Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Valentino Cristante

Classi differenziali e forma di Riemann

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4e série, tome 4, nº 1 (1977), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_1_1_0>

Classi differenziali e forma di Riemann.

VALENTINO CRISTANTE (*)

È ben noto come il concetto di classe di ripartizioni e quello ad esso collegato di classe differenziale, introdotti in [2] da Barsotti, si siano rivelati particolarmente efficaci nello studio delle varietà abeliane.

In particolare, cfr. [3], hanno permesso una costruzione diretta della funzione theta associata ad un divisore di una varietà abeliana su di un corpo di caratteristica 0.

In questo lavoro si mostra come la forma di Riemann di una funzione theta sia collegata alla classe differenziale ∂X definita nel 3.2 di [2] (ivi denotata dX). Poi si trova, fatto congetturato da Barsotti, che lo spazio $\operatorname{diff}_2 A/\operatorname{diff}_e A$ è quello che, su di un corpo qualunque di caratteristica 0, sostituisce naturalmente lo spazio $\operatorname{diff}_1 A \oplus (\operatorname{diff}_1 A)^-$, ove $(\operatorname{diff}_1 A)^-$ è lo spazio dei coniugati dei differenziali invarianti su A. Infine, usando i metodi sviluppati nella prima parte, si trova la decomposizione di $\operatorname{diff}_2 A/\operatorname{diff}_e A$ che corrisponde alla somma $\operatorname{diff}_1 A \oplus (\operatorname{diff}_1 A)^-$.

Sia A una varietà abeliana di dimensione n sul corpo k di caratteristica 0; seguendo le notazioni di [3], con $\operatorname{diff}_1 A$, $\operatorname{diff}_2 A$, $\operatorname{diff}_e A$, indicheremo i k-moduli dei differenziali invarianti, semiinvarianti, ed esatti, su A, rispettivamente. Con $\operatorname{der} A$ indicheremo il duale di $\operatorname{diff}_1 A$. Per le definizioni di questi enti si confronti [1].

Ricordiamo che una classe di ripartizioni $\mathfrak{b}$ su A, è una applicazione definita sull'insieme delle sottovarietà irriducibili di codimensione 1 di A, che alla sottovarietà X associa un elemento di $k(A)/k(X/A)$, in modo tale che $\mathfrak{b}(X)$ sia quasi sempre nullo; qui, $k(X/A)$ indica l'anello locale di X su A. La classe $\mathfrak{b}$ è chiusa se per ogni $x \in A$ esiste $f_x \in k(A)$ tale che $\mathfrak{b}(X)$ sia l'immagine canonica di f_x in $k(A)/k(X/A)$, per ogni X passante per x; è esatta se f_x può essere scelta indipendente da x. $\mathcal{B}(A)$ ed $\mathcal{E}(A)$ indicano i k-moduli delle classi di ripartizioni chiuse ed esatte rispettivamente. Una classe differenziale è un elemento di $\operatorname{Hom}_k(\operatorname{der} A, \mathcal{B}(A))$. Dato che nei ragionamenti

(*) Istituto di Algebra e Geometria, Università di Padova.

Pervenuto alla Redazione il 26 Febbraio 1976.

che seguono ci si occuperà della forma di Riemann associata ad una funzione theta, e questa è invariante per l'equivalenza lineare (lo è addirittura per l'equivalenza algebrica), preferiamo usare enti associati ai sistemi lineari di divisori.

Così comparirà unicamente il quoziente $\mathcal{M}(A)=\mathcal{B}(A)/\mathcal{E}(A)$, e chiameremo *classi differenziali* gli elementi di $\mathrm{Hom}_k(\operatorname{der} A, \mathcal{M}(A))$. Infine, nel caso classico, per interpretare la classe differenziale associata ad una funzione theta, occorrerà passare dalle classi di ripartizioni alle loro analoghe analitiche; questo è più agevole nell'ambito della coomologia, dato che in questo contesto si può usufruire di teoremi noti. Il legame tra la coomologia e le classi di ripartizioni, cfr. [2], è dato da un isomorfismo naturale di $\mathcal{M}(A)$ su $H^1(A, \mathcal{O}_A)$, che si può descrivere brevemente come segue: sia $\mathcal{K}_A$ il fascio costante, ove $\mathcal{K}_x=k(A)$ per ogni $x\in A$; allora $\mathcal{B}(A)$ è isomorfo ad $H^0(A, \mathcal{K}_A/\mathcal{O}_A)$. Infatti, se si tiene conto che un elemento di $H^0(A, \mathcal{K}_A/\mathcal{O}_A)$ è un'applicazione $x\mapsto f_x+\mathcal{O}_x$, ove $f_x\in k(A)$, tale che per ogni x esistano un intorno U di x (nella topologia di Zariski) ed una $f\in k(A)$ soddisfacenti la $f\equiv f_y \bmod \mathcal{O}_y$, per ogni $y\in U$, si vede che è ben definita la corrispondenza che all'elemento $x\mapsto f_x+\mathcal{O}_x$ associa la classe $\mathfrak{b}$ data da:

$$\mathfrak{b}(X)=f_x+k(X/A)\,,$$

ove x appartiene ad X, per ogni sottovarietà irriducibile X di codimensione 1 di A. Che tale corrispondenza sia iniettiva, è quasi immediato. La suriettività discende dal fatto che l'applicazione che al punto x associa il rappresentante locale di $\mathfrak{b}$ in x, è localmente costante. In altre parole un elemento di $\mathcal{B}(A)$ è individuato da una famiglia finita (U_i, f_i), ove (U_i) è un ricoprimento aperto di A, e le f_i sono elementi di $k(A)$ individuati a meno di funzioni regolari su U_i, e tali inoltre che f_i-f_j sia regolare su $U_i\cap U_j$. L'applicazione che si ottiene associando alla classe di ripartizioni individuata da (U_i, f_i) l'elemento di $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ individuato dal cociclo $(U_i\cap U_j, f_i-f_j)$, è suriettiva; inoltre il suo nucleo è costituito dalle classi di ripartizioni esatte. Da ora in poi sostituiremo $\mathcal{M}(A)$ con $H^1(A, \mathcal{O}_A)$.

Sia X un divisore su A; la classe differenziale, secondo la definizione data sopra, che corrisponde alla classe differenziale ∂X introdotta nel 3.2 di [2], dipende soltanto dal sistema lineare L di X: la indicheremo con ∂L. Il legame esplicito tra L e ∂L è il seguente:

1. – *Sia L rappresentato dal cociclo $(U_i\cap U_j, g_{ij})$, ove g_{ij} è una sezione di $\mathcal{O}_A^*$ su $U_i\cap U_j$; allora ∂L è l'elemento di* $\mathrm{Hom}_k(\operatorname{der} A, H^1(A, \mathcal{O}_A))$ *tale che, per ogni $d\in\operatorname{der} A$, $(\partial L)d$ sia l'elemento di $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ rappresentato dal cociclo $(U_i\cap U_j, dg_{ij}/g_{ij})$.*

Con funzione theta intendiamo l'ente designato in [3] come funzione theta abeliana: cioè le funzioni theta sono certi elementi del corpo quoziente del completamento dell'anello locale del punto identità di A. È chiaro che se X è un divisore del sistema lineare L, e se ϑ_X è una funzione theta di X su A (cfr. n. 1 di [3]), allora L e quindi ∂L sono individuati da ϑ_X. Nel seguito ci servirà una espressione esplicita del legame tra ϑ_X e ∂L, che daremo interpretando la 1.2 di [3] in termini di aperti. Poniamo, per brevità, $\vartheta_X = \vartheta$; è noto, cfr. [3], che per ogni $d \in \operatorname{der} A$, l'espressione $\omega_d = \sum_j d_j(\mathrm{d}\vartheta/\vartheta)\,\partial u_j$ (ove (∂u_j) è una base di $\operatorname{diff}_1 A$ e (d_j) ne è la base duale di $\operatorname{der} A$) è un differenziale semiinvariante su A. Così, se si considera l'immagine canonica di ω_d in $\operatorname{diff}_2 A/(\operatorname{diff}_1 A + \operatorname{diff}_e A)$, si ottiene un'applicazione di $\operatorname{der} A$ su quest'ultimo. Tale applicazione è indipendente sia dalla scelta di X in L, che dall'espressione di ϑ prescelta: cambiare tali scelte significa moltiplicare ϑ per funzioni abeliane e per esponenziali quadratici, cfr. [3]; ma le prime producono elementi di $\operatorname{diff}_e A$, i secondi elementi di $\operatorname{diff}_1 A$. Componendo l'applicazione precedente con l'isomorfismo naturale di $\operatorname{diff}_2 A/(\operatorname{diff}_1 A + \operatorname{diff}_e A)$ su $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ definito nel 3.1 di [2], si ottiene una classe differenziale: essa è ∂L. Per convincersene, basta osservare che l'isomorfismo appena menzionato si può descrivere come segue (se ∂, come sempre nel seguito, è il simbolo di differenziazione):

2. – *Sia $\omega \in \operatorname{diff}_2 A$; allora come conseguenza del 2.2 di* [1], *esistono un ricoprimento aperto finito (U_i) di A, e degli elementi $f_i \in k(A)$, tali che il differenziale $\omega_i = \omega - \partial f_i$ sia di prima specie su U_i, per ogni i. L'applicazione che ad ω associa l'elemento di $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ in cui rappresentante è $(U_i \cap U_j, f_i - f_j)$ è suriettiva, e il suo nucleo è* $\operatorname{diff}_1 A + \operatorname{diff}_e A$.

D'altra parte la formula 1.2 di [3] dice che $\omega_d - \sum_j d_j(\mathrm{d}\varphi_i/\varphi_i)\,\partial u_j$, ove (U_i, φ_i) è una rappresentazione di X, è di prima specie su U_i. Questo, in base alle descrizioni 1 e 2, significa appunto che la classe differenziale associata a ϑ coincide con ∂L.

Ora mostreremo come ∂L sia legata alla forma di Riemann del caso classico, $k = \mathbf{C}$. Indichiamo con A_{an} la varietà analitica associata ad A; dato che A_{an} è un gruppo di Lie complesso e compatto, è noto, cfr. [5], p. 80, che esiste un isomorfismo locale suriettivo, $\exp_A$, di $\operatorname{der} A$ su A_{an}. L'insieme $\mathcal{T} = \{d : d \in \operatorname{der} A, \exp_A d = 0\}$ è un reticolo di $\operatorname{der} A$: lo chiameremo il gruppo dei periodi di A. (Si noti che se $x = \exp_A d$, allora per ogni funzione meromorfa f su A_{an} e per ogni punto y di A_{an} risulta:

$$f(y + x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d^i}{i!} f(y)\,,$$

qualora uno dei due membri sia definito; questa relazione caratterizza $\exp_A$, perciò può esserne presa come definizione.)

Osserviamo che in base al teorema 4.1 di [3] si può asserire che una funzione theta determina una funzione meromorfa definita su $\operatorname{der} A$. Precisamente, sia $u = (u_1, \ldots, u_n)$ una base degli integrali di prima specie normalizzati su A (normalizzati significa che gli u_i, in quanto coordinate su $\operatorname{der} A$, attribuiscono a 0 le coordinate $(0, \ldots, 0)$); se $\vartheta = \vartheta(u_1, \ldots, u_n)$ è una funzione theta, la funzione meromorfa è definita nel modo seguente:

$$d \mapsto \vartheta\big(d(u_1), \ldots, d(u_n)\big) .$$

È chiaro che tale definizione non dipende dalla scelta di u; quindi scriveremo brevemente $\vartheta(d)$.

Infine indichiamo con $A_{\mathbf{R}}$ la varietà analitica reale che si ottiene sostituendo ogni carta (V, u) di A_{an} con la carta $\big(V, (u, \bar{u})\big)$, ove $\bar{u}$ è la funzione complessa coniugata di u. Con riferimento al cap. II di [8], identificheremo il modulo dei differenziali invarianti su $A_{\mathbf{R}}$ con il modulo $\operatorname{diff}_1 A \oplus (\operatorname{diff}_1 A)^-$; e indicheremo con ∂, $\bar{\partial}$, $\delta = \partial + \bar{\partial}$, gli operatori che in quel capitolo sono indicati con d', d'', d, rispettivamente.

Sia L un sistema lineare di divisori su A; è noto allora, si veda ad es. la formula 6 del cap. VI di [8], che L individua una forma hermitiana H su $\operatorname{der} A$ ed un semicarattere χ di $\mathfrak{T}$. Più precisamente, se $X \in L$ è un divisore effettivo, esiste una funzione theta olomorfa ϑ, unica a meno di un fattore costante, tale che $\vartheta = \vartheta_X$ e tale inoltre che per ogni $d \in \operatorname{der} A$ ed ogni $p \in \mathfrak{T}$ risulti:

$$a) \quad \vartheta(d + p) = \vartheta(d)\chi(p) \exp 2\pi i \left[-\frac{i}{2} H(d, p) - \frac{i}{4} H(p, p)\right],$$

con H $\mathbf{C}$-lineare nel primo argomento e $\mathbf{C}$-antilineare nel secondo (si noti lo scambio rispetto alla notazione di [8]). Una tale theta la diremo *ridotta*; e dato che H e χ sono invarianti per l'equivalenza lineare, porremo $H = H_L$ e $\chi = \chi_L$, mentre con h_L indicheremo l'elemento di $\operatorname{Hom}\big(\operatorname{der} A, (\operatorname{diff}_1 A)^-\big)$ definito da

$$(h_L d)\, d' = \pi H_L(d, d') .$$

Le relazioni che legano queste notazioni a quelle di [3] sono:

$$H_L(d, d') = 2i\widetilde{\overline{d'(u)}} A_2 d(u) ,$$

e

$$\chi_L(p) \qquad = \exp 2\pi i \left[(\bar{D}_2, D_2)\begin{pmatrix} p(u) \\ \overline{p(u)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\big(\widetilde{p(u)}\widetilde{\overline{p(u)}}\big) H \begin{pmatrix} p(u) \\ \overline{p(u)} \end{pmatrix}\right],$$

ove $d(u)$ è la matrice trasposta di $\big(d(u_1), \ldots, d(u_n)\big)$.

Come si è già osservato, la costruzione di ∂L tramite una delle ϑ_X non dipende dall'espressione di quest'ultima; perciò nel seguente teorema, ϑ indicherà una delle theta ridotte *associate* a L, ossia una ϑ_X ridotta, con $X \in L$.

TEOREMA 1. *Esiste un omomorfismo naturale* μ_A *di* $(\mathrm{diff}_1 A)^-$ *in* $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ *tale che* $\mu_A h_L = \partial L$.

DIM. i) Descrizione di μ_A. Indichiamo con $\mathcal{H}_A$ il fascio dei germi delle funzioni analitiche su A_{an}. È noto, cfr. [7], che l'equivalenza naturale che vi è su di una varietà proiettiva sui complessi tra fasci algebrici coerenti ed analitici coerenti conserva i gruppi di coomologia. Ne consegue che $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ è naturalmente isomorfo ad $H^1(A_{\mathrm{an}}, \mathcal{H}_A)$. D'altra parte il teorema di Dolbeault, cfr. [4], afferma che $H^q(A_{\mathrm{an}}, \mathcal{H}_A)$ è isomorfo al gruppo di coomologia di tipo $(0, q)$:

$$H^1(A_{\mathrm{an}}, \mathcal{H}_A) \cong \frac{(\mathbb{C}\text{-modulo dei differenziali di tipo } (0,1)\ \bar{\partial}\text{-chiusi})}{(\mathbb{C}\text{-modulo dei differenziali di tipo } (0,1)\ \bar{\partial}\text{-esatti})}\,.$$

Se indichiamo con D quest'ultimo $\mathbb{C}$-modulo, l'isomorfismo si può descrivere nel modo seguente: all'elemento di $H^1(A_{\mathrm{an}}, \mathcal{H}_A)$ rappresentato da $(V_i \cap V_j, f_{ij})$ corrisponde l'elemento di D ogni cui rappresentante ω è individuato dalla proprietà seguente: $\omega|_{V_i} = \bar{\partial} g_i$ se $(g_i - g_j)|_{V_i \cap V_j} = f_{ij}$.

Poichè $(\mathrm{diff}_1 A)^-$ è contenuto nel modulo dei differenziali di tipo $(0, 1)$ $\bar{\partial}$-chiusi, vi è un'applicazione di $(\mathrm{diff}_1 A)^-$ in D, e quindi in $H^1(A, \mathcal{O}_A)$: questa è μ_A.

ii) $\mu_A h_L = \partial L$. Intanto per quanto visto in precedenza, l'elemento $h_L d$ di $(\mathrm{diff}_1 A)^-$ è il differenziale invariante di tipo $(0, 1)$ dato da $\pi \sum_j H_L(d, d_j)\,\partial\bar{u}_j$; poi, in base alla descrizione 1, se $(U_i \cap U_j, f_{ij})$ è un rappresentante di L, l'applicazione ∂L associa a d l'elemento di $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ un cui rappresentante è $(U_i \cap U_j,\ df_{ij}/f_{ij})$. Ora vogliamo interpretare le descrizioni 1 e 2 su A_{an}; questo è possibile usando l'identificazione di $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ con $H^1(A, \mathcal{H}_A)$. A tale scopo consideriamo un ricoprimento aperto finito (V_i) di A_{an}, costituito da aperti connessi piccoli abbastanza da rendere ogni $\exp_A^{-1} V_i$ unione di aperti connessi disgiunti, ognuno dei quali sia omeomorfo a V_i. Se indichiamo con V_{i0} uno di questi ultimi, tutti gli altri si ottengono aggiungendo a V_{i0} elementi di $\mathcal{T}$. Poi, osserviamo che per tutti gli i, j tali che $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, esiste ed è unico il $p_{ij} \in \mathcal{T}$ tale che $V_{i0} \cap (V_{j0} + p_{ij})$ sia omeomorfo a $V_i \cap V_j$.

Il differenziale $\omega_d = \sum_j d_j (d\vartheta/\vartheta)\,\partial u_j$ si può interpretare come differenziale sulla varietà analitica der A, e come tale è esatto; ne consegue che ω_d in quanto differenziale su A_{an} è localmente esatto: le sue primitive in V_i

sono le f_{ip} definite per ogni p di $\mathcal{T}$ da:

$$f_{ip}(\exp_A d') = (d \log \vartheta)(d') ,$$

se $d' \in V_{i0} + p$. Se quindi si scelgono le primitive f_{i0}, e se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, per ogni $d' \in V_{j0}$ tale che $\exp_A d' \in V_i \cap V_j$ risulta:

$$(f_{i0} - f_{j0})(\exp_A d') = (d \log \vartheta)(d' + p_{ij}) - (d \log \vartheta)(d') =$$
$$= d \log \frac{\vartheta(d' + p_{ij})}{\vartheta(d')} = \pi H_L(d, p_{ij}) = (h_L d) p_{ij}$$

(per la penultima uguaglianza si confronti la formula a)).

Ne consegue che ∂L composto con l'identificazione canonica di $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ con $H^1(A_{\mathrm{an}}, \mathcal{K}_A)$ associa a d l'elemento di $H^1(A_{\mathrm{an}}, \mathcal{K}_A)$ un cui rappresentante è:

$$(V_i \cap V_j, (h_L d) p_{ij}) .$$

Infine, osserviamo che μ_A, composto con l'identificazione canonica, associa al differenziale invariante $\lambda = \pi \sum_j H(d, d_j)\, \partial \bar{u}_j$ l'elemento di $H^1(A_{\mathrm{an}}, \mathcal{K}_A)$ rappresentato da $(V_i \cap V_j, g_{ij})$, ove g_{ij} è la differenza delle $\bar{\partial}$-primitive di $\lambda|_{V_i}$ e di $\lambda|_{V_j}$ ristrette a $V_i \cap V_j$ (vedasi la parte i) di questa dimostrazione). Analogamente al caso di ω_d, λ è $\bar{\partial}$-esatto in quanto differenziale sulla varietà der A: una sua $\bar{\partial}$-primitiva è $d' \mapsto \pi H_L(d, d')$; quindi scegliendo le $\bar{\partial}$-primitive sui V_i col criterio precedentemente usato per ω_d, si ha:

$$g_{ij}(\exp_A d') = \pi\big(H_L(d, d' + p_{ij}) - H_L(d, d')\big) = \pi H_L(d, p_{ij}) = (h_L d)(p_{ij})$$

se $d' \in V_{j0}$ è tale che $\exp_A d' \in V_i \cap V_j$. C.V.D.

A questo punto, cfr. ad es. n. 2 e lemma 6 del n. 5 del cap. IV di [8], si potrebbe dimostrare direttamente che μ_A è isomorfismo: l'applicazione inversa di quella di $(\mathrm{diff}_1 A)^-$ in D precedentemente descritta, è l'applicazione che ad ogni elemento λ di D associa il differenziale i cui coefficienti sono i valori medi dei coefficienti corrispondenti di un qualunque rappresentante di λ. Però, con i dati ora in nostro possesso, è più rapido dedurre questo risultato dal seguente

COROLLARIO 1. $\mathrm{diff}_2 A/(\mathrm{diff}_1 A + \mathrm{diff}_e A)$ *è canonicamente isomorfo a* $(\mathrm{diff}_1 A)^-$. *Inoltre* μ_A *è isomorfismo di* $(\mathrm{diff}_1 A)^-$ *su* $H^1(A, \mathcal{O}_A)$.

DIM. Se L è non degenere, sia h_L che ∂L sono isomorfismi, cfr. cap. VI di [8] e [3]; quindi μ_A è isomorfismo. L'isomorfismo dell'enunciato è il composto di μ_A e dell'isomorfismo naturale di $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ in $\operatorname{diff}_2 A/(\operatorname{diff}_1 A + \operatorname{diff}_e A)$ descritto in 2. C.V.D.

Se $\tilde{A}$ è la varietà di Picard di A, e se $X \in L$, l'applicazione φ_X di A su $\tilde{A}$ definita a pag. 75 di [6] dipende unicamente da L; perciò qui la indicheremo con φ_L, mentre con $\operatorname{der}\varphi_L$ indicheremo l'applicazione tangente di φ_L (essa è l'unica applicazione lineare di $\operatorname{der} A$ su $\operatorname{der}\tilde{A}$ tale che: $\varphi_L \exp_A = \exp_{\tilde{A}} \operatorname{der}\varphi_L$).

COROLLARIO 2. *Se L è non degenere, l'applicazione $\nu_A = h_L(\operatorname{der}\varphi_L)^{-1}$ non dipende da L e fornisce un isomorfismo canonico di* $\operatorname{der}\tilde{A}$ *su* $(\operatorname{diff}_1 A)^-$.

DIM. Sia Δ il sistema lineare su $A \times \tilde{A}$ determinato da un divisore di Poincaré. Tenendo presente che $\operatorname{der}(A \times \tilde{A}) \cong \operatorname{der} A \oplus \operatorname{der}\tilde{A}$ e che $H^1(A \times \tilde{A}, \mathcal{O}_{A\times\tilde{A}}) \cong H^1(A, \mathcal{O}_A) \oplus H^1(\tilde{A}, \mathcal{O}_{\tilde{A}})$, si vede che $\partial\Delta$ fornisce un omomorfismo φ_A di $\operatorname{der}\tilde{A}$ su $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ definito da:

$$\varphi_A = \operatorname{pr}_1\left(\partial\Delta|_{\operatorname{der}\tilde{A}}\right),$$

ove pr_1 è la prima proiezione di $H^1(A, \mathcal{O}_A) \oplus H^1(\tilde{A}, \mathcal{O}_{\tilde{A}})$. È anche noto, cfr. [3], che φ_A è isomorfismo, che non dipende da Δ, e che $\partial L = -\varphi_A \operatorname{der}\varphi_L$. Quindi $\mu_A h_L = -\varphi_A \operatorname{der}\varphi_L$, cioè $h_L(\operatorname{der}\varphi_L)^{-1} = -\mu_A^{-1}\varphi_A$; ma $\mu_A^{-1}\varphi_A = \nu_A$ non dipende da L. C.V.D.

Se il sistema lineare L è costituito da divisori algebricamente equivalenti a 0, è noto, cfr. [2], che $\partial L = 0$; quindi per il teorema 1 ed il corollario 1, anche $H_L = 0$; ne consegue, cfr. [8], cap. VI, che la *forma satellite* di $\operatorname{Im} H_L$ (cioè la H di [3]) può essere scelta uguale a 0, e che quindi χ_L è un carattere.

L'isomorfismo ν_A del corollario 2 permette di descrivere $\chi_{\tilde{x}}$ per ogni $\tilde{x}$ di $\tilde{A}$ (qui $\tilde{x}$ è pensato come sistema lineare su A), e stabilisce inoltre il legame tra $\mathfrak{T}$ ed il gruppo $\tilde{\mathfrak{T}}$ dei periodi di $\tilde{A}$. Per illustrare tali legami ci serve una relazione tra ν_A e Δ più esplicita di quanto non la dia il corollario 2.

A tale scopo osserviamo che se $\alpha: A \to B$ è un omomorfismo di varietà abeliane, esiste un unico omomorfismo $\operatorname{diff}\alpha$ di $(\operatorname{diff}_1 B)^-$ su $(\operatorname{diff}_1 A)^-$ definito da:

$$\omega(\operatorname{der}\alpha d) = (\operatorname{diff}\alpha\omega)\, d, \tag{b}$$

per ogni $d \in \operatorname{der} A$ ed ogni $\omega \in (\operatorname{diff}_1 B)^-$.

Ora sia L un sistema lineare su B; con $\alpha^* L$ indicheremo la cotraccia di L in A; se $Y \in L$ ed $\alpha^* Y$ esiste, si ha:

$$\vartheta_{\alpha^* Y}(d) = \vartheta_Y(\operatorname{der}\alpha d),$$

per ogni $d \in \operatorname{der} A$; perciò:

$$H_{\alpha^* L}(d, d') = H_L(\operatorname{der}\alpha d, \operatorname{der}\alpha d'),$$

e quindi per b)

$$c) \qquad h_{\alpha^* L} = \operatorname{diff} \alpha h_L \operatorname{der} \alpha .$$

Ora possiamo enunciare il seguente

LEMMA. $\nu_A = -h_A \overset{\text{def}}{=\!=} -\operatorname{pr}_1(h_\Delta|_{\operatorname{der} \tilde{A}})$.

DIM. Le notazioni matriciali hanno il significato del 7.11 di [9]; per le altre notazioni si confronti la dimostrazione del corollario 2. Sia L un sistema lineare non degenere su A, e si considerino le applicazioni

$$\alpha: A \times A \to A \quad \text{ e } \quad \beta: A \times A \to A \times \tilde{A},$$

definite da $\alpha(x, y) = x - y$ e $\beta(x, y) = (x, \varphi_L y)$.

Se poniamo $D = \alpha^* L$ e $\Delta' = \beta^* \Delta$, è noto, cfr. 7.11 di [9], che $D = \Delta' + M \times A + A \times N$, dove, per esempio, M è un sistema lineare su A, ed $M \times A$ indica il sistema lineare su $A \times A$ che contiene gli $X \times A$, con $X \in M$; e quindi

$$h_D = h_{\Delta'} + \begin{pmatrix} h_M & 0 \\ 0 & h_N \end{pmatrix}.$$

D'altra parte per c) risulta:

$$h_D = \operatorname{diff} \alpha\, h_L \operatorname{der} \alpha = \begin{pmatrix} h_L & -h_L \\ -h_L & h_L \end{pmatrix},$$

e

$$h_{\Delta'} = \operatorname{diff} \beta\, h_\Delta \operatorname{der} \beta = \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \operatorname{diff} \varphi_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & h_A \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \operatorname{der} \varphi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & h_A \operatorname{der} \varphi_L \\ ? & ? \end{pmatrix}.$$

Perciò $-h_L = h_A \operatorname{der} \varphi_L$; confrontando questa con la definizione di ν_A si ottiene $h_A = -\nu_A$. C.V.D.

Si noti che questa è un'altra dimostrazione del corollario 2.

Poniamo (per $d \in \operatorname{der} A$ e $\tilde{d} \in \operatorname{der} \tilde{A}$)

$$d \circ \tilde{d} = -\pi^{-1} \operatorname{Im}((\nu_A \tilde{d}) d);$$

la descrizione di $\chi_{\tilde{x}}$ è il primo punto del seguente

TEOREMA 2. 1). *Se* $\tilde{x} \in A$, *si ha* $\chi_{\tilde{x}} p = \exp 2\pi i (p \circ \tilde{d})$, *per ogni* $p \in \mathfrak{T}$ *ed ogni* $\tilde{d} \in \operatorname{der} \tilde{A}$ *tale che* $\exp_{\tilde{A}} \tilde{d} = \tilde{x}$;

2) *L'applicazione* $\zeta_A: \tilde{x} \mapsto \chi_{\tilde{x}}$ *è isomorfismo di* $\tilde{A}$ *sul gruppo* $\mathfrak{T}^*$ *dei caratteri di* $\mathfrak{T}$;

3) $\tilde{\mathfrak{T}} = \{\tilde{d} \colon \tilde{d} \in \operatorname{der} \tilde{A},\ p \circ \tilde{d} \in \mathbb{Z}$ *per ogni* $p \in \mathfrak{T}\}$;

4) *Se* $x = \exp_A d \in A$, *l'applicazione* $\chi'_x \colon \tilde{p} \mapsto \exp 2\pi i (d \circ \tilde{p})$ *è un carattere di* $\tilde{\mathfrak{T}}$ *che dipende solo da* x;

5) *Se* A *è identificata canonicamente con la propria biduale, si ha* $\chi'_x = \chi_x^{-1}$.

DIM. Sia $\mathfrak{T}^*$ il gruppo dei caratteri di $\mathfrak{T}$, e sia $\varrho_A \colon (\operatorname{diff}_1 A)^- \to \mathfrak{T}^*$ l'applicazione definita da $(\varrho_A \omega) p = \exp 2\pi i \operatorname{Im}(\omega p)$, per ogni $p \in \mathfrak{T}$ ed ogni $\omega \in (\operatorname{diff}_1 A)^-$. Se L è non degenere si avrà:

$$\varrho_A(\pi^{-1} h_L d) p = \exp 2\pi i \big(\operatorname{Im} H_L(d, p)\big) ;$$

d'altra parte, cfr. prop. 3 del n. 3 del cap. VI di [8], si ha anche:

$$\big(\zeta_A(\varphi_L(\exp_A d))\big) p = \exp 2\pi i \big(-\operatorname{Im} H_L(d, p)\big) ;$$

quindi vista la definizione di $\operatorname{der} \varphi_L$, risulta:

$$d) \qquad \zeta_A \exp_{\tilde{A}} \operatorname{der} \varphi_L = \varrho_A(-\pi^{-1}) h_L .$$

Infine ricordando che φ_L è isomorfismo, il corollario 2 dà:

$$e) \qquad \zeta_A \exp_{\tilde{A}} = \varrho_A(-\pi^{-1}) \nu_A ,$$

sicchè se $\tilde{x} = \exp_{\tilde{A}} \tilde{d}$ si ha:

$$f) \qquad \chi_{\tilde{x}} = \exp - 2i \operatorname{Im}(\nu_A \tilde{d}) ,$$

che è il primo asserto.

Se il carattere $\chi_{\tilde{x}} = 1$, allora $\tilde{x}$ in quanto sistema lineare su A è linearmente equivalente a 0, cioè $\tilde{x} = 0_{\tilde{A}}$; d'altra parte, ϱ_A è suriettiva, perciò la d) dà la suriettività di ζ_A; da cui 2.

Il terzo asserto è conseguenza di 2, di e), e di f): infatti e) dice che $\exp_{\tilde{A}} \tilde{d} = 0$ se e solo se $\chi_{\tilde{x}} = 1$, cioè, per f), se e solo se $p \circ \tilde{d} \in \mathbb{Z}$ per ogni $p \in \mathfrak{T}$.

Il quarto asserto è conseguenza dei precedenti: che χ'_x sia carattere di $\tilde{\mathfrak{T}}$ lo si vede dalla definizione di $d \circ \tilde{d}$; che χ'_x non dipenda dal d usato per costruirlo, discende dalla caratterizzazione di $\tilde{\mathfrak{T}}$ appena data.

Per quanto riguarda il 5, si osservi che

$$\chi_x(\tilde{p}) = \exp 2\pi i \big[-\pi^{-1} \operatorname{Im}\big((\nu_{\tilde{A}} d) \tilde{p}\big)\big] ,$$

per ogni $d \in \operatorname{der} A$ tale che $\exp_A d = x$; così per concludere basta mostrare che

$$\operatorname{Im}(\nu_{\tilde{A}} d)\tilde{d} = -\operatorname{Im}(\nu_A \tilde{d})\, d\,,$$

cioè che

$$d \circ \tilde{d} = -\tilde{d} \circ d\,.$$

Ma questa uguaglianza discende dal lemma e dal fatto che $\operatorname{Im} H_A$ è bilineare alternante. Infatti:

$$\operatorname{Im}(\nu_A \tilde{d})\, d = -\operatorname{Im}(h_A \tilde{d})\, d = -\operatorname{Im} H_A(\tilde{d}, d)\,,$$

mentre

$$\operatorname{Im}(\nu_{\tilde{A}} d)\tilde{d} = -\operatorname{Im}(h_{\tilde{A}} d)\tilde{d} = -\operatorname{Im} H_A(d, \tilde{d})\,;$$

quindi $\chi'_x = \chi_x^{-1}$. C.V.D.

Ora ci occuperemo di $\operatorname{diff}_2 A/\operatorname{diff}_e A$.

TEOREMA 3. *Esiste un isomorfismo naturale* η_A *di* $\operatorname{diff}_2 A/\operatorname{diff}_e A$ *su* $\operatorname{diff}_1 A \oplus (\operatorname{diff}_1 A)^-$. *Se* pr_2 *è la seconda proiezione di* $\operatorname{diff}_1 A \oplus (\operatorname{diff}_1 A)^-$ *si ha che* $\ker(\mathrm{pr}_2 \eta_A) = \operatorname{diff}_1 A$.

DIM. Indichiamo, come già detto, con δ l'operatore di cobordo del complesso di de Rham su $A_{\mathbf{R}}$, e sia

$$D_1 = \frac{(\mathbf{C}\text{-modulo dei differenziali di grado 1 } \delta\text{-chiusi})}{(\mathbf{C}\text{-modulo dei differenziali di grado 1 } \delta\text{-esatti})}\,.$$

Con ragionamento analogo a quello usato nella parte i) della dimostrazione del teorema 1, si può immergere $\operatorname{diff}_1 A \oplus (\operatorname{diff}_1 A)^-$ nel modulo dei differenziali δ-chiusi; così si costruisce un omomorfismo ξ di $\operatorname{diff}_1 A \oplus (\operatorname{diff}_1 A)^-$ su D_1.

Poi, dato che su $A_{\mathbf{R}}$ non vi sono differenziali invarianti esatti, ξ è iniettivo. Infine usando l'osservazione che segue il teorema 1 si conclude che ξ è isomorfismo.

Ora mostreremo che esiste un isomorfismo naturale ψ di $\operatorname{diff}_2 A/\operatorname{diff}_e A$ su D_1. Sia $\omega \in \operatorname{diff}_2 A$; ω in quanto differenziale di A_{an} è localmente esatto; sia ad esempio f_i una sua primitiva in V_i; allora se $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, $(f_i - f_j)|_{V_i \cap V_j} = C_{ij}$ è una costante. In questa situazione, cfr. ad es. n. 2 del cap. V di [8], per ogni i si può trovare una funzione φ_i indefinitamente differenziabile, definita su V_i e tale che $(\varphi_i - \varphi_j)|_{V_i \cap V_j} = C_{ij}$. Dunque esiste un differenziale λ di tipo C^∞ di $A_{\mathbf{R}}$ definito da $\lambda|_{V_i} = \delta\varphi_i$; λ in quanto localmente δ-esatto è δ-chiuso.

Se si esamina la corrispondenza $\omega \to \lambda$ appena descritta, si vede che λ è δ-esatto se e soltanto se $\omega \in \operatorname{diff}_e A$; tale corrispondenza induce quindi un omomorfismo iniettivo ψ di $\mathrm{diff}_2 A/\mathrm{diff}_e A$ su D_1. Se si confrontano le dimensioni si conclude che $\eta_A = \xi^{-1}\psi$ è isomorfismo. Per quanto riguarda il $\ker(\mathrm{pr}_2\eta_A)$, si osservi che $\psi(\omega)=\omega$ se e solo se ω è di prima specie. C.V.D.

Per terminare, completeremo le informazioni fornite dal teorema 3 con la descrizione di $\eta_A^{-1}(\mathrm{diff}_1 A)^-$, mostrando come esso sia collegato alla varietà di Picard di A.

Sia ω' un elemento di $\mathrm{diff}_2 A/\mathrm{diff}_e A$, e ne sia $\omega = \partial(d\log\vartheta)$ un rappresentante; allora (cfr. formula 5 a pag. 111 di [8], con gli argomenti scambiati) si avrà:

$$d\log\frac{\vartheta(d'+p)}{\vartheta(d')} = \pi\big(H(d,p)+\Phi(d,p)\big)\,,$$

per ogni $d'\in\mathrm{der}\,A$ ed ogni $p\in\mathfrak{T}$.

Nelle notazioni delle dimostrazioni dei teoremi 1 e 3, risulta ora

$$\varphi_i(\exp_A d') = \pi[H(d,d')+\Phi(d,d')],\,.$$

Perciò

$$\lambda = \eta_A(\omega') = \pi\Big[\sum_j H(d,d_j)\,\partial\bar{u}_j + \sum_j \Phi(d,d_j)\,\partial u_j\Big]\,.$$

Notiamo che l'immagine di $\eta_A(\omega')$ in $(\mathrm{diff}_1 A)^-$, ottenuta mediante la proiezione canonica, è anche immagine, tramite l'isomorfismo del primo asserto del corollario 1, dell'elemento di $\mathrm{diff}_2 A/(\mathrm{diff}_1 A + \mathrm{diff}_e A)$ che contiene ω.

Ora se L è un sistema lineare su A, e se ϑ è una theta ridotta associata a L, l'applicazione

$$\beta_L\colon \mathrm{der}\,A \to \mathrm{diff}_2 A/\mathrm{diff}_e A$$

definita da $\beta_L d = \partial(d\log\vartheta)$, non dipende che da L.

Con le notazioni della dimostrazione del corollario 2, dato che

$$\mathrm{diff}_2(A\times\tilde{A})/\mathrm{diff}_e(A\times\tilde{A}) \cong \mathrm{diff}_2 A/\mathrm{diff}_e A \oplus \mathrm{diff}_2\tilde{A}/\mathrm{diff}_e\tilde{A}\,,$$

si ottiene l'applicazione $\beta_A = \mathrm{pr}_1(\beta_A|_{\mathrm{der}\tilde{A}})$, ove pr_1 è la prima proiezione di $\mathrm{diff}_2 A/\mathrm{diff}_e A \oplus \mathrm{diff}_2\tilde{A}/\mathrm{diff}_e\tilde{A}$. Infine tenendo conto delle osservazioni precedenti, si vede che $j\mu_A^{-1}\varphi_A = \eta_A\beta_A$, ove j indica l'iniezione canonica di $(\mathrm{diff}_1 A)^-$ in $\mathrm{diff}_1 A \oplus (\mathrm{diff}_1 A)^-$; quindi $j\nu_A = \eta_A\beta_A$.

In conclusione si ha il seguente

TEOREMA 4. *Nelle notazioni ora date*, $\mathrm{diff}_2 A/\mathrm{diff}_e A = \mathrm{diff}_1 A \oplus \beta_A(\mathrm{der}\tilde{A})$; *inoltre* $\eta_A(\mathrm{diff}_1 A) = \mathrm{diff}_1 A$, e $\eta_A(\beta_A(\mathrm{der}\tilde{A})) = (\mathrm{diff}_1 A)^-$.