ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

G. GEROTTO

**Sui sistemi di bifattori in caratteristica positiva**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série*, tome 10, nº 1 (1983), p. 69-77

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1983_4_10_1_69_0>

# Sui sistemi di bifattori in caratteristica positiva (*).

G. GEROTTO

In questa breve nota mi propongo di dare una dimostrazione di una idea di I. Barsotti che ha permesso di definire per ogni divisore $X$ su una varietà abeliana, definita sul corpo algebricamente chiuso $k$ di caratteristica positiva, la sua « serie theta » $\vartheta_X$ (si vedano [1] e [3], dove, per errore, $k$ è supposto soltanto perfetto).

L'idea è la seguente: se $R$ è un ipercampo locale equidimensionale su $k$ e se $\mathfrak{R}$ è il bicampo associato ad $R$, ogni sistema di bifattori (moltiplicativo e simmetrico) $F$ su $R$ (con ciò si intende un elemento simmetrico di $R\overline{\times}R\overline{\times}R$ che dà, comunque fissati due argomenti, un sistema di fattori in quegli argomenti; si vedano più avanti le definizioni) è associato ad 1 su $\mathfrak{R}$. Questo vuol dire che esiste un elemento $\vartheta \in \mathfrak{R}$ tale che

$$F(x, y, z) = \frac{(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)}{\vartheta(x+y)\vartheta(x+z)\vartheta(y+z)},$$

ove con $x, y, z$ si indicano copie di un sistema di parametri di $R$ e con $+$ la legge di gruppo su $R$ o $\mathfrak{R}$.

La dimostrazione che presento è puramente algebrica e non fa riferimento alla teoria delle varietà abeliane. È elementare, se tale si considera la teoria di Cartier che stabilisce un'equivalenza tra la categoria delle iperalgebre locali su un anello e una certa categoria di moduli. L'utilizzazione di questa teoria (che permette di ridurre ogni problema sui sistemi di fattori su un'iperalgebra locale ad un problema di estensioni di moduli), di cui, da alcuni anni, esistono esposizioni complete ([5], [6]), anche se non strettamente indispensabile, ha secondo me il pregio di rendere più chiara la situazione.

Nomenclatura e notazioni sono quelle che si trovano negli scritti di Barsotti.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R.
Pervenuto alla Redazione il 31 Agosto 1981 ed in forma definitiva il 2 Luglio 1982.

Sia $A$ un anello commutativo con identità. Diremo che un'iperalgebra $R$ è un'*iperalgebra locale su* $A$ di dimensione $n$ se $R = A[\![x]\!] = A[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ = anello delle serie formali di potenze nelle indeterminate $x_1, \dots, x_n$. Indicheremo con $\mathbf{P} = \mathbf{P}_R$ il coprodotto di $R$, che è dunque un omomorfismo della $A$-algebra $R$ sulla $A$-algebra $R\overline{\times}R$ (= prodotto tensoriale completato; $R$ ha la topologia $(x)$-adica), con $\iota = \iota_R$ l'identità di $R$, con $\varepsilon = \varepsilon_R$ la coidentità di $R$ e con $sc$ lo $A$-isomorfismo di $R\overline{\times}R$ che manda $x\overline{\times}1$ in $1\overline{\times}x$ e $1\overline{\times}x$ in $x\overline{\times}1$.

Un elemento $\gamma \in R\overline{\times}R$ si dice un *sistema di fattori* (moltiplicativo e simmetrico) *su* $R$ se

$$\big((\mathbf{P}_R\overline{\times}\iota_R)\gamma\big)(\gamma\overline{\times}1) = \big((\iota_R\overline{\times}\mathbf{P}_R)\gamma\big)(1\overline{\times}\gamma)$$

$$sc\gamma = \gamma\,.$$

Diremo inoltre che un sistema di fattori $\gamma$ è *normalizzato* se

$$(\varepsilon_R\overline{\times}\iota_R)\gamma = (\iota_R\overline{\times}\varepsilon_R)\gamma = 1\,.$$

Tutti i sistemi di fattori che considereremo nel seguito saranno supposti normalizzati.

Infine, si dirà che un sistema di fattori $\gamma$ è *associato ad* 1 se esiste uno $z \in R$ tale che

$$\gamma = \frac{\mathbf{P}z}{z\overline{\times}z}\,. \tag{1}$$

Se $\gamma$ è associato ad 1, lo $z$ in (1) è determinato a meno di un *elemento moltiplicativo* di $R$ che è un elemento $\zeta$ di $R$ tale che

$$\mathbf{P}\zeta = \zeta\overline{\times}\zeta\,.$$

Indichiamo con $R_{10} = A[\![t]\!]$ l'iperalgebra moltiplicativa di dimensione 1 su $A$. Supponiamo che il coprodotto $\mathbf{P}$ di $R_{10}$ sia definito da: $\mathbf{P}t = t\overline{\times}1 + 1\overline{\times}t + t\overline{\times}t$, cioè supponiamo che $1 + t$ sia elemento moltiplicativo di $R_{10}$: Se $\gamma$ è un sistema di fattori su $R$, si può definire su $S + R\overline{\times}R_{10}$ una struttura di iperalgebra ponendo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_S(x\overline{\times}1) &= sc_{23}\big((\mathbf{P}_R\,x)\overline{\times}1\overline{\times}1\big)\\ \mathbf{P}_S(1\overline{\times}t) &= sc_{32}\big((1\overline{\times}1\overline{\times}\mathbf{P}t)(\gamma\overline{\times}1\overline{\times}1)\big)\,.\end{aligned}$$

In tal modo si ottiene una successione esatta di iperalgebre locali

$$A \to R \to S \to R_{10} \to A\,.$$

Viceversa ogni tale successione esatta è legata ad un sistema di fattori su $R$. Il sistema di fattori è associato ad 1 se e solo se $S$ è isomorfa al prodotto diretto di $R$ per $R_{10}$, cioè ad $R\overline{\times}R_{10}$ con $\mathbf{P}_S = sc_{23}(\mathbf{P}_R\overline{\times}\mathbf{P}_{R_{10}})$.

Supponiamo ora che $A$ sia campo d'integrità di caratteristica $p > 0$, con $p$ numero primo razionale. Richiamiamo, per fissare le notazioni, il seguente risultato di Cartier (in un caso particolare) che generalizza un risultato ormai classico di Dieudonné e Barsotti. (Si vedano per una esposizione della teoria di Cartier [6], [5] e [4], cap. V, parag. 3). Indichiamo con $W(A)$ l'anello dei vettori infiniti di Witt a componenti in $A$. Poniamo, se $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in W(A)$,

$$a^\pi = (a_1^p, a_2^p, a_3^p, \ldots) \qquad a^t = (0, a_0, a_1, \ldots)\,.$$

Risulta $a^{\pi t} = a^{t\pi} = pa$. Inoltre $W(A)$ è completo nella topologia un cui sistema fondamentale di intorni dello zero è dato dai $W(A)^{t^n}$, con $n = 1, 2, \ldots$. Si noti che la topologia $p$-adica di $W(A)$ è più fina della precedente; le due topologie coincidono se $A$ è un anello perfetto.

Indichiamo con $T_A$ il $W(A)$-modulo destro delle serie formali di potenze nell'indeterminata $\boldsymbol{t}$ a coefficienti (a destra) in $W(A)$. Se si impone che $\boldsymbol{a t} = \boldsymbol{t} a^\pi$, per ogni $a \in W(A)$, il $W(A)$-modulo $T_A$ diviene un anello. L'endomorfismo $\pi$ di $W(A)$ si estende a $T_A$ nel modo ovvio. Sia $M$ un $T_A$-modulo sinistro. La topologia $\boldsymbol{t}$-adica di $M$ è quella un cui sistema fondamentale di intorni dello zero è dato dai sotto-$T_A$-moduli $\boldsymbol{t}^n M$. Un $T_A$-modulo sinistro $M$ si dice canonico o di Dieudonné, se

a) $M$ è di Hausdorff e completo nella topologia $\boldsymbol{t}$-adica; questo equivale a dire che $M = \varprojlim M/\boldsymbol{t}^n M$;

b) se $x \in M$ e $\boldsymbol{t}x = 0$, allora $x = 0$;

c) $pM \subseteq \boldsymbol{t}M$;

d) l'$A$-modulo $M/\boldsymbol{t}M$ è libero di ordine finito.

Dalla $c$ segue l'esistenza di un endomorfismo additivo $\boldsymbol{\pi}$ di $M$: se $x \in M$, poniamo

$$\boldsymbol{\pi}x = \boldsymbol{t}^{-1}px\,.$$

Si verifica facilmente che $\boldsymbol{\pi t} = \boldsymbol{t\pi} = p$, che $\boldsymbol{\pi} a = a^\pi \boldsymbol{\pi}$ e che $\boldsymbol{t} a \boldsymbol{\pi} = a^t$, per ogni $a \in W(A)$.

Ciò detto la teoria di Cartier stabilisce (come caso particolare) un'equivalenza (controvariante) tra la categoria delle iperalgebre locali di dimensione finita su $A$ e la categoria dei $T_A$-moduli canonici. Se $R$ è iperalgebra locale su $A$ il modulo che gli viene associato è il $T_A$-modulo $M$ delle curve

$p$-tipiche. Se $A$ è corpo perfetto, classicamente il $T_A$-modulo $M$ che si associa ad $R$ è quello dei vettori canonici di Witt (o iperesponenziali) a componenti nell'iperalgebra $D$ degli omomorfismi continui di $R$ su $A$, l'iperalgebra duale di $R$ (si veda [MC]). (Ci sono indicazioni per ritenere che quest'ultima costruzione sia valida, più in generale, per $A$ campo d'integrità di caratteristica $p$). Ricordiamo infine che questa equivalenza commuta con il cambiamento dell'anello di base.

Se $B$ è un anello con identità ed $M, N$ sono $B$-moduli sinistri, con $\operatorname{Ext}(M, N)$ indichiamo il gruppo commutativo delle estensioni di $M$ mediante $N$, cioè il gruppo delle successioni di $B$-moduli sinistri

$$0 \to N \to E \to M \to 0 .$$

Sia $F_p$ il corpo con $p$ elementi. Indicheremo con $M_{01}$ il $T_{F_p}$-modulo tale che

*a*) $M_{01}$ è $W(F_p)$-modulo libero di ordine 1,

*b*) esiste un generatore $x$ di $M_{01}$ tale che $\boldsymbol{t}x = px$ (e dunque $\boldsymbol{\pi}x = x$). $M_{01}$ è il modulo canonico corrispondente all'iperalgebra $R_{10}$. Se $R \supseteq A$ è un campo d'integrità di caratteristica $p$ ed $M$ è un $T_A$-modulo, denoteremo con $M_B$ il $T_B$-modulo $T_B \otimes_{T_A} M$.

LEMMA. *Sia $k$ un corpo algebricamente chiuso di caratteristica positiva $p$.*

1) *Se $A = k \oplus A^+$ è campo d'integrità locale con primo massimo $A^+$, completo nella topologia $A^+$-adica, si ha*

$$\operatorname{Ext}\left((M_{01})_A, (M_{01})_A\right) = 0 .$$

2) *Se $M$ è un $T_k$-modulo canonico equidimensionale radicale* (si vedano [MC], [MA] per le definizioni) *e $A$ è un campo d'integrità perfetto di caratteristica $p$ contenente $k$, si ha*

$$\operatorname{Ext}\left(M_A, (M_{01})_A\right) = 0 .$$

3) *Se $A$ è come in 1, indichiamo con $A^0$ il perfezionato di $A$. Sia $M$ un $T_k$-modulo canonico equidimensionale. Se $\sigma$ è l'ovvia applicazione canonica di $\operatorname{Ext}\left(M_A, (M_{01})_A\right)$ su $\operatorname{Ext}\left(M_{A^0}, (M_{01})_{A^0}\right)$ è*

$$\sigma \operatorname{Ext}\left(M_A, (M_{01})_A\right) = 0 .$$

DIM. 1) Sia $M$ un $T_A$-modulo tale che la successione

$$0 \to (M_{01})_A \to M \to (M_{01})_A \to 0$$

sia esatta. Allora $M$ è $W(A)$-modulo libero di ordine due. Possiamo trovare un sistema libero di generatori $x_1, x_2$ di $M$ tale che $\pi x_1 = x_1$ e $\pi x_2 = a x_1 + x_2$ con $a \in W(A)$. Cerchiamo ora $u \in W(A)$ tale che, posto $y_2 = u x_1 + x_2$ risulti $\pi y_2 = y_2$.

Deve dunque essere $u^{\pi} x_1 + a x_1 + x_2 = u x_1 + x_2$, donde

$$u^{\pi} - u + a = 0 \,. \tag{2}$$

Se scriviamo $u = \{x_0\} + u_1^t$, ove $\{x_0\}$ è il rappresentante di Teichmüller di $x_0 \in A$ e $u_1 \in W(A)$, si vede subito che $x_0$ deve soddisfare un'equazione del tipo $x_0^p - x_0 + c = 0$, dove $c$ è elemento di $A$, ed $u_1$ deve soddisfare un'equazione del tipo $u_1^{\pi} - u_1 + a_1 = 0$, con $a_1 \in W(A)$. Pertanto per trovare una soluzione della (2) basta dimostrare che l'equazione

$$X^p - X + c = 0 \tag{3}$$

con $c \in A$ ammette soluzioni in $A$. Scriviamo $c = c_0 + c_1$, con $c_0 \in k$ e $c_1 \in A^+$; poichè $k$ è algebricamente chiuso, si trova in $k$ una soluzione $z$ di $X^p - X + c_0 = 0$. Allora una soluzione di (3) in $A$ è data da $z + \sum_{n=0}^{\infty} c_1^{p^n}$.

2) Le ipotesi fatte su $M$ dicono che $M$ è $W(k)$-modulo libero di ordine finito e che per ogni $x \in M$ è $\lim_{n\to\infty} \pi^n x = 0$.

Consideriamo la successione di $T_A$-moduli:

$$0 \to (M_{01})_A \to N \to M_A \to 0 \,. \tag{4}$$

Il $W(A)$-modulo $N$ risulta dunque libero di ordine finito. Consideriamo la successione trasposta

$$0 \to (M_{01})_A^* \to N^* \to M_A^* \to 0$$

ove $(M_{01})_A^*$, $N^*$, e $M_A^*$ sono i duali di $(M_{01})_A$, $N$ e $M_A$ come $W(A)$-moduli. Indichiamo con $t^*$ e $\pi^*$ i trasposti di $t$ e di $\pi$ rispettivamente; se indichiamo con « $\circ$ » la dualità, si ha $t^* y \circ x = (y \circ t x)^{\pi}$ e $\pi^* y \circ x = (y \circ \pi x)^{\pi^{-1}}$. L'essere $M$ equidimensionale dice che, dato l'intero positivo $s$, per $r$ elevato si ha $t^r M \subseteq p^s M$; poichè $A$ è perfetto questa stessa condizione vale per $M_A$. Questo permette di asserire che per ogni $y \in M_A^*$ l'applicazione $y \circ$ di $M_A$ su $W(A)$ è continua. Dotiamo ora $M_A^*$ della topologia un cui sistema fondamentale di intorni dello zero è dato dai $t^{*^n} M_A^*$; è facile verificare che rispetto a questa topologia $M_A^*$ risulta di Hausdorff e completo. Inoltre risulta

$\lim\limits_{n\to\infty} \pi^{*^n} y = 0$ per ogni $y \in M_A^*$. Ora, in $N^*$ possiamo trovare un $y$, elemento di un sistema libero di generatori di $N^*$ come $W(A)$-modulo, tale che $\pi^* y = y + z$ con $z \in M_A^*$ (questo perchè in $(M_{01})_A^*$ c'è un generatore libero $\bar{y}$ tale che $\pi^* \bar{y} = \bar{y}$). Cerchiamo un elemento $x \in M_A^*$ tale che $\pi^*(y + x) = y + x$. Deve essere $y + z + \pi^* x = y + x$, donde $(1 - \pi^*)x = z$. Pertanto $x = (1 - \pi^*)^{-1} z$, che esiste in $M_A^*$. Questo dimostra, dualizzando di nuovo (vale il teorema di bidualità, perchè i moduli in questione sono tutti liberi di ordine finito su $W(A)$), che la (4) è spezzata.

3) Ricordiamo che se $B$ è un anello con identità e $N, M, P$ sono $B$-moduli sinistri, risulta $\operatorname{Ext}(N \oplus M, P) = \operatorname{Ext}(N, P) \times \operatorname{Ext}(M, P)$. L'ultima asserzione segue subito dai primi due asserti e dal fatto che $M$ si spezza nella somma diretta di un certo numero di copie di $M_{01}$ e di un modulo canonico equidimensionale radicale, C.V.D.

Veniamo ora ai sistemi di bifattori. Diamo le definizioni. Sia $R = A[\![x]\!]$, come sopra, un'iperalgebra locale su $A$ di dimensione $n$. Per rendere più leggibili le definizioni, introduciamo le notazioni seguenti (cfr. [1] e [3]): con $x_1, x_2, x_3, \ldots$ indicheremo copie dell'insieme $x$ delle variabili (le quali singolarmente non saranno usate) e indicheremo $\mathbf{P}x$ con $x_1 + x_2$, $(\mathbf{P} \mathbin{\overline{\times}} \iota)\mathbf{P}x = (\iota \mathbin{\overline{\times}} \mathbf{P})\mathbf{P}x$ con $x_1 + x_2 + x_3$, eccetera.

Un elemento $F \in R \mathbin{\overline{\times}} R \mathbin{\overline{\times}} R = A[\![x_1, x_2, x_3]\!] = R_1 \mathbin{\overline{\times}} R_2 \mathbin{\overline{\times}} R_3$ si dice un *sistema di bifattori* (simmetrico e moltiplicativo) su $R$ se

$$F(x_1, x_2, x_3) = F(x_2, x_1, x_3) = F(x_1, x_3, x_2)$$

$$F(x_1 + x_2, x_3, x_4) F(x_1, x_2, x_4) = F(x_1, x_2 + x_3, x_4) F(x_2, x_3, x_4) .$$

$F$ dà dunque, comunque fissati due dei tre argomenti, un sistema di fattori in quegli argomenti.

Diremo che il sistema di Bifattori $F$ è *normalizzato* se

$$F(0, x_2, x_3) = F(x_1, 0, x_3) = F(x_1, x_2, 0) = 1 .$$

Nel seguito, come per i sistemi di fattori, i sistemi di bifattori che considereremo saranno supposti normalizzati.

Se $S$ è un'iperalgebra (non necessariamente locale) che prolunga $R$, diremo che il sistema di bifattori è *associato ad* 1 *su* $S$ se esiste $\vartheta \in S$ tale che

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{\vartheta(x_1 + x_2 + x_3)\vartheta(x_1)\vartheta(x_2)\vartheta(x_3)}{\vartheta(x_1 + x_2)\vartheta(x_1 + x_3)\vartheta(x_2 + x_3)} .$$

Se $F$ è associato ad 1, l'elemento $\vartheta$ è determinato a meno di un fattore $\xi$ di $S$ che soddisfa

$$\frac{\xi(x_1+x_2+x_3)\xi(x_1)\xi(x_2)\xi(x_3)}{\xi(x_1+x_2)\xi(x_1+x_3)\xi(x_2+x_3)}=1;$$

un elemento siffatto si dice un *elemento bimoltiplicativo* di $S$.

Ricordiamo che se $R$ è un ipercampo sul corpo perfetto $k$ (di caratt. $p>0$) con $\mathfrak{R}^0$ e con $\mathfrak{R}$ si denotano rispettivamente il bicampo incompleto ed il bicampo completo associati ad $R$ (si veda [MA] per le definizioni). Se $R$ è ipercampo locale (è cioè iperalgebra locale oltre che ipercampo) $\mathfrak{R}^0$ non è altro che il perfezionato di $R$; $\mathfrak{R}$ è il completato di $\mathfrak{R}^0$ nella topologia che estende la topologia naturale di $R$ (si veda, per una descrizione dettagliata di $\mathfrak{R}^0$ e di $\mathfrak{R}$, [2], par. 1).

TEOREMA, *Sia $R$ un ipercampo locale sul corpo algebricamente chiuso $k$ di caratteristica $p>0$. Ogni sistema di bifattori $F$ su $R$ è associato ad* 1 *sul bicampo $\mathfrak{R}$ associato ad $R$. Se $R$ è un ipercampo locale logaritmico* (*di pendenza* 1) *ogni sistema di bifattori è associato ad* 1 *su $R$. Se $R$ è ipercampo locale radicale lo stesso risultato vale anche se $k$ è soltanto perfetto.*

DIM. Consideriamo $F(x_1, x_2, x_3)$ come elemento di $k[\![x_1]\!][\![x_2, x_3]\!] = (R_2)_{R_1} \overline{\times} (R_3)_{R_1}$ (se $S$ è $k$-algebra, con $R_S$ indichiamo l'iperalgebra $S\overline{\times}_k R$, che si ottiene da $R$ per estensione degli scalari). Pertanto $F$ dà un sistema di fattori di $R_R$. Per il Lemma ogni tale sistema di fattori è associato ad 1 su $\mathfrak{R}^0$. Quindi esiste $\varphi \in \mathfrak{R}_1^0[\![x_2]\!]$ tale che

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{\varphi(x_1, x_2+x_3)}{\varphi(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_3)}. \tag{5}$$

(se $R$ è logaritmico, possiamo prendere $\varphi$ in $R_1[\![x_2]\!]$).

Facendo nella (5) $x_2=0$ si ottiene $\varphi(x_1, 0)=1$, mentre facendovi $x_1=0$, si ottiene $\varphi(0, x_2+x_3)=\varphi(0, x_2)\varphi(0, x_3)$. (Questo perchè $F$ è supposto normalizzato). Pertanto possiamo supporre (sostituendo eventualmente $\varphi(x_1, x_2)$ con $\varphi(x_1, x_2)/\varphi(0, x_2)$) che $\varphi(x_1, 0)=\varphi(0, x_2)=1$.

Poniamo ora

$$K(x_1, x_2, x_3) = \frac{\varphi(x_1, x_2+x_3)\varphi(x_2, x_3)}{\varphi(x_1+x_2, x_3)\varphi(x_1, x_2)}. \tag{6}$$

Si verifica subito che è $K(0, x_2, x_3), = K(x_1, 0, x_3) = K(x_1, x_2, 0) = 1$. $K(x_1, x_2, x_3)$ è elemento di $(\mathfrak{R}_1\overline{\times}\mathfrak{R}_2)^0\overline{\times}R_3$ (con $(\mathfrak{R}_1\overline{\times}\mathfrak{R}_2)^0$ denotiamo il perfezionato di $R_1\overline{\times}R_2$).

Da

$$F(x_1 + x_2, x_3, x_4)F(x_1, x_2, x_4) = F(x_1, x_2, x_3 + x_4)F(x_1, x_3, x_4)$$

segue, per la (5), che

$$\frac{\varphi(x_1 + x_2, x_3 + x_4)\varphi(x_1, x_2 + x_4)}{\varphi(x_1 + x_2, x_3)\varphi(x_1 + x_2, x_4)\varphi(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_4)} = \frac{\varphi(x_1, x_2 + x_3 + x_4)\varphi(x_2, x_3 + x_4)}{\varphi(x_1, x_2 + x_3)\varphi(x_1, x_4)\varphi(x_2, x_3)\varphi(x_2, x_4)},$$

donde

$$\frac{\varphi(x_1, x_2 + x_3 + x_4)\varphi(x_2, x_3 + x_4)}{\varphi(x_1 + x_2, x_3 + x_4)\varphi(x_1, x_2)} = \frac{\varphi(x_1, x_2 + x_3)\varphi(x_2, x_3)}{\varphi(x_1 + x_2, x_3)\varphi(x_1, x_3)}\,\frac{\varphi(x_1, x_2 + x_4)\varphi(x_2, x_4)}{\varphi(x_1 + x_2, x_4)\varphi(x_1, x_2)}$$

che, tenuto conto della (6), dà

$$K(x_1, x_2, x_3 + x_4) = K(x_1, x_2, x_3)\,K(x_1, x_2, x_4)\,.$$

Pertanto $K(x_1, x_2, x_3)$ è elemento moltiplicativo di $(R_3)_{(\mathfrak{R}_1 \overline{\times} \mathfrak{R}_2)^0}$. Poichè $k$ è algebricamente chiuso, deve essere $K(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1, x_2)\alpha(x_3)$, dove $\delta(x_1, x_2) \in (\mathfrak{R}_1 \overline{\times} \mathfrak{R}_2)^0$ e $\alpha(x_3)$ è elemento moltiplicativo di $R_3$. Si osservi che se $R$ è radicale, $R$ non possiede elementi moltiplicativi anche se si suppone che $k$ sia soltanto perfetto. Quindi, per la supposta normalizzazione, si ha in tutti i casi, che $\delta(x_1, x_2) = \alpha(x_3) = 1$, onde $K(x_1, x_2, x_3) = 1$.

È pertanto dimostrato che

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{\varphi(x_1, x_2 + x_3)}{\varphi(x_1, x_2)\varphi(x_1, x_3)} = \frac{\varphi(x_1 + x_2, x_3)}{\varphi(x_1, x_3)\varphi(x_2, x_3)}\,. \tag{7}$$

Si procede ora come in [1] e in [3]. Ripetiamo, per comodità del lettore, l'argomento ivi svolto. Dalla (7) segue che $\xi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)/\varphi(x_2, x_1)$ è elemento bimoltiplicativo antisimmetrico. Pertanto esiste un elemento bimoltiplicativo $\chi(x_1, x_2)$ in $\mathfrak{R}_1 \overline{\times} \mathfrak{R}_2$ tale che il sistema di fattori $\omega(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)\,\chi(x_1, x_2)$ sia simmetrico. Si noti che $\omega(x_1, x_2)$ è elemento di $\mathfrak{R}_1 \overline{\times} \mathfrak{R}_2$ (di $R_1 \overline{\times} R_2$, se $R$ è logaritmico). Poichè $k$ è algebricamente chiuso ogni sistema di fattori simmetrico su $\mathfrak{R}$ (e anche su $R$, se $R$ è logaritmico) è associato ad 1 (perchè se $k$ è algebricamente chiuso i bicampi sono tutti del tipo $\mathfrak{R}_{n,0} \times \mathfrak{R}_{r_1,s_1} \times \ldots \times \mathfrak{R}_{r_h,s_h}$ si veda [MA], paragrafo 38). A questa stessa conclusione si arriva se $R$ è ipercampo radicale su $k$ perfetto, perchè in tal caso ogni sistema di fattori su $\mathfrak{R}$ è associato ad 1.

Pertanto esiste $\vartheta \in \mathfrak{R}$ ($\in R$, nel caso logaritmico) tale che

$$\omega(x_1, x_2) = \frac{\vartheta(x_1 + x_2)}{\vartheta(x_1)\vartheta(x_2)};$$

da qui discende agevolmente l'asserto, C.V.D.

## BIBLIOGRAFIA

[MC] I. Barsotti, *Moduli canonici e gruppi analitici commutativi*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1959), pp. 303-372.

[MA] I. Barsotti, *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva*, Capitoli 3, 4, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **19** (1965), pp. 277-330.

[1] I. Barsotti, *Theta functions in positive characteristic*, Asterisque, **63** (1979), pp. 5-16.

[2] I. Barsotti, *Bivettori*, Symp. Math., **24** (1981), pp. 23-63.

[3] V. Cristante, *Theta functions and Barsotti-Tate groups*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **7** (1980), pp. 181-215.

[4] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Asterisque, **47-48** (1977), pp. 1-262.

[5] M. Hazewinkel, *Formal groups and applications*, Academic Press, New York, 1978.

[6] M. Lazard, *Commutative Formal Groups*, Lecture Notes in Math., no. 443, Springer, Berlin, 1975.

Istituto di Algebra e Geometria
Università di Padova
Via Belzoni, 7
35100 Padova