\qquad \left|\sum\nolimits_1\right| \leq C_1 (D_{20} L C_2)^{\ell+\frac{p}{2}+1} (\ell+p)! \left(\ell + \left\|\frac{p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha} \rho(z,E)^{1/2},
$$

$$
(7.11)\qquad \left|\sum\nolimits_2\right| \leq C_1 (D_{21} C_2)^{\ell+\frac{p}{2}+1} (\ell+p)! \left(\ell + \left\|\frac{p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha} \rho(z,E)^{1/2}.
$$

Pour contrôler $\sum_3$, on écrit

$$
\vec{v} = \Pi_{1,\hat{z}} \vec{v} + \Pi_{1/2,\hat{z}} \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2
$$

$$
\vec{w} = \Pi_{1,\hat{z}} \vec{w} + \Pi_{1/2,\hat{z}} \vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2
$$

et, on a, comme dans la preuve du lemme 4,

$$|\vec{v}_2| \leq D_2\rho(z,E)^{1/2} \quad \text{et} \quad |\vec{w}_1| \leq D_2\rho(z,E)^{1/2}.$$

Pour chaque multi-indice Q intervenant dans la somme $\sum_3$ on a

$$\text{(7.12)} \quad \mathrm{d}^{\ell+p}x_{\hat{z}}^{Q}(z)(\vec{v}^{\ell},\vec{w}^{p}) = \sum_{\substack{\ell'+\ell''=\ell \\ p'+p''=p}} \frac{\ell!p!}{\ell'!\ell''!p'!p''!}\mathrm{d}^{\ell+p}x_{\hat{z}}^{Q}(z)(\vec{v}_1^{\ell'},\vec{v}_2^{\ell''},\vec{w}_1^{p'},\vec{w}_2^{p''}).$$

On remarque tout d'abord que dans chacun des termes de cette somme vérifiant $(\ell',\ell'',p',p'') \neq (\ell,0,0,p)$ il y a $\rho(z,E)^{1/2}$ en facteur. On a donc, en utilisant le lemme III.6,

$$|\mathrm{d}^{\ell+p}x_{\hat{z}}^{Q}(z)(\vec{v}^{\ell},\vec{w}^{p}) - \mathrm{d}^{\ell+p}x_{\hat{z}}^{Q}(z)(\vec{v}_1^{\ell},\vec{w}_2^{p})| \leq (\ell+p)!D_{22}^{\ell+p/2}\rho(z,E)^{1/2}.$$

Ensuite, en reprenant la preuve des estimations III 6.5 et III 6.6, dans le cas où J est différent de Q, on vérifie que, si on note q la longueur de Q, on a

$$|\mathrm{d}^{\ell+p}x_{\hat{z}}^{Q}(z)(\vec{v}_1^{\ell},\vec{w}_2^{p})| \leq (\ell+p)!D_{23}^{\ell+p/2}\rho(z,E)^{1/2}, \text{ si } \ell+p \neq q.$$

On remarque enfin que, si $\ell+p=q, \mathrm{d}^q x_{\hat{z}}^{Q}(z)$ ne dépend pas de z et que l'on peut remplacer les termes correspondants dans (7.12) par $\mathrm{d}^q x_{\hat{z}}^{Q}(\hat{z})$. On obtient alors

$$\text{(7.13)} \quad |\sum\nolimits_3 - \sum_{\substack{Q;q=\ell+p \\ \omega(Q)=\ell+p/2 \\ \omega(Q)\leq 2N[L,z]}} \mathrm{d}^{\ell+p}x_{\hat{z}}^{Q}(\hat{z})(\vec{v}_1^{\ell},\vec{w}_2^{p})\frac{1}{Q!}F^{Q}(\hat{z})|$$
$$\leq C_1(D_{24}C_2)^{\ell+\frac{p}{2}+1}(\ell+p)!\left(\ell+\left\|\frac{p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha}\rho(z,E)^{1/2}.$$

On a, pour tout entier s et tout s-uple de vecteurs $(\vec{t}_1,...,\vec{t}_s)$,

$$\sum_{Q;q=s} \mathrm{d}^s x_{\hat{z}}^{Q}(\hat{z})(\vec{t}_1,...,\vec{t}_s)\frac{1}{Q!}F^{Q}(\hat{z}) = F^s(\hat{z})(\vec{t}_1,...,\vec{t}_s)$$

et, pour tout couple d'entiers (h,k) tout h-uple de vecteurs de $\mathbb{C}\vec{\nu}_{\hat{z}}, (\vec{a}_1,...,\vec{a}_h)$ et tout k-uple de vecteurs de $T_{\hat{z}}^c, (\vec{b}_1,...,\vec{b}_k)$,

$$\sum_{\substack{Q;q=h+k \\ \omega(Q)=h+k/2}} \mathrm{d}^{h+k}x_{\hat{z}}^{Q}(\hat{z})(\vec{a}_1,...,\vec{a}_h,\vec{b}_1,...\vec{b}_k)\frac{1}{Q!}F^{Q}(\hat{z})$$
$$= F^{h+k}(\hat{z})(\vec{a}_1,...,\vec{a}_h,\vec{b}_1,...,\vec{b}_k).$$

On a donc, en reprenant (7.13) puisque $\ell + p/2 \leq 2N[L, z]$

$$
\begin{aligned}
&|\textstyle\sum_3 - F^{\ell+p}(\hat{z})(\vec{v}_1^\ell, \vec{w}_2^p)| \\
(7.14)\qquad &\leq C_1(D_{24}C_2)^{\ell+\frac{p}{2}+1}(\ell+p)!\left(\ell + \left\|\frac{p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha}\rho(z,E)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

De (7.10), (7.11) et (7.14), on déduit l'estimation (7.2).

8. - THÉORÈME D'EXTENSION. *Soit F un jet sur E appartenant à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(E)$. Il existe une fonction $\mathcal{F}$ appartenant à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V)$ telle que l'on ait, pour tout entier k et tout ς de E,*

$$
\mathrm{d}^k \mathcal{F}(\varsigma) = F^k(\varsigma).
$$

De plus, on peut construire $\mathcal{F}$ nulle sur $D \backslash V$.

PREUVE. Soit η et L deux réels strictement positifs. On considère la famille de boules $B(z_i, kr_i)$, $i \in \mathbb{N}$, construite dans IV.4 et la famille de fonctions $\varphi_{i,\eta}$ construite dans IV.5.

On pose, pour tout z de $(\overline{D} \cap V)\backslash E$,

$$
\mathcal{F}_1(z) = \sum_i \varphi_{i,\eta}(z) \cdot T_{\hat{z}_i}^{2N[L\rho(z_i,E)]}(z).
$$

Pour tout choix de η et de L, la fonction $\mathcal{F}_1$ est clairement de classe C^∞ sur $(\overline{D} \cap V)\backslash E$. On va montrer que l'on peut choisir L et η en sorte qu'il existe des constantes D_{26}, D_{27} et ε, strictement positives, $D_{26} \geq 1$, telles que, pour tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), pour tout z de $(\overline{D} \cap V)\backslash E$ vérifiant $\rho(z, E) < \varepsilon$, pour tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur unitaire $\vec{w}$ de T_z^c, on ait

$$
\begin{aligned}
(8.1)\qquad &\left|\mathrm{d}(z, \partial D)^{m/2} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}^{\ell+m} \partial \vec{w}^p} (\mathcal{F}_1 - T_{\hat{z}}^{2N[L\rho(z,E)]}\, F)(z)\right| \\
&\leq C_1(LD_{26}C_2)^{\ell+\frac{m+p}{2}+1}\ (\ell+m+p)!\left(\ell + \left\|\frac{m+p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha} \\
&\exp[-D_{27}\rho(z,E)^{-\alpha}].
\end{aligned}
$$

Les constantes C_1 et C_2 figurant ici sont celles qui interviennent dans les inégalités (2.1) et (2.2) portant, par hypothèse, sur le jet F.

Pour simplifier l'écriture, on utilise à nouveau les notations

$$
N[L\rho(z_i, E)] = N[L, z_i] \qquad \text{et} \qquad N[L\rho(z, E)] = N[L, z].
$$

On a donc, pour tout z de $(\overline{D}\cap V)\backslash E$,

$$\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial\vec{v}^{\ell+m}\partial\vec{w}^{p}}\,\mathcal{F}_1\right)(z)$$

$$=\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial\vec{v}^{\ell+m}\partial\vec{w}^{p}}\left(\sum_i\varphi_{i,\eta}\,T_{\hat{z}_i}^{2N[L,z_i]}F\right)\right)(z)$$

$$=\sum_i\sum_{\substack{\ell'+\ell''=\ell\\ m'+m''=m\\ p'+p''=p}}\frac{\ell!m!p!}{\ell'!\ell''!m'!m''!p'!p''!}\,\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m''}{2}}\left(\frac{\partial^{\ell''+m''+p''}}{\partial\vec{v}^{\ell''+m''}\partial\vec{w}^{p''}}\,\varphi_{i,\eta}\right)(z)$$

$$\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m'}{2}}\left(\frac{\partial^{\ell'+m'+p'}}{\partial\vec{v}^{\ell'+m'}\partial\vec{w}^{p'}}\,T_{\hat{z}_i}^{2N[L,z_i]}F\right)(z)$$

et, de là, en utilisant les propriétés (IV.4.c) et (IV.5.c),

$$\begin{aligned}(8.2)\qquad &\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m}{2}}\,\frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial\vec{v}^{\ell+m}\partial\vec{w}^{p}}\,(\mathcal{F}_1-T_{\hat{z}}^{2N[L,z]}F)(z)\\ &=\sum_{\substack{\ell'+\ell''=\ell\\ m'+m''=m\\ p'+p''=p}}\frac{\ell!m!p!}{\ell'!\ell''!m'!m''!p'!p''!}\sum_i\\ &\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m''}{2}}\left(\frac{\partial^{\ell''+m''+p''}}{\partial\vec{v}^{\ell''+m''}\partial\vec{w}^{p''}}\,\varphi_{i,\eta}\right)(z)\\ &\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m'}{2}}\frac{\partial^{\ell'+m'+p'}}{\partial\vec{v}^{\ell'+m'}\partial\vec{w}^{p'}}(T_{\hat{z}_i}^{2N[L,z_i]}F-T_{\hat{z}}^{2N[L,z]}F)(z).\end{aligned}$$

On va maintenant considérer, pour ℓ',m',p' et i fixés, l'expression

$$(8.3)\qquad E_0=\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m'}{2}}\,\frac{\partial^{\ell'+m'+p'}}{\partial\vec{v}^{\ell'+m'}\partial\vec{w}^{p'}}\,(T_{\hat{z}_i}^{2N[L,z_i]}F-T_{\hat{z}}^{2N[L,z]}F)(z)$$

sachant que z appartient à la boule $B(z_i,kr_i)$. On écrit alors

$$E_0=E_1+E_2$$

avec

$$(8.4)\qquad E_1=\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m'}{2}}\,\frac{\partial^{\ell'+m'+p'}}{\partial\vec{v}^{\ell'+m'}\partial\vec{w}^{p'}}\,(T_{\hat{z}_i}^{2N[L,z_i]}F-T_{\hat{z}}^{2N[L,z_i]}F)(z),$$

$$(8.5)\qquad E_2=\mathrm{d}(z,\partial D)^{\frac{m'}{2}}\,\frac{\partial^{\ell'+m'+p'}}{\partial\vec{v}^{\ell'+m'}\partial\vec{w}^{p'}}\,(T_{\hat{z}}^{2N[L,z_i]}F-T_{\hat{z}}^{2N[L,z]}F)(z).$$

Estimation de E_1

Il suffit d'étudier le cas $\ell' + m' + p' \leq 4N[L, z_i]$. On utilise le Lemme 5

$$(8.6)\quad |E_1| \leq (\ell' + m' + p')! C_1 (D_3 C_2)^{2N[L,z_i]+1} \ (2N[L, z_i] + 1)!^{1/\alpha} \rho(\hat{z}_i, \hat{z})^{1/2}$$

$$\times \begin{cases} [\rho(z, \hat{z}_i) + \rho(z, \hat{z})]^{2N[L,z_i]-(\ell' + \frac{m'+p'}{2})} & , \text{ si } \ell' + \frac{m'+p'}{2} \leq 2N_i, \\ 1 & , \text{ si } 4N_i \geq \ell' + \frac{m'+p'}{2} > 2N_i, \\ 0 & , \text{ si } \ell' + \frac{m'+p'}{2} > 4N_i. \end{cases}$$

On note maintenant $N_i = N[L, z_i] = N[L\rho(z_i, E)]$.

On note également

$$J = \ell' + m' + p', \quad \omega(J) = \ell' + \frac{m' + p'}{2}, \quad j = \ell' + m' + p'.$$

Puisque z appartient à la boule $B(z_i, kr_i)$ il existe, d'après (IV.4.b) une constante $K > 1$ telle que l'on ait

$$\rho(z, \hat{z}_i) \leq K\rho(z_i, E), \quad \rho(z, \hat{z}) \leq K\rho(z_i, E) \quad \text{et} \quad \rho(\hat{z}, \hat{z}_i) \leq K\rho(z_i, E).$$

On a donc si $\omega(J) \leq 2N_i$

$$\begin{aligned} |E_1| &\leq j! \ C_1 (D_3 C_2)^{2N_i+1} (2N_i + 1)!^{1/\alpha} K^{1/2} \rho(z_i, E)^{1/2} [2K\rho(z_i, E)]^{2N_i - \omega(J)} \\ &\leq j! \ C_1 (D_3 C_2)^{2N_i+1} \ 2^{2N_i/\alpha} \ (2N_i)!^{1/\alpha} \ K^{1/2} \rho(z_i, E)^{1/2} [2K\rho(z_i, E)]^{2N_i - \omega(J)}. \end{aligned}$$

On va utiliser les inégalités suivantes

$$(2N_i)!^{1/\alpha} \leq 2^{2N_i/\alpha} \ (N_i!)^{2/\alpha},$$
$$N_i!^{1/\alpha} [L\rho(z_i, E)]^{N_i} \leq \|\omega(J)\|!^{1/\alpha} [L\rho(z_i, E)]^{\|\omega(J)\|}$$

et, à condition de supposer,

$$Lb\rho(z, E) < r_0$$
$$(N_i!)^{1/\alpha} [L\rho(z_i, E)]^{N_i} \leq \exp\left[-\frac{1}{2\alpha} \ [L\rho(z_i, E)]^{-\alpha}\right].$$

On a donc

$$|E_1| \leq j! \|\omega(J)\|!^{1/\alpha} C_1 \ K^{1/2} \ D_3 C_2 \ \left(\frac{D_{28} C_2}{L}\right)^{2N_i} \ L^{\|\omega(J)\|}$$
$$.\rho(z_i, E)^{\|\omega(J)\| + 1/2 - \omega(J)} \ \exp\left[-\frac{1}{2\alpha} \ [L\rho(z_i, E)]^{-\alpha}\right]$$

et donc, puisque $Lb\rho(z,E) < r_0$ implique $\rho(z,E) < 1$, on obtient, en utilisant de plus IV.4.b,

$$|E_1| \leq j!\|\omega(J)\|!^{1/\alpha} C_1 C_2 D_{29} \left(\frac{D_{28}C_2}{L}\right)^{2N_i} L^{\|\omega(J)\|} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha}\,[Lb\rho(z,E)]^{-\alpha}\right].$$

Si on impose maintenant

$$L > \max(D_{28}C_2, e)$$

on a

$$|E_1| \leq j!\|\omega(J)\|!^{1/\alpha}\ C_1 C_2 D_{29}\ L^{\|\omega(J)\|}\ \exp\left[-\frac{1}{2\alpha}\,[Lb\rho(z,E)]^{-\alpha}\right];$$

ceci achève le cas $\omega(J) \leq 2N_i$.

On considère maintenant le cas $\omega(J) > 2N_i$ et $j \leq 4N_i$.

On a, en reprenant (8.6) et les idées précédentes

$$\begin{aligned}|E_1| &\leq j!\ C_1(D_3C_2)^{2N_i+1}\ 2^{2N_i/\alpha}(2N_i)!^{1/\alpha}\ K^{1/2}\ \rho(z_i,E)^{1/2}\\ &\leq j!\|\omega(J)\|!^{1/\alpha}\ C_1 D_{30}(D_{31}C_2)^{2N_i+1}\\ &\leq j!\|\omega(J)\|!^{1/\alpha}\ C_1 D_{30}(D_{31}C_2)^{2N_i+1}\ L^{\omega(J)}\ L^{-\omega(J)}.\end{aligned}$$

Mais, en utilisant IV.1.3, on a, puisque Log $L > 1$

$$L^{-\omega(J)} \leq L^{-2N_i} \leq e^{-2N_i} \leq \exp[-[L\rho(z_i,E)]^{-\alpha}]$$

et donc

$$|E_1| \leq j!\|\omega(J)\|!^{1/\alpha}\ C_1 D_{30}\ (D_{31}C_2)^{2N_i+1}\ L^{\omega(J)}\ \exp[-[Lb\rho(z,E)]^{-\alpha}].$$

On a donc, dans tous les cas,

$$(8.7)\qquad |E_1| \leq C_1\ (D_{32}C_2L)^{\omega(J)+1}\ j!\|\omega(J)\|!^{1/\alpha}\ \exp[-[LD_{33}\rho(z,E)]^{-\alpha}].$$

Estimation de E_2

On a donc ici à dériver un polynôme

$$T_{\hat z}^{2N[L\rho(z_i,E)]}F - T_{\hat z}^{2N[L\rho(z,E)]}F$$

dont les monômes sont de poids $\omega(Q)$, vérifiant

$$2N[Lb\rho(z,E)] \leq \omega(Q) \leq 2N[La\rho(z,E)] \leq N[\lambda La\rho(z,E)]$$

d'après (IV.1.5) et (IV.4.b), puisque l'on a supposé

$$La\rho(z,E) < Lb\rho(z,E) < r_0.$$

On a alors, en reprenant les calculs faits dans la preuve de la Proposition 7,

$$(8.8)\quad \begin{aligned} |E_2| \leq & \sum_{\substack{Q \\ 2N[Lb,z]\leq\omega(Q)\leq N[\lambda La,z] \\ \omega(J)\leq\omega(Q)}} j!\ D_{11}^{\omega(Q)+\omega(J)}\ \rho(z,E)^{\omega(Q)-\omega(J)} \frac{1}{Q!}\ |F^Q(\hat{z})| \\ & + \sum_{\substack{Q \\ 2N[Lb,z]\leq\omega(Q)\leq N[\lambda La.z] \\ \omega(J)>\omega(Q)}} j!\ D_{11}^{\omega(Q)+\omega(J)}\ \frac{1}{Q!}\ |F^Q(\hat{z})|. \end{aligned}$$

On écrit

$$|E_2| \leq \Sigma_1' + \Sigma_2'.$$

On majore d'abord Σ_1'.

$$\begin{aligned} \Sigma_1' \leq & j!\ C_1\ (D_{12}\rho(z,E)^{-1})^{\omega(J)} \\ & \times \sum_{\substack{Q \\ 2N[Lb,z]\leq\omega(Q)\leq N[\lambda La,z] \\ \omega(J)\leq\omega(Q)}} (D_{12}C_2\rho(z,E))^{\omega(Q)}\ \|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

En isolant, comme dans la preuve de la proposition 7, les termes, s'il existent, correspondant à $\omega(J)$ et $\omega(J)+\frac{1}{2}$ et en remplaçant la sommation sur Q par la sommation sur les demi-entiers $\omega(Q)$, on a, comme en (7.4),

$$(8.9)\quad \begin{aligned} \Sigma_1' \leq & j!\ C_1(D_{15}C_2)^{\omega(J)+1}\|\omega(J)+1)\|!^{1/\alpha} + j!\ C_1[D_{14}\rho(z,E)^{-1}]^{\omega(J)} \\ & \times \sum_{\substack{\omega(Q) \\ 2N[Lb,z]\leq\omega(Q)\leq N[\lambda La,z] \\ \omega(J)+1\leq\omega(Q)}} [D_{14}C_2\rho(z,E)]^{\omega(Q)}\ \|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

D'après IV.1, on a

$$\|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}[L\lambda a\rho(z,E)]^{\|\omega(Q)\|} \leq (2N[Lb,z])!^{1/\alpha}[L\lambda a\rho(z,E)]^{2N[Lb.z]}$$

et donc, puisque $L\lambda a\rho(z,E) < 1$,

$$\|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}[L\lambda a\rho(z,E)]^{\omega(Q)} \leq (2N[Lb,z])!^{1/\alpha}\ [L\lambda a\rho(z,E)]^{2N[Lb,z]}.$$

On a aussi

$$(2N[Lb,z])!^{1/\alpha} \leq (2^{2N[Lb,z]})^{1/\alpha}\ N[Lb,z]!^{2/\alpha}$$

$$N[Lb,z]!^{1/\alpha}[Lb\rho(z,E)]^{N[Lb,z]} \leq \exp\left[-\frac{1}{2\alpha}\ [Lb\rho(z,E)]^{-\alpha}\right]$$

$$N[Lb,z]!^{1/\alpha}[Lb\rho(z,E)]^{N[Lb,z]} \leq \|\omega(J)+1\|!^{1/\alpha}[Lb\rho(z,E)]^{\|\omega(J)\|+1}.$$

Ces inégalités permettent de majorer le deuxième terme de la somme figurant dans (8.9) par

$$j!\ C_1(LD_{34}C_2)^{\omega(J)+1}\|\omega(J)\|!^{1/\alpha}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha}\ [Lb\rho(z,E)]^{-\alpha}\right\}\sum_{2N[Lb,z]\le\omega(Q)\le N[\lambda La,z]}\left(\frac{2^{1/\alpha}D_{14}C_2}{La\lambda}\right)^{\omega(Q)}$$

où le premier terme n'existe que si $\omega(J)\ge 2N[Lb,z]$; on utilise alors les inégalités

$$L^{-\omega(J)}\le L^{-2N[Lb,z]}\le \exp\{-[Lb\rho(z,E)]^{-\alpha}\}.$$

On conclut alors, en supposant

$$\frac{D_{35}C_2}{L}=\frac{2^{1/\alpha}D_{14}C_2}{La\lambda}<1/2,$$

que l'on a

$$\text{(8.10)}\qquad \Sigma_1'\le j!\ C_1\ (LD_{36}C_2)^{\omega(J)+1}\|\omega(J)\|!\ \exp\{-[LD_{37}\ \rho(z,E)]^{-\alpha}\}.$$

On se propose maintenant de majorer Σ_2'. On a, comme en 7.7,

$$\sum\nolimits_2'\le\sum_{\substack{Q\\ 2N[Lb,z]<\omega(Q)\le N[\lambda La,z]\\ \omega(J)>\omega(Q)}} C_1\ C_2^{\omega(Q)}\ D_{12}^{\omega(J)+\omega(Q)}\ \|\omega(Q)\|!^{1/\alpha}$$

et donc

$$\Sigma_2'\le C_1\ D_{12}^{\omega(J)}\ j!\ \|\omega(J)\|!^{1/\alpha}\sum_{\substack{\omega(Q)\\ \omega(Q)<\omega(J)}}(D_{18}C_2)^{\omega(Q)}$$

$$\le C_1\ (D_{19}C_2)^{\omega(J)+1}\ j!\ \|\omega(J)\|!^{1/\alpha}.$$

De la, comme plus haut, on a, puisque Σ_2' n'existe que si $\omega(J)\ge 2N[Lb,z]$,

$$\text{(8.11)}\qquad \Sigma_2'\le C_1(LD_{19}C_2)^{\omega(J)+1}\ j!\ \|\omega(J)\|!^{1/\alpha}\ \exp[-Lb\rho(z,E)]^{-\alpha}.$$

On déduit donc de (8.10) et (8.11)

$$|E_2|\le C_1\ (LD_{38}C_2)^{\omega(J)+1}\ j!\ \|\omega(J)\|!^{1/\alpha}\ \exp[-LD_{39}\rho(z,E)]^{-\alpha}.$$

On a donc, pour tout L vérifiant

$$\text{(8.12)}\qquad L\ge\max(e,D_{28}C_2,2D_{35}C_2,D_8C_2),$$

si on note

$$\varepsilon=\frac{r_0}{Lb},$$

pour tout triplet d'entiers (ℓ', m', p'), pour tout entier i, pour tout z appartenant à $B(z_i, kr_i) \cap (\overline{D} \cap V)\backslash E$ et vérifiant $\rho(z, E) < \varepsilon$, pour tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur unitaire $\vec{w}$ de T^c_z

$$\left| \mathrm{d}(z, \partial D)^{\frac{m'}{2}} \, \frac{\partial^{\ell'+m'+p'}}{\partial \vec{v}^{\ell'+m'} \partial \vec{w}^{p'}} \, (T^{2N[L, z_i]}_{\hat{z}_i} \, F - T^{2N[L, z]}_{\hat{z}} F)(z) \right|$$

$$\leq C_1 (L D_{40} C_2)^{\ell' + \frac{m'+p'}{2} + 1} \, (\ell' + m' + p')! \left(\ell' + \left\| \frac{m'+p'}{2} \right\| \right) !^{1/\alpha}$$

$$\exp[-[L D_{41} \rho(z, E)]^{-\alpha}].$$

De là, en utilisant (8.2), (IV.4.c) et (IV.5.d), on a

$$\left| \mathrm{d}(z, \partial D)^{\frac{m}{2}} \, \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}^{\ell+m} \partial \vec{w}^{p}} \, (\mathcal{F}_1 - T^{2N[L, z]}_{\hat{z}} \, F)(z) \right|$$

$$\leq \sum_{\substack{\ell'+\ell''=\ell \\ m'+m''=m \\ p'+p''=p}} \frac{\ell! m! p!}{\ell'! \ell''! m'! m''! p'! p''!} \; M \; B_5 \; \eta^{\ell'' + \frac{m''+p''}{2}}$$

$$(\ell'' + m'' + p'')! \left(\ell'' + \left\| \frac{m''+p''}{2} \right\| \right) !^{1/\alpha}$$

$$\exp \; [B_6 \eta a \rho(z, E)]^{-\alpha} \;\; C_1 (L \; D_{40} C_2)^{\ell' + \frac{m'+p'}{2} + 1}$$

$$(\ell' + m' + p')! \left(\ell' + \left\| \frac{m'+p'}{2} \right\| \right) !^{1/\alpha} \exp\{-[L D_{41} \rho(z, E)]^{-\alpha}\}$$

$$\leq C_1 \;\; M \;\; B_5 \;\; (L D_{40} C_2)(\eta + L D_{40} C_2)^{\ell + \frac{m+p}{2}} \;\; (\ell + m + p)!$$

$$\left(\ell + \left\| \frac{m+p}{2} \right\| \right) !^{1/\alpha} \;\; \exp[(B_6 \eta a)^{-\alpha} - (L D_{41})^{-\alpha}] \rho(z, E)^{-\alpha}.$$

L étant fixé, vérifiant (8.12), on choisit η tel que l'on ait

$$(B_6 \eta a)^{-\alpha} = \frac{1}{2} \; (L D_{41})^{-\alpha}$$

c'est-à-dire

$$\eta = 2^{1/\alpha} \; \left(\frac{L D_{41}}{B_6 a} \right).$$

Alors il existe des constantes D_{26}, D_{27} et ε ne dépendant que de α et de la géométrie du domaine telles que, pour tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), tout z de $(\overline{D} \cap V)\backslash E$, vérifiant $\rho(z, E) < \varepsilon$, tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$, tout vecteur unitaire $\vec{w}$ de T^c_z, on ait (8.1). Puisque d'après (8.12) on a $L \geq D_8 C_2$, on a à la fois les inégalités (8.1) et (7.1). En conséquence, pour tout z de $(V \cap \overline{D})\backslash E$

vérifiant $\rho(z, E) < \frac{r_0}{Lb}$, tout triplet d'entiers (ℓ, m, p), tout vecteur unitaire $\vec{v}$ de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$ et tout vecteur unitaire $\vec{w}$ de T_z^c, on a

$$\left|\mathrm{d}(z, \partial D)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^{\ell+m+p}}{\partial \vec{v}^{\ell+m} \partial \vec{w}^p} \mathcal{F}_1(z)\right| \tag{8.13}$$
$$\leq C_1 (L D_{42} C_2)^{\ell+\frac{m+p}{2}+1} (\ell+m+p)! \left(\ell + \left\|\frac{m+p}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha}.$$

En utilisant les idées du chapitre IV on peut construire une fonction χ appartenant à $G_{1+1/\alpha}^{NI}(V \cap D)$, valant 1 dans un voisinage ouvert W de E dans $V \cap \overline{D}$ et nulle si $\rho(z, E) > \frac{r_0}{Lb}$. La fonction $\mathcal{F}$ définie par $\mathcal{F} = \chi \mathcal{F}_1$ appartient alors à $G_{1+1/\alpha}^{NI}(V \cap D)$.

On déduit maintenant de (8.1) et de (7.2) que, pour tout couple d'entiers (ℓ, p), tout z de $D \cap V$ dans un voisinage de E dépendant de ℓ et de p, tout vecteur $\vec{v}$ unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$, tout vecteur $\vec{w}$ unitaire de T_z^c, on a

$$\left|\frac{\partial^{\ell+p}}{\partial \vec{v}^\ell \partial \vec{w}^p} \mathcal{F}_1(z) - F^{\ell+p}(\hat{z})(\Pi_{1,\hat{z}} \vec{v}^\ell,\ \Pi_{1/2,\hat{z}} \vec{w}^p)\right| \leq C \rho(z, E)^{1/2} \tag{8.14}$$

où C est une constante dépendant de $\ell, p, C_1, C_2, \alpha$ et de la géométrie du domaine.

Soit alors z_0 un point de E, (ℓ, p) un couple d'entiers, $\vec{v}_0$ un vecteur unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_{z_0}$ et $\vec{w}_0$ un vecteur unitaire de $T_{z_0}^c$. Dans un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de z_0 dans $\overline{D} \cap V$ on peut définir des fonctions continues $z \to \vec{v}_z$ et $z \to \vec{w}_z$ de telle sorte que, pour tout z dans $\mathcal{O}$, $\vec{v}_z$ appartienne à $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$, $\vec{w}_z$ à T_z^c et que l'on ait $\vec{v}_{z_0} = \vec{v}_0$ et $\vec{w}_{z_0} = \vec{w}_0$.

On a alors

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\partial^{\ell+p} \mathcal{F}_1(z)}{\partial \vec{v}_z^\ell \partial \vec{w}_z^p} = \frac{\partial^{\ell+p} \mathcal{F}_1(z_0)}{\partial \vec{v}_0^\ell \partial \vec{w}_0^p},$$

$$\lim_{z \to z_0} \Pi_{1,\hat{z}}\, \vec{v}_z = \vec{v}_0 \quad \text{et} \quad \lim_{z \to z_0} \Pi_{1/2,\hat{z}} \vec{w}_z = \vec{w}_0.$$

De là, on conclut, en utilisant (8.14),

$$\frac{\partial^{\ell+p} \mathcal{F}}{\partial \vec{v}_0^\ell \partial \vec{w}_0^p}(z_0) = \frac{\partial^{\ell+p}\ \chi \mathcal{F}_1}{\partial \vec{v}_0^\ell \partial \vec{w}_0^p}\ (z_0) = F_{(z_0)}^{\ell+p}(\vec{v}_0^\ell, \vec{w}_0^p).$$

Ceci achève la preuve du théorème 8.

CHAPITRE VI

Solution de l'équation $\overline{\partial} u = f$ dans les classes de Gevrey isotropes

Les constantes K_i, $i \in \mathbb{N}$, intervenant dans ce chapitre ne dépendent que de α et de la géométrie du domaine.

1. - Dans ce chapitre et les suivants, D est un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à frontière ∂D de classe C^2.

Pour α, $\alpha > 0$ et q entier, $0 \leq q \leq \eta$, $G^{0,q}_{1+1/\alpha}(D)$ désigne l'ensemble des $(0, q)$ formes dans D dont les coefficients appartiennent à $G_{1+1/\alpha}(D)$ [I.3].

2. - REMARQUE. Si u appartient à $G^{0,q}_{1+1/\alpha}(D)$, les dérivées des coefficients de u se prolongent à ∂D et y vérifient les estimations I.3.1.

3. - LEMME [13]. *Il existe un voisinage U_1 de $\overline{D}$, un voisinage V_1 de ∂D, $V_1 \subset U_1$ et une application w de classe C^1 de $U_1 \times V_1$ dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant les propriétés suivantes*:

a) *pour tout ς de V_1, w est holomorphe en z dans U_1,*

b) *il existe une constante $K_1, K_1 > 0$, telle que, si on note*

$$\Phi(z, \varsigma) = (w(z, \varsigma), \varsigma - z) = \sum_{i=1}^{n} w_i(z, \varsigma)(\varsigma_i - z_i), \tag{3.1}$$

pour tout z dans D et tout ς dans $U_1 \backslash D$ on ait

$$|\Phi(z, \varsigma)| \geq K_1 |z - \varsigma|^2. \tag{3.2}$$

4. - DÉFINITIONS ET NOTATIONS. D_0 désigne un domaine borné à frontière de classe C^∞ tel que l'on ait

$$\overline{D} \subset D_0 \subset \overline{D}_0 \subset D \cup V_1.$$

En suivant [12], on note, pour tout ς

$$\omega = \omega(\varsigma) = d\varsigma_1 \wedge d\varsigma_2 \wedge \cdots \wedge d\varsigma_n, \tag{4.1}$$

et, pour tout z de D, tout ς de $D_0 \backslash D$ et tout λ de $[0, 1]$, on pose

$$\begin{aligned} \eta(z, \varsigma, \lambda) &= (1 - \lambda) \frac{w(z, \varsigma)}{\Phi(z, \varsigma)} + \lambda \frac{\overline{\varsigma} - \overline{z}}{|\varsigma - z|^2} \\ &= (\eta_1(z, \varsigma, \lambda), \eta_2(z, \varsigma, \lambda), \cdots, \eta_n(z, \varsigma, \lambda)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

et

$$(4.3)\quad \overline{\Theta}(z,\varsigma,\lambda) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\ \eta_j(z,\varsigma,\lambda) \bigwedge_{k\neq j}(\overline{\partial}_\varsigma + \overline{\partial}_z + \mathrm{d}_\lambda)(\eta_k(z,\varsigma,\lambda)).$$

η et $\overline{\Theta}$ sont continues sur un voisinage W dans $D \times \mathbb{C}^n \times [0,1]$ de $D \times (D_0 \backslash D) \times [0,1]$ et, puisque l'on a

$$(\eta(z,\varsigma,\lambda),\ \varsigma - z) = 1 \qquad \text{dans } W,$$

on a, au sens des courants, sur W

$$(4.4)\qquad (\overline{\partial}_\varsigma + \overline{\partial}_z + \mathrm{d}_\lambda)(\overline{\Theta} \wedge \omega) = 0.$$

On note

$$(4.5)\qquad \omega'(\overline{\varsigma} - \overline{z}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\ (\overline{\varsigma}_j - \overline{z}_j) \bigwedge_{k\neq j}(\mathrm{d}\overline{\varsigma}_k - \mathrm{d}\overline{z}_k).$$

On a alors

$$(4.6)\qquad \overline{\Theta}(z,\varsigma,\lambda) \wedge \omega(\varsigma)|_{\lambda=1} = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\ \frac{\omega'(\overline{\varsigma}-\overline{z}) \wedge\ \omega(\varsigma)}{|\varsigma - z|^{2n}}$$

et

$$(4.7)\ \overline{\Theta}(z,\varsigma,\lambda) \wedge \omega(\varsigma)|_{\lambda=0}$$
$$= \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\frac{1}{\Phi(z,\varsigma)^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} w_j(z,\varsigma) \bigwedge_{k\neq j}(\overline{\partial}_\varsigma + \overline{\partial}_z)(w_k(z,\varsigma)) \wedge \omega(\varsigma).$$

5. - PROPOSITION. *Soit q un entier, $1 \leq q \leq n$ et f une $(0,q)$ forme de classe C^∞, à support compact dans D_0, vérifiant $\overline{\partial} f = 0$ dans D.*

Alors, la $(0,q-1)$ forme définie dans D par

$$(5.1)\qquad u(z) = (-1)^q \left[\int_{(\varsigma,\lambda)\in D_0\backslash D\times[0,1]} (\overline{\partial}_\varsigma f(\varsigma)) \wedge \overline{\Theta}(z,\varsigma,\lambda) \wedge \omega(\varsigma) \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\varsigma\in D_0} \frac{f(\varsigma) \wedge \omega'(\overline{\varsigma}-\overline{z}) \wedge \omega(\varsigma)}{|\varsigma - z|^{2n}} \right]$$

est de classe C^∞ dans D et vérifie $\overline{\partial} u = f$ dans D.

PREUVE. On déduit aisément de la définition de $\overline{\Theta}$ et du lemme 3 que u est de classe C^∞ dans D.

Il reste donc à établir que $\overline{\partial} u = f$ dans D. On pose

$$\gamma = \overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\Theta} \wedge \omega.$$

On a, en utilisant (4.4), toujours au sens des courants, sur W

$$\begin{aligned}(5.2)\qquad (\mathrm{d}_\varsigma + \mathrm{d}_\lambda)\gamma &= (\mathrm{d}_\varsigma + \mathrm{d}_\lambda)(\overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\Theta} \wedge \omega) \\ &= (\overline{\partial}_\varsigma + \mathrm{d}_\lambda)(\overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\Theta} \wedge \omega) \\ &= (-1)^{q+1}\ \overline{\partial}_\varsigma f \wedge (\overline{\partial}_\varsigma + \mathrm{d}_\lambda)\ (\overline{\Theta} \wedge \omega) \\ &= (-1)^q\ \overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\partial}_z(\overline{\Theta} \wedge \omega).\end{aligned}$$

De là, pour tout z fixé dans D, puisque $\overline{\partial}_\varsigma f$ est nulle sur D, on peut appliquer la formule de Stokes à γ sur $D_0 \times [0,1]$. On obtient donc, pour tout z dans D,

$$(5.3)\qquad \int_{(\varsigma,\lambda)\in D_0\times[0,1]} (\mathrm{d}_\varsigma + \mathrm{d}_\lambda)\gamma = \int_{(\varsigma,\lambda)\in\partial(D_0\times[0,1])} \gamma.$$

De (5.2), on tire

$$\begin{aligned}\int_{(\varsigma,\lambda)\in D_0\times[0,1]} (\mathrm{d}_\varsigma + \mathrm{d}_\lambda)\gamma &= (-1)^q \int_{(\varsigma,\lambda)\in D_0\times[0,1]} \overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\partial}_z(\overline{\Theta} \wedge \omega) \\ &= -\int_{(\varsigma,\lambda)\in D_0\times[0,1]} \overline{\partial}_z(\overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\Theta} \wedge \omega) \\ (5.4)\qquad &= -\overline{\partial}_z \int_{(\varsigma,\lambda)\in D_0\times[0,1]} \overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\Theta} \wedge \omega \\ &= -\overline{\partial}_z \int_{(\varsigma,\lambda)\in (D_0\setminus D)\times[0,1]} \overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\Theta} \wedge \omega.\end{aligned}$$

On calcule maintenant l'intégrale figurant au second membre de (5.3). On a

$$\partial(D_0 \times [0,1]) = \partial D_0 \times [0,1] + D_0 \times \{1\} - D_0 \times \{0\}.$$

On remarque alors

$$\int_{(\varsigma,\lambda)\in\partial D_0\times[0,1]} \overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\Theta} \wedge \omega = 0, \text{ car } f \text{ est à support compact dans } D_0.$$

On déduit de (4.6)

$$(5.5)\qquad \int_{(\varsigma,\lambda)\in D_0\times\{1\}} \overline{\partial}_\varsigma f\wedge\overline{\Theta}\wedge\omega=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\varsigma\in D_0}\overline{\partial}_\varsigma f\wedge\frac{\omega'(\overline{\varsigma}-\overline{z})\wedge\omega(\varsigma)}{|\varsigma-z|^{2n}}$$

et de (4.7)

(5.6)

$$\int_{(\varsigma,\lambda)\in D_0\times\{0\}}\overline{\partial}_\varsigma f\wedge\overline{\Theta}\wedge\omega$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\varsigma\in D_0}\overline{\partial}_\varsigma f\wedge\frac{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}w_j(z,\varsigma)\bigwedge_{k\neq j}(\overline{\partial}_\varsigma+\overline{\partial}_z)(w_k(z,\varsigma))}{\Phi(z,\varsigma)^n}\wedge\omega(\varsigma)$$

$$=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\varsigma\in D_0}\overline{\partial}_\varsigma f\wedge\Omega(z,\varsigma)\wedge\omega(\varsigma).$$

On remarque maintenant que $\overline{\partial}_\varsigma f$ est de bidegré $(0,q+1)$ en $(\varsigma,\overline{\varsigma})$ et $\omega(\varsigma)$ de bidegré $(n,0)$ en $(\varsigma,\overline{\varsigma})$. On ne doit donc garder dans $\Omega(z,\varsigma)$ que les termes de bidegré $(0,n-q-1)$ en $(\varsigma,\overline{\varsigma})$. Mais si l'on revient à la définition de $\Omega(z,\varsigma)$ on constate que chacun des termes de cette somme est de bidegré $(0,n-1)$ en $((\varsigma,z),(\overline{\varsigma},\overline{z}))$. Les termes retenus dans $\Omega(z,\varsigma)$ sont donc nécessairement de bidegré $(0,n-q-1)$ en $(\varsigma,\overline{\varsigma})$ et $(0,q)$ en $(z,\overline{z})$. Mais q étant strictement positif et w holomorphe en z, les termes retenus sont nuls et l'intégrale (5.6) aussi.

On a donc

$$(5.7)\quad -\overline{\partial}_z\int_{(\varsigma,\lambda)\in(D_0\setminus D)\times[0,1]}\overline{\partial}_\varsigma f\wedge\overline{\Theta}\wedge\omega=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\varsigma\in D_0}\overline{\partial}_\varsigma f\wedge\frac{\omega'(\overline{\varsigma}-\overline{z})\wedge\omega(\varsigma)}{|\varsigma-z|^{2n}}.$$

Par ailleurs, on sait [12] que l'on a, puisque f est à support compact dans D_0,

$$\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\varsigma\in D_0}\overline{\partial}_\varsigma f\wedge\frac{\omega'(\overline{\varsigma}-\overline{z})\wedge\omega(\varsigma)}{|\varsigma-z|^{2n}}$$

$$=(-1)^{q+1}f(z)+\overline{\partial}_z\left[\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\varsigma\in D_0}f(\varsigma)\wedge\frac{\omega'(\overline{\varsigma}-\overline{z})\wedge\omega(\varsigma)}{|\varsigma-z|^{2n}}\right].$$

On en déduit, en utilisant (5.7),

$$f(z) = \overline{\partial}_z(-1)^q \left[\int_{(\varsigma,\lambda)\in(D_0\setminus D)\times[0.1]} \overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\Theta} \wedge \omega \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\varsigma\in D_0} f(\varsigma) \wedge \frac{\omega'(\overline{\varsigma}-\overline{z}) \wedge \omega(\varsigma)}{|\varsigma - z|^{2n}} \right].$$

Ceci établit la proposition 5.

6. - REMARQUE. En suivant [13 page 70], on peut écrire l'intégrale

$$\int_{(\varsigma,\lambda)\in(D_0\setminus D)\times[0,1]} \overline{\partial}_\varsigma f \wedge \overline{\Theta} \wedge \omega$$

après intégration par rapport à λ, comme une combinaison linéaire finie d'intégrales du type

$$\int_{D_0\setminus D} \frac{g_I \ \Psi_{I,s,1} \ \overline{\Psi}_{I,s,2}}{\Phi(z,\varsigma)^{n-s-1} \ |\varsigma - z|^{2s+2}} \bigwedge_{j=1}^{n} (\mathrm{d}\overline{\varsigma}_j \wedge \mathrm{d}\varsigma_j)$$

où g_I est un coefficient de la forme $\overline{\partial}_\varsigma f$, $\Psi_{I,s,1}$ est le produit de certaines des fonctions w_j et $\dfrac{\partial w_j}{\partial \overline{\varsigma}_k}$, $j = 1, \cdots, n$, $k = 1, \cdots, n$ et $\Psi_{I,s,2}$ est l'une des fonctions $\varsigma_j - z_j$, $j = 1, \cdots, n$. Ici, s est un entier vérifiant $0 \leq s \leq n-2$.

7. - LEMME. *Les ouverts U_1 et V_1 étant ceux du lemme* 3, *soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions continues sur $U_1 \times V_1$, holomorphes en z dans U_1 pour ς fixé dans V_1. Soient r et t deux entiers et g une fonction continue et à support compact dans D_0, nulle sur D. Alors la fonction G définie sur D par*

$$G(z) = \int_{\varsigma\in D_0\setminus D} \frac{g(\varsigma)\psi_1(z,\varsigma)\overline{\psi}_2(z,\varsigma)}{\Phi(z,\varsigma)^r \ |\varsigma - z|^t} \bigwedge_{j=1}^{n} (\mathrm{d}\overline{\varsigma}_j \wedge \mathrm{d}\varsigma_j) \tag{7.1}$$

est de classe C^∞ dans D. Si, de plus, g appartient à $G_{1+1/\alpha}(D_0)$ alors G appartient à $G_{1+1/\alpha}(D)$.

PREUVE. La fonction G est clairement de classe C^∞ dans D.

Il existe des constantes K_2, K_3 et K_4 supérieures à 1 telles que l'on ait, pour tout triplet (j,r,t) d'entiers, tout z dans D, tout ς dans $D_0\setminus D$ et tout vecteur unitaire $\vec{v}$

$$|\mathrm{d}_z^j \psi_i(z,\varsigma)(\vec{v}^j)| \leq K_2^j \ j!, \qquad i = 1, 2, \tag{7.2}$$

$$|\mathrm{d}_z^j \ \Phi^{-r} \ (z,\varsigma) \ (\vec{v}^j)| \leq K_3^{j+r} \ j! \ |\varsigma - z|^{-(2r+j)}, \tag{7.3}$$

$$|\mathrm{d}_z^j \ |\varsigma - z|^{-t} \ (\vec{v}^j)| \leq K_4^{j+t} \ j! \ |\varsigma - z|^{-(t+j)}. \tag{7.4}$$

L'estimation (7.4) est élémentaire; les estimations (7.2) et (7.3) se déduisent de la formule de Cauchy et aussi, pour (7.3), de l'inégalité (3.2).

Si g, à support compact dans D_0 et nulle sur D, appartient à $G_{1+1/\alpha}(D_0)$, alors, en utilisant la formule de Taylor, on montre qu'il existe des constantes K_5 et K_6, strictement positives, $K_5 \geq 1$, telles que l'on ait, pour tout ς de $D_0 \backslash D$,

$$(7.5) \qquad |g(\varsigma)| \leq K_5 \exp[-K_6 \ \mathrm{d}(\varsigma, \partial D)^{-\alpha}].$$

En utilisant (7.2), (7.3) et (7.4), on déduit alors qu'il existe une constante K_7, $K_7 \geq 1$, telle que, pour tout entier j, tout vecteur unitaire $\vec{v}$ et tout z de D, on ait

$$(7.6) \ |\mathrm{d}^j G(z)(\vec{v}^j)| \leq K_7^{j+r+t+1} \ j! \int_{D_0 \backslash D} \frac{\exp[-K_6 d(\varsigma, \partial D)^{-\alpha}]}{|\varsigma - z|^{2r+t+j}} \bigwedge_{j=1}^{n} (\mathrm{d}\overline{\varsigma}_j \wedge \mathrm{d}\varsigma_j).$$

Pour tout z de D et tout ς de $D_0 \backslash D$, on a

$$|\varsigma - z| \geq \mathrm{d}(\varsigma, \partial D)$$

et, il existe une constante K_8 strictement positive telle que, pour tout ς de $D \backslash D_0$ et tout triplet d'entiers (j, r, t), on ait

$$(7.7) \qquad \exp[-K_6 \ \mathrm{d}(\varsigma, \partial D)^{-\alpha}] \leq (2r + j + t)!^{1/\alpha} \ \{K_8 \ \mathrm{d}(\varsigma, \partial D)]^{2r+j+t}.$$

On a donc

$$|\mathrm{d}^j \ G(z)(\vec{v}^j)| \leq K_9^{j+r+t+1} \ (2r + t)!^{1/\alpha} \ j!^{1+1/\alpha},$$

ce qui achève la preuve du lemme 4.

8. - LEMME. *Soit q un entier, $1 \leq q \leq n$, et f une $(0,q)$ forme appartenant à $G^{0;q}_{1+1/\alpha}(D_0)$. Alors, la $(0, q-1)$ forme définie par*

$$Bf(z) = \int_{\varsigma \in D_0} \frac{f(\varsigma) \wedge \omega'(\overline{\varsigma} - \overline{z}) \wedge \omega(\varsigma)}{|\varsigma - z|^{2n}}$$

appartient à $G^{0;q-1}_{1+1/\alpha}(D_0)$.

PREUVE. Bf est obtenu par convolution de f avec un noyau localement intégrable. Le résultat est donc immédiat.

9. - THÉORÈME. *Soit α, $0 < \alpha$. Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$, à frontière ∂D de classe C^2. Soit q un entier, $1 \leq q \leq n$, et f une $(0,q)$ forme appartenant à $G^{0;q}_{1+1/\alpha}(D)$ et vérifiant $\overline{\partial} f = 0$ dans D. Alors, il existe une $(0, q-1)$ forme u de $G^{0;q-1}_{1+1/\alpha}(D)$ telle que l'on ait $\overline{\partial} u = f$ dans D.*

PREUVE. Il existe un prolongement de f, noté encore f par abus d'écriture, appartenant à $G^{0,q}_{1+1/\alpha}(D_0)$ et à support compact dans D_0 [2]. On applique alors à f la proposition 5 et les lemmes 7 et 8 pour conclure.

CHAPITRE VII

Théorème de division

Dans tout ce qui suit E désigne un sous ensemble compact de ∂D et E_i, $i \in \mathbb{N}$ des constantes ne dépendant que de la géométrie du domaine, de E et de α.

1. - Soit D un domaine borné strictement pseudoconvexe à frontière de classe C^2. On sait [5], [13] qu'il existe un voisinage U de $\overline{D}$, des constantes E_1 et E_2, $0 < E_1 < 1 < E_2$ et une fonction H continue sur $\partial D \times U$ vérifiant les propriétés suivantes

(1.1) pour tout ς de ∂D, la fonction $z \rightarrow H(\varsigma, z)$ est holomorphe dans U,

(1.2) Re $H(\varsigma, z)$ est strictement positive pour tout (ς, z) de $\partial D \times \overline{D}$, $\varsigma \neq z$,

(1.3) pour tout (ς, z) de $\partial D \times \overline{D}$, on a

$$E_1 |H(\varsigma, z)| \leq \rho(z, \varsigma) \leq E_2 |H(\varsigma, z)|.$$

2. - On note, pour tout z de $\mathbb{C}^n$ et tout $r > 0$, $P(z, r)$ le polydisque de centre z et de rayon r, c'est-à-dire,

$$\{w \in \mathbb{C}^n ; |w_i - z_i| < r, \ i = 1 \cdots n\}.$$

3. - LEMME. *Il existe des constantes E_3, E_4, E_5, strictement positives, $E_3 < 1$, telles que l'on ait*

(3.1) $$P(z, E_3 \rho(z, E)) \subset U, \qquad \textit{pour tout } z \textit{ de } \overline{D} \backslash E,$$

(3.2) $$E_4(c + \rho(z, \varsigma)) \leq |c + H(\varsigma, w)| \leq E_5(c + \rho(z, \varsigma)),$$

pour tout z de $\overline{D} \backslash E$, tout w de $P(z, E_3 \rho(z, E))$, tout ς de E et tout $c \geq 0$.

PREUVE. Puisque D est borné, la propriété (3.1) est évidente. Les propriétés de H impliquent, quitte à diminuer E_3, qu'il existe une constante E_6, strictement positive, telle que l'on ait pour tout z de $\overline{D} \backslash E$, tout w de $P(z, E_3 \rho(z, E))$ et tout ς de E,

(3.3) $$|H(\varsigma, w) - H(\varsigma, z)| \leq E_6 \cdot E_3 \rho(z, E) \leq E_6 \ E_3 \rho(z, \varsigma).$$

De là, quitte à diminuer E_3 une nouvelle fois, (1.2), (1.3) et (3.3) impliquent (3.2).

4. - On note, pour $E_3 > 0$, $D(E_3) = \bigcup_{z \in \overline{D} \setminus E} P(z, E_3 \rho(z, E))$.

5. - LEMME. *Il existe des constantes E_7, E_8 et E_9, strictement positives, telles que, pour tout z_0 de $(V \cap \overline{D}) \setminus E$, on ait*

$$B(z_0, E_7 \rho(z_0, E)) \subset \bigcup_{S_{z_0}} P(z, E_3 \rho(z, E))$$

où $S_{z_0} = \{z \in \overline{D} \setminus E;\ E_8 \rho(z_0, E) \leq \rho(z, E) \leq E_9 \rho(z_0, E)\}$.

PREUVE. Il s'agit là d'une conséquence immédiate des propriétés de la pseudodistance ρ.

6. - Pour tout sous-ensemble E fermé de ∂D et tout $\varepsilon > 0$, on désigne par $\tilde{N}_\varepsilon(E)$ le nombre minimal de boules pour la pseudodistance ρ de rayon ε dont la réunion recouvre E. On sait [5] qu'il existe des constantes E_{10} et E_{11}, strictement positives, telles que l'on puisse recouvrir E par des boules dont les centres sont situés sur E à des pseudodistances mutuelles supérieures ou égales à ε et dont le nombre $N_\varepsilon(E)$ vérifie

$$E_{10} \tilde{N}_\varepsilon(E) \leq N_\varepsilon(E) \leq E_{11} \tilde{N}_\varepsilon(E).$$

On dira que ces boules forment un ε-recouvrement de E.

7. - PROPOSITION. *Soit E un sous ensemble compact de ∂D et α un réel, $0 < \alpha < 1$. On suppose qu'il existe une constante $E_{12} > 0$ telle que l'on ait*

$$(I_\alpha) \qquad \int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\ \varepsilon^{-\alpha}\ \mathrm{d}\varepsilon \leq E_{12}\ r^{1-\alpha},$$

pour tout r, $0 < r < 1$ et toute boule B_r de rayon r centrée sur $\overline{D} \cap V$.

Alors, il existe des constantes E_3, E_{14}, E_{15} et E_{16}, strictement positives, une fonction φ holomorphe dans $D(E_3)$ telles que l'on ait

$$(7.1) \qquad \operatorname{Re} \varphi(w) \geq E_{14} \rho(z, E)^{-\alpha}$$

et

$$(7.2) \qquad |\varphi(w)| \leq E_{15}\ \rho(z, E)^{-\alpha}, \text{ pour tout } z \text{ de } \overline{D} \setminus E \text{ et tout } w \text{ de } P(z, E_3\ \rho(z, E)).$$

PREUVE. Elle reprend les idées développées dans les preuves de la proposition 8 de [5] et de la proposition 10 de [6].

La condition (I_α) implique la condition de Carleson, à savoir

$$\int_0^1 N_\varepsilon(E)\ \varepsilon^{-\alpha}\ d\varepsilon < \infty, \tag{7.3}$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_{2^{-k}}(E)\ 2^{-k(1-\alpha)} < \infty. \tag{7.4}$$

Pour chaque entier k, $(\varsigma_{j,k})$, $j = 1, \cdots, N_k = N_{2^{-k}}(E)$, désigne la suite des centres des boules $B_{j,k}$, $j = 1, \cdots, N_k$ d'un 2^{-k} recouvrement de E.

On considère alors la fonction φ définie dans D par

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{2^{-k(1-\alpha)}}{2^{-k} + H(\varsigma_{j,k}, z)}. \tag{7.5}$$

On a, d'après le lemme 3,

$$|2^{-k} + H(\varsigma_{j,k}, z)| \geq E_4\ \rho(z, E)$$

et donc, quitte à réduire E_3, en utilisant (7.4), on conclut que φ est holomorphe dans $D(E_3)$ et, en utilisant (1.2), que Re φ est strictement positive dans $\overline{D}\backslash E$.

On se propose tout d'abord d'établir l'estimation (7.2). On a, pour tout z de $(\overline{D} \cap V)\backslash E$ et tout w de $P(z, E_3\ \rho(z, E))$

$$|\varphi(w)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{|2^{-k} + H(\varsigma_{j,k}, w)|},$$

ce qui donne, en utilisant le lemme 3,

$$|\varphi(w)| \leq E_4^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(1-\alpha)} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{2^{-k} + \rho(z, \varsigma_{j,k})}. \tag{7.6}$$

On note, pour tout (ℓ, k) de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} C_{\ell,k} &= \{j;\ 2^\ell \rho(z, E) < \rho(z, \varsigma_{j,k}) \leq 2^{\ell+1}\ \rho(z, E)\}, \\ D_{\ell,k} &= \{j;\ \rho(z, \varsigma_{j,k}) \leq 2^\ell \rho(z, E)\} \end{aligned} \tag{7.7}$$

et, on a

$$\text{card } D_{\ell,k} \leq N_{2^{-k}}\ (B_{2^\ell \rho(z,E)} \cap E) \tag{7.8}$$

où card X désigne le nombre d'éléments de X.

Puisque D est borné, il existe une constante E_{17}, $E_{17} > 0$, telle que, pour tout z et tout ς de $\overline{D} \cap V$, on ait

$$\rho(z, \varsigma) \leq E_{17}.$$

Pour tout z de $(\overline{D} \cap V) \backslash E$, on note L_z le plus grand entier qui vérifie

$$2^{L_z} \rho(z, E) \leq E_{17}.$$

On déduit de (7.6)

$$|\varphi(w)| \leq E_{18} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(1-\alpha)} \left(\frac{\text{card } D_{0,k}}{2^{-k} + \rho(z, E)} + \sum_{\ell=0}^{L_z} \frac{\text{card } C_{\ell,k}}{2^{-k} + 2^{\ell} \rho(z, E)} \right).$$

Pour chaque k, on intègre par parties la somme portant sur ℓ; on obtient

$$|\varphi(w)| \leq E_{19} \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(1-\alpha)} \left(\sum_{\ell=1}^{L_z} \frac{2^{\ell} \rho(z, E) \text{ card } D_{\ell,k}}{2^{-2k} + 2^{2\ell} \rho(z, E)^2} + N_k \right) \right]$$

et, en utilisant (7.4),

$$|\varphi(w)| \leq E_{19} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(1-\alpha)} \sum_{\ell=1}^{L_z} \frac{2^{\ell} \rho(z, E) \text{ card } D_{\ell,k}}{2^{-2k} + 2^{2\ell} \rho(z, E)^2} + E_{20}.$$

On échange les sommations et on coupe la somme sur k en deux parties:

$$|\varphi(w)| \leq E_{19} \sum_{\ell=1}^{L_z} 2^{\ell} \rho(z, E) \left(\sum_{2^{-k} < 2^{\ell} \rho(z,E)} + \sum_{2^{-k} \geq 2^{\ell} \rho(z,E)} \right) + E_{20}$$

c'est-à-dire

(7.9) $$|\varphi(w)| \leq E_{19} \left(\sum_1 + \sum_2\right) + E_{20}$$

avec

$$\sum_1 = \sum_{\ell=1}^{L_z} \frac{1}{2^{\ell} \rho(z, E)} \sum_{2^{-k} < 2^{\ell} \rho(z,E)} 2^{-k(1-\alpha)} \text{ card } D_{\ell,k}.$$

Mais, d'après (7.8) et l'hypothèse I_{α}, on remarque que, pour tout ℓ, on a

$$\sum_{2^{-k} < 2^{\ell} \rho(z,E)} 2^{-k(1-\alpha)} \text{ card } D_{\ell,k} \leq E_{21} \left(2^{\ell} \rho(z, E)\right)^{1-\alpha}$$

et donc

$$\sum_1 \leq E_{22} \sum_{\ell=1}^{L_z} 2^{-\ell\alpha} \rho(z,E)^{-\alpha} \leq E_{23}\ \rho(z,E)^{-\alpha}. \tag{7.10}$$

On considère maintenant

$$\sum_2 = \sum_{\ell=1}^{L_z} 2^{\ell}\rho(z,E) \sum_{2^{-k}\geq 2^{\ell}\rho(z,E)} 2^{k(1+\alpha)} \text{ card } D_{\ell,k}.$$

Mais ici card $D_{\ell,k}$ est majoré par une constante absolue E_{24}; en effet, on compte dans la boule de centre z et de rayon $2^{\ell}\rho(z,E)$ des points écartés d'une pseudodistance supérieure à son rayon.

De plus, on a

$$\sum_{2^{-k}\geq 2^{\ell}\rho(z,E)} 2^{k(1+\alpha)} \leq E_{25}\ [2^{\ell}\rho(z,E)]^{-(1+\alpha)}$$

et donc

$$\sum_2 \leq E_{26} \sum_{\ell=1}^{L_z} [2^{\ell}\rho(z,E)]^{-\alpha} \leq E_{27}\ \rho(z,E)^{-\alpha}. \tag{7.11}$$

De là, d'après (7.10) et (7.11), on déduit que, pour tout z dans $\overline{D}\cap V)\backslash E$ et tout w de $P(z, E_3\ \rho(z,E))$, on a

$$|\varphi(w)| \leq E_{28}\ \rho(z,E)^{-\alpha}.$$

Ceci achève la preuve de l'estimation (7.2).

Pour prouver (7.1), on commence par établir qu'il existe une constante E_{29}, strictement positive, telle que l'on ait, pour tout z de $\overline{D}\backslash E$,

$$\operatorname{Re} \varphi(z) \geq E_{29}\ \rho(z,E)^{-\alpha}. \tag{7.12}$$

Soit z un point de $\overline{D}\backslash E$ vérifiant $\rho(z,E) \leq 1/4$.

Il existe un entier $k_z > 1$ tel que l'on ait

$$2^{-k_z-1} < \rho(z,E) \leq 2^{-k_z}. \tag{7.13}$$

On note w_z un point de E réalisant le minimum de la pseudodistance de z à E. Alors, pour chaque k, w_z appartient à au moins une boule du 2^{-k} recouvrement de E dont on désigne par $\zeta_{z.k}$ le centre. De la positivité de

Re H, on déduit que l'on a

$$\text{(7.14)} \qquad \operatorname{Re}\ \varphi(z) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\ \frac{2^{-k}}{2^{-k}+H(\varsigma_{z,k}, z)} \cdot 2^{k\alpha}$$
$$\geq \operatorname{Re}\ \frac{2^{-k_z}}{2^{-k_z}+H(\varsigma_{z,k_z}, z)} \cdot 2^{k_z\alpha}.$$

On a, de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|H(\varsigma_{z,k}, z) \leq E_1^{-1}\ \rho(\varsigma_{z,k}, z) \leq E_{30}\ (2^{-k}+2^{-k_z})$$

et donc, pour $k = k_z$,

$$|H(\varsigma_{z,k_z}, z)| \leq E_{31}\ 2^{-k_z}.$$

On obtient

$$\text{(7.15)} \qquad \operatorname{Re}\ \frac{2^{-k_z}}{2^{-k_z}+H(\varsigma_{z,k_z}, z)} \geq E_{32}$$

et on déduit de (7.13), (7.14) et (7.15),

$$\text{(7.16)} \qquad \operatorname{Re}\ \varphi(z) \geq E_{33}\ 2^{k_z\alpha} \geq E_{34}\ \rho(z,E)^{-\alpha}.$$

Pour tout z de $\overline{D}\backslash E$, tout w de $P\left(z,\ \frac{E_3}{4}\ \rho(z,E)\right)$ et tout vecteur unitaire $\vec{v}$, la formule de Cauchy appliquée au polydisque $P\left(w,\ \frac{E_3}{4}\ \rho(z,E)\right)$, compte tenu de (7.2), conduit à

$$|d\varphi(w)(\vec{v})| \leq E_{35}\ \rho(z,E)^{-1-\alpha}.$$

On a donc, pour tout z de $\overline{D}\backslash E$ et tout w de $P\left(z,\ \frac{E_3}{4}\ \rho(z,E)\right)$,

$$|\operatorname{Re}\ \varphi(w) - \operatorname{Re}\ \varphi(z)| \leq |w-z| \cdot E_{35}\ \rho(z,E)^{-1-\alpha}$$

et donc, en utilisant (7.16),

$$\operatorname{Re}\ \varphi(w) \geq \left(E_{34} - E_{35}\ \frac{E_3}{4}\right)\ \rho(z,E)^{-\alpha}.$$

Ceci établit (7.1) quitte à choisir $E_3 < \frac{E_{34}}{E_{35}}$.

8. - PROPOSITION. *Soit μ, $0 < \mu \leq 1$ et G_μ la fonction définie par*

$$G_\mu(z) = \exp[-\mu\varphi(z)].$$

Alors G_μ appartient à $A_{1+1/\alpha}(D)$ et est plate sur E.

PREUVE. Puisque φ est holomorphe dans $D(E_3)$, on applique la formule de Cauchy pour tout z de $\overline{D}\backslash E$ au polydisque $P\left(z, \frac{E_3}{2} \rho(z,E)\right)$. Il existe alors des constantes E_{36} et E_{37} telles que, pour tout μ, $0<\mu\leq 1$, tout vecteur unitaire $\vec{v}$, tout entier j et tout z de $\overline{D}\backslash E$, on ait

$$(8.1) \qquad |\mathrm{d}^j\ G_\mu(z)(\vec{v}^j)| \leq E_{36}^j\ j!\ \rho(z,E)^{-j}\ \exp[-\mu\ E_{34}\ \rho(z,E)^{-\alpha}].$$

On déduit de là que l'on a

$$|\mathrm{d}^j\ G_\mu(z)(\vec{v}^j)| \leq E_{37}\ E_{38}^j\ \mu^{-j/\alpha}\ (j!)^{1+1/\alpha}$$

donc que G_μ appartient $A_{1+1/\alpha}(D)$ et est plate sur E.

9. - PROPOSITION. *Soit* α, $0<\alpha<1$. *Soit E un sous-ensemble compact de ∂D vérifiant I_α. Soit g une fonction de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$ plate sur E. Alors il existe μ_0, $0<\mu_0<1$ tel que, pour tout μ, $0<\mu\leq\mu_0$ il existe une fonction h_μ de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$ plate sur E telle que l'on ait*

$$g = h_\mu\ G_\mu \qquad \textit{dans } D\cap V.$$

PREUVE. Puisque G_μ est définie par

$$G_\mu = \exp -\mu\varphi$$

il suffit de montrer que la fonction

$$h_\mu = g\cdot\exp(\mu\varphi)$$

appartient à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$ pour μ assez petit.

Soit z un point de $D\cap V$, $\vec{v}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{C}\vec{\nu}_z$, $\vec{w}$ un vecteur de T^c_z et un triplet d'entiers (h,k,ℓ).

Puisque g est plate sur E, le théorème III.7 appliqué en tout point z_0 de E conduit, pour tout entier p, $p>h+\dfrac{k+\ell}{2}$, à

$$(9.1) \qquad \left|\mathrm{d}(z,\partial D)^{\ell/2}\ \frac{\partial^{h+\ell+k}g(z)}{\partial\vec{v}^{h+\ell}\partial\vec{w}^k}\right| \\ \leq C_1(E_{39}\ C_2)^{p+1}(h+k+\ell)!(p+1)!^{1/\alpha}\rho(z,E)^{p+\frac{1}{2}-(h+\frac{k+\ell}{2})}.$$

Pour estimer les dérivées successives de la fonction $\exp\mu\varphi$, on applique, en utilisant le Lemme 5 et la Proposition 7, la formule de Cauchy dans le polydisque $\{z+\gamma\vec{v}+\delta\vec{w};\ |\gamma|\leq\frac{E_7}{2}\ \rho(z,E),\ |\delta|\leq(\frac{E_7}{2}\ \rho(z,E))^{1/2}\}$; on a

$$\left|\frac{\partial^{h+\ell+k}}{\partial\vec{v}^{h+\ell}\partial\vec{w}^k}\ \exp\ \mu\varphi(z)\right| \\ \leq E_{40}^{h+\frac{k+\ell}{2}}\ (h+k+\ell)!\rho(z,E)^{-(h+\ell+\frac{k}{2})}\ \exp\ \left[(\mu E_{41})\ \rho(z,E)^{-\alpha}\right].$$

De là, puisque $\mathrm{d}(z,\partial D) \le E_{42}\ \rho(z,E)$, on a

$$\left|\mathrm{d}(z,\partial D)^{\ell/2}\ \frac{\partial^{h+\ell+k}}{\partial\vec{v}^{h+\ell}\partial\vec{w}^{k}}\ \exp\ \mu\varphi(z)\right| \tag{9.2}$$

$$\le E_{40}^{h+\frac{k+\ell}{2}}\ (h+k+\ell)!\rho(z,E)^{-(h+\frac{\ell+k}{2})}\ \exp\ \left[(\mu E_{41})\ \rho(z,E)^{-\alpha}\right].$$

D'après (9.1) et (9.2) on conclut donc

$$\left|\mathrm{d}(z,\partial D)^{\ell/2}\ \frac{\partial^{h+\ell+k}}{\partial\vec{v}^{h+\ell}\partial\vec{w}^{k}}\ h_\mu(z)\right| \le C_1(E_{43}C_2)^{p+1}(h+k+\ell)!(p+1)!^{1/\alpha} \tag{9.3}$$

$$\rho(z,E)^{p+\frac{1}{2}-(h+\frac{k+\ell}{2})}\ \exp\ \left[(\mu E_{41})\ \rho(z,E)^{-\alpha}\right].$$

On pose $p = h + \|\frac{k+\ell}{2}\| + p' + 1$ avec p' entier, le second membre de l'inégalité (9.3) est donc majoré par

$$C_1(E_{44}C_2)^{h+\frac{k+\ell}{2}}\ (h+k+\ell)!\left(h+\left\|\frac{k+\ell}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha}$$

$$.(E_{45}C_2)^{p'+1}(p'+1)!^{1/\alpha}\ \rho(z,E)^{p'+1}\ \exp\ \left[\mu E_{41}\ \rho(z,E)^{-\alpha}\right]$$

et, en prenant la borne inférieure sur p', par

$$bC_1(E_{45}C_2)^{h+\frac{k+\ell}{2}}(h+k+\ell)!\left(h+\left\|\frac{k+\ell}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha}$$

$$\exp\left[(-E_{46}C_2^{-\alpha}+\mu E_{41})\rho(z,E)^{-\alpha}\right].$$

On a donc, si on choisit

$$\mu \le \mu_0 = \frac{1}{2}\ E_{41}^{-1}\ C_2^{-\alpha}\ E_{46},$$

$$\left|\mathrm{d}(z,\partial D)^{\ell/2}\ \frac{\partial^{h+\ell+k}}{\partial\vec{v}^{h+\ell}\partial\vec{w}^{k}}\ h_\mu(z)\right|$$

$$\le C_1(E_{45}C_2)^{h+\frac{k+\ell}{2}}\ (h+k+\ell)!\left(h+\left\|\frac{k+\ell}{2}\right\|\right)!^{1/\alpha} \tag{9.4}$$

$$\exp\left[(-E_{47})\ \rho(z,E)^{-\alpha}\right].$$

De là, on déduit que h_μ appartient à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$ et que h_μ est plate sur E.

10. - THÉORÈME DE DIVISION. *Soit α, $0<\alpha<1$, et E un sous-ensemble compact de ∂D vérifiant I_α. Alors, quelle que soit la famille finie (g_i) $i=1,\cdots,p$ de fonctions de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$, plates sur E, il existe des fonctions h_i, $i=1,\cdots,p$, de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D\cap V)$ plates sur E et une fonction G de*

$A_{1+1/\alpha}(D)$*, plate sur* E *et ne s'annulant que sur* E *telles que l'on ait, pour tout* i, $i = 1, \cdots, p$,

$$g_i = h_i\ G, \qquad dans \qquad D \cap V.$$

PREUVE. Pour chacune des fonctions g_i, $i = 1, \cdots, p$, il existe $\mu_{i,0}$ tel que pour tout $\mu \leq \mu_{i,0}$ la fonction $g_i \exp \mu\varphi$ appartienne à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V)$ et soit plate sur E. Ainsi si on choisit

$$\mu' = \inf_{i \in [1, \cdots, p]} \mu_{i,0}$$

les fonctions

$$G = \exp(-\mu'\varphi) \text{ et } h_i = g_i \exp \mu'\varphi, \ i = 1, \cdots, p,$$

vérifient les conclusions du théorème.

11. - REMARQUE. Contrairement au cas de $A^\infty(D)$, on peut montrer que le théorème de division ne s'étend pas à une famille infinie de fonctions.

CHAPITRE VIII

Interpolation dans $A_{1+1/\alpha}(D)$

Les constantes L_i, $i \in \mathbb{N}$, intervenant dans ce chapitre ne dépendent que de la géométrie du domaine, de E et de α.

1. - Soit E un sous-ensemble compact de ∂D. On rappelle qu'un jet F sur E est la donnée d'une suite $\{F^k(\varsigma);\ \varsigma \in E,\ k \in \mathbb{N}\}$ de k-formes $\mathbb{R}$-linéaires symétriques de $(\mathbb{C}^n)^k$ dans $\mathbb{C}$ dépendant continuement du paramètre ς.

2. - DÉFINITION. Un jet F sur E est $\overline{\partial}$-plat si les formes $F^k(\varsigma)$ sont $\mathbb{C}$-linéaires symétriques de $(\mathbb{C}^n)^k$ dans $\mathbb{C}$, pour tout entier k et tout ς de E.

3. - REMARQUES. a) Si f est une fonction de $A_{1+1/\alpha}(D)$ alors $F = \{\mathrm{d}^k f(\varsigma);\ \varsigma \in E,\ k \in \mathbb{N}\}$ est un jet $\overline{\partial}$-plat.

b) Si un jet F est $\overline{\partial}$-plat, alors, pour tout entier p et tout ς de E, le polynôme de Taylor non isotrope $T^p_\varsigma F$ est holomorphe.

4. - THÉORÈME D'INTERPOLATION. *Soit* D *un domaine borné strictement pseudoconvexe de* $\mathbb{C}^n$, *à frontière* ∂D *de classe* C^2, E *un sous ensemble compact de* ∂D *et* α *un réel,* $0 < \alpha < 1$.

On suppose qu'il existe une constante L_1 *strictement positive telle que l'on ait*

$$(I_\alpha) \qquad \int_0^r N_\varepsilon(B_r \cap E)\ \varepsilon^{-\alpha}\ \mathrm{d}\varepsilon \leq L_1\ r^{1-\alpha},$$

pour tout r, $0 < r < 1$ *et toute boule* B_r *de rayon* r *centrée sur* $\overline{D} \cap V$.

Alors, pour tout jet F *de* $G^{NI}_{1+1/\alpha}(E)$, $\overline{\partial}$*-plat, il existe une fonction* f *de* $A_{1+1/\alpha}(D)$ *telle que l'on ait, pour tout entier* k *et tout* ς *de* E,

$$\mathrm{d}^k f(\varsigma) = F^k(\varsigma). \tag{4.1}$$

PREUVE. On peut tout d'abord remarquer que les conditions imposées au jet F sont nécessaires pour obtenir (4.1) comme le montre la proposition II.3 et les remarques IV.3 et 3.a).

Soit donc F un jet de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(E)$, $\overline{\partial}$-plat. On lui applique le théorème d'extension V.8. Il existe donc une fonction g de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V)$, nulle sur $D \backslash V$, telle que l'on ait, pour tout entier k et tout ς de E,

$$\mathrm{d}^k g(\varsigma) = F^k(\varsigma). \tag{4.2}$$

On considère la (0.1) forme définie sur D par

$$\overline{\partial} g = \sum_{i=1}^{n} g_i \ \mathrm{d}\overline{z}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}_i} \ \mathrm{d}\overline{z}_i.$$

Parce que le jet F sur E est $\overline{\partial}$-plat, pour tout i, $i = 1, \cdots, n$, les fonctions g_i sont plates sur E. On leur applique alors le théorème de division VII.10. Il existe donc des fonction h_i, $i = 1, \cdots, n$ de $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V)$, plates sur E et une fonction G de $A_{1+1/\alpha}(D)$, plate sur E et ne s'annulant que sur E, telles que l'on ait, pour tout i, $i = 1, \cdots, n$,

$$g_i = h_i \ G, \qquad \text{dans } D \cap V. \tag{4.3}$$

Quitte à prolonger pour tout i, h_i par 0 dans $D \backslash V$, on a encore

$$g_i = h_i \ G \qquad \text{dans } D. \tag{4.4}$$

On note alors

$$h = \frac{\overline{\partial} g}{G} = \sum_{i=1}^{n} h_i \ \mathrm{d}\overline{z}_i. \tag{4.5}$$

La (0.1) forme h est définie dans D et appartient à $G_{1+1/\alpha}(D)$ car les fonctions h_i appartiennent à $G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V)$, sont nulles sur $D \backslash V$ et que l'on a

$$G^{NI}_{1+1/\alpha}(D \cap V) \subset G_{1+1/\alpha}(D \cap V). \tag{4.6}$$

La (0.1) forme h est $\overline{\partial}$-fermée, on peut lui appliquer le théorème VI.9. Il existe donc une fonction u de $G_{1+1/\alpha}(D)$ telle que l'on ait

$$\overline{\partial} u = h. \tag{4.7}$$

On pose alors

$$f = g - Gu.$$

On déduit de (4.5) et de (4.7) que l'on a

$$\bar{\partial} f = 0 \qquad \text{dans } D.$$

Par ailleurs f appartient à $G_{1+1/\alpha}(D)$ car, d'après (4.6), g et u appartiennent à $G_{1+1/\alpha}(D)$ et G à $A_{1+1/\alpha}(D)$. Ainsi f appartient à $A_{1+1/\alpha}(D)$ et puisque G est plate sur E on a, pour tout entier k et tout ς de E,

$$\mathrm{d}^k f(\varsigma) = \mathrm{d}^k g(\varsigma) = F^k(\varsigma)$$

ce qui achève la preuve du théorème d'interpolation.

5. - REMARQUE. Soit Γ une courbe de ∂D réelle analytique transverse en chaque point à l'espace tangent complexe à ∂D et telle que, le long de Γ, la normale à ∂D varie de façon réelle analytique. Alors, en suivant la preuve de la proposition 5 de [5], on montre que, si E est un sous ensemble compact de Γ, la condition (I_α) est nécessaire et suffisante pour que E soit un ensemble d'interpolation pour $A_{1+1/\alpha}(D)$. Il s'agit donc d'une généralisation du résultat de E.M. Dyn'kin et S.V. Hruscev [11] lorsque D est le disque unité du plan complexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. ALEXANDER - B.A. TAYLOR - D.L. WILLIAMS, *The interpolating sets for A^∞*, J. Math. Anal. Appl. **36** n° 1 (1971), 556-566.

[2] J. BRUNA, *An extension theorem of Whitney type for non-quasianalytic classes of functions*, J. London Math. Soc. (2) **22** (1980), 495-505.

[3] J. BRUNA - J. MA ORTEGA, *Interpolation by holomorphic functions smooth to the boundary in the Unit ball of $\mathbb{C}^n$*, Math. Ann. **274** (1986), 527-575.

[4] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, Hermann-Paris (1967).

[5] J. CHAUMAT - A.M. CHOLLET, *Ensembles de zéros et d'interpolation à la frontière de domaines strictement pseudoconvexes*, Ark. Mat. **24** (1986), 27-57.

[6] J. CHAUMAT - A.M. CHOLLET, *Propriété de divisions par des fonctions de $A^\infty(D)$*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 153-174.

[7] J. CHAUMAT - A.M. CHOLLET, *Classes de Gevrey non-isotropes et application à l'interpolation*, C.R. Acad. Sc. Paris **304** n° 17 (1987), 531-533.

[8] R.R. COIFMAN - G. WEISS, *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*, Springer-Verlag (1971).

[9] M. DERRIDJ - D. TARTAKOV, *Sur la régularité locale des solutions du problème de Neumann pour $\bar{\partial}$*, Lecture Notes in Math. **578**, Séminaire Pierre Lelong (1975-76), 207-216.

[10] E.M. DYN'KIN, *Pseudoanalytic extension of smooth functions. The Uniform Scale*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **115** (1980), 33-58.

[11] E.M. DYN'KIN - S.V. HRUSCEV, *Interpolation by analytic functions smooth up to the boundary*, J. Soviet. Math. **14** (1980), 1066-1077.

[12] G.B. FOLLAND - E.M. STEIN, *Hardy spaces on Homogeneous groups*, Mathematical Notes Princeton University Press, (1982).

[13] G.M. HENKIN - J. LEITERER, *Theory of functions on complex Manifolds*, Monographs in Mathematics Birkhaüser (1984).

[14] O. LIESS - L. RODINO, *Inhomogeneous Gevrey classes and related pseudodifferential operators*, Bollettino U.M.I. Analisi Funzionale e Applicazioni Série VI vol. III (1984), 233-323.

[15] J. MICHEL, *Communication personelle*, Wuppertal, (1986).

[16] E.M. STEIN, *Singular integrals and estimates for the Cauchy Riemann Equations*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 440-445.

[17] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC, *Régularité analytique et itérés d'opérateurs elliptiques dégénérés, applications*. J. Funct. Analysis **9** (1972), 208-248.

Université de Paris-Sud
Unité Associée 757
Analyse harmonique
mathématique (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex, France