

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

MARIO MIRANDA

Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 4, n° 1
(1977), p. 129-132

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_1_129_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime.

MARIO MIRANDA (*)

dedicato a Hans Lewy

Nel 1965 E. De Giorgi e G. Stampacchia [1] hanno dimostrato che: se Ω è aperto di \mathbf{R}^n , se K è compatto in Ω con $H_{n-1}(K) = 0$, se f è soluzione dell'equazione delle superficie minime in $\Omega - K$, allora f è soluzione dell'equazione delle superficie minime in Ω .

L'ipotesi di compattezza di K in Ω è essenziale per il successo della tecnica di De Giorgi-Stampacchia, fondata sul principio del massimo. Tale ipotesi non è esplicitamente fatta nel caso $n = 2$, vedi J. C. C. Nitsche, § 6 di [2], in quanto di fatto contenuta nell'ipotesi $H_1(K) = 0$.

In questo articolo provo la tesi di De Giorgi-Stampacchia senza l'ipotesi di compattezza di K . Il risultato è ottenuto come conseguenza pressochè immediata dello studio delle soluzioni generalizzate dell'equazione delle superficie minime contenuto in [3]. L'osservazione che qui faccio è che una soluzione classica dell'equazione delle superficie minime in $\Omega - K$, con K chiuso e $H_{n-1}(K) = 0$, è soluzione generalizzata in Ω , quindi, grazie a quanto provato nel § 1 di [3], è soluzione classica in Ω .

A titolo di curiosità dirò che la tecnica per lo studio delle soluzioni generalizzate applicata in [3] è essenzialmente fondata sulla diseguaglianza di Harnack per le soluzioni delle equazioni ellittiche su superficie minime (E. Bombieri-E. Giusti [4]) quindi, se si vuole, su un principio di massimo forte.

Ringrazio D. Kinderlehrer e G. Anzellotti con i quali ho discusso il contenuto di questo articolo.

1. – Ricordiamo che un insieme di Borel E di \mathbf{R}^k ha frontiera di misura minima nell'aperto A di \mathbf{R}^k se per ogni aperto limitato A_0 , contenuto con

(*) Facoltà di Scienze, Libera Università degli Studi. Povo (Trento).
Pervenuto alla Redazione il 3 Maggio 1976.

la sua chiusura in $A(A_0 \subset\subset A)$ si ha

$$(1.1) \quad |D\varphi_E|(A_0) = \sup \left\{ \int_E \sum_{i=1}^k D_i \phi_i dx \mid \phi \in [C_0^1(A_0)]^k, |\phi(x)| \leq 1, \forall x \right\} < +\infty,$$

e se per ogni boreliano M tale che $E \Delta M = (M - E) \cup (E - M) \subset\subset A_0$ si ha

$$(1.2) \quad |D\varphi_E|(A_0) \leq |D\varphi_M|(A_0).$$

Vale ovviamente, se E ha frontiera di misura minima in A , per ogni aperto $L \subset\subset A$, con frontiera localmente lipschitziana,

$$(1.3) \quad |D\varphi_E|(L) \leq H_{k-1}(\partial L).$$

La (1.3) si ottiene dalla (1.2) ponendo $M = E - L$, scegliendo un qualunque A_0 tale che $L \subset\subset A_0 \subset\subset A$ e osservando che con tali scelte, grazie al teorema 2 di [5], si ha

$$(1.4) \quad |D\varphi_M|(A_0) = |D\varphi_E|(A_0 - \bar{L}) + \int_{\partial L} T\varphi_E dH_{k-1},$$

dove $T\varphi_E$ è la traccia della funzione caratteristica di E su ∂L (dall'esterno).

Per applicare i risultati del § 1 di [3] al problema di eliminazione di singolarità che qui c'interessa ho bisogno del seguente

LEMMA. « Se A è aperto di R^k , se N è chiuso con $H_{k-1}(N) = 0$, se E è boreliano con frontiera di misura minima in $A - N$, allora E ha frontiera di misura minima in A ».

DIMOSTRAZIONE. - Osserviamo innanzitutto che per ogni aperto $A_0 \subset\subset A$ si ha

$$(1.5) \quad |D\varphi_E|(A_0) = |D\varphi_E|(A_0 - N).$$

Infatti, essendo N chiuso e $H_{k-1}(N) = 0$, esiste una successione di aperti B_j di R^k con frontiera localmente lipschitziana tali che

$$(1.6) \quad N \subset B_j, \forall j; \quad \lim_j H_k(B_j) = 0; \quad \lim_j H_{k-1}(\partial B_j) = 0.$$

Pertanto $\forall \phi \in [C_0^1(A_0)]^k$ si ha

$$(1.7) \quad \int_E \sum_{i=1}^k D_i \phi_i dx = \lim_j \int_{E - B_j} \sum_{i=1}^k D_i \phi_i dx = \lim_j \cdot \left\{ - \sum_{i=1}^k \int_{A_0 - \bar{B}_j} \phi_i d\alpha_i + \int_{\partial B_j} T\varphi_E \phi \cdot \nu dH_{k-1} \right\},$$

dove α_i è la misura di Radon, derivata i -ma della funzione caratteristica di E , $T\varphi_E$ è la traccia esterna su ∂B_j della φ_E , ν è la normale a ∂B_j :

Dalla (1.7), se $|\phi(x)| < 1$, $\forall x$, si ricava

$$(1.8) \quad \int_E \sum_{i=1}^k D_i \phi_i dx \leq \max \lim_j \{ |D\varphi_E|(A_0 - \bar{B}_j) + H_{k-1}(\partial B_j) \} \leq |D\varphi_E|(A_0 - N).$$

Dalle (1.8) e (1.1) segue (1.5).

Per quanto riguarda la finitezza di $|D\varphi_E|(A_0)$ osserviamo che se A_0 ha frontiera localmente lipschitziana allora applicando la (1.3) a $L = A_0 - \bar{B}_j$ (B_j può essere scelto in modo che $A_0 - \bar{B}_j$ abbia anch'esso frontiera localmente lipschitziana) si ha

$$(1.9) \quad |D\varphi_E|(A_0 - \bar{B}_j) \leq H_{k-1}(\partial A_0) + H_{k-1}(\partial B_j),$$

da cui segue che

$$(1.10) \quad |D\varphi_E|(A_0) \leq H_{k-1}(\partial A_0).$$

Finalmente la proprietà di minimo di E in A si prova, come conseguenza della proprietà di minimo in $A - N$, nel modo seguente. Se M è un boreliano con $M \Delta E \subset A_0 \subset A$, posto $M_j = (M - B_j) \cup (E \cap B_j)$ abbiamo che

$$M_j \Delta E \subset A_0 - N.$$

Possiamo allora scrivere la disuguaglianza

$$(1.11) \quad |D\varphi_E|(A_0 - N) \leq |D\varphi_{M_j}|(A_0 - N).$$

Dal già usato teorema 2 di [5] abbiamo

$$(1.12) \quad |D\varphi_{M_j}|(A_0 - N) \leq |D\varphi_E|(B_j) + |D\varphi_M|(A_0 - \bar{B}_j) + H_{k-1}(\partial B_j).$$

Dalle (1.5), (1.10), (1.11) e (1.12) si ha

$$(1.13) \quad |D\varphi_E|(A_0) \leq |D\varphi_M|(A_0) + 2H_{k-1}(\partial B_j),$$

da cui, passando al limite per $j \rightarrow \infty$ e tenendo conto della (1.6) si ha la (1.2). c.v.d.

2. - Venendo al problema di eliminazione delle singolarità osserviamo che se Ω è aperto di R^n , se K è chiuso e f è soluzione classica dell'equazione delle superficie minime in $\Omega - K$, l'insieme $E = \{(x, t) | x \in \Omega - K, t < f(x)\}$ ha

frontiera di misura minima nell'aperto $(\Omega - K) \times R$ di R^{n+1} (questo fatto è conseguenza della convessità dell'integrale dell'area e del teorema 2.4 di [6]). Se poi $H_{n-1}(K) = 0$ allora avremo anche $H_n(K \times R) = 0$ e quindi applicando il Lemma del § 1 all'aperto $A = \Omega \times R$ di R^{n+1} e al chiuso $K \times R$ avremo che E ha frontiera di misura minima in $\Omega \times R$, cioè, secondo la denominazione introdotta in [3], abbiamo che f è soluzione generalizzata della equazione delle superficie minime in Ω .

Applicando ora i risultati dello studio degli insiemi di punti in cui f può assumere valori $+\infty$, $-\infty$ al caso presente abbiamo che tali insiemi hanno misura nulla in quanto sottoinsiemi di K , d'altra parte dovendo avere frontiera di misura minima in Ω debbono essere vuoti. La f è quindi, per i risultati del § 1 di [3], soluzione classica dell'equazione delle superficie minime in Ω .

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. DE GIORGI - G. STAMPACCHIA, *Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperficie minimali*, Rend. Acc. Lincei, **38** (1965), pp. 352-357.
- [2] J. C. C. NITSCHÉ, *On new results in the theory of minimal surfaces*, Bull. A.M.S., **71** (1965), pp. 195-270.
- [3] M. MIRANDA, *Superficie minime illimitate*, di prossima pubblicazione sugli Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa.
- [4] E. BOMBIERI - E. GIUSTI, *Harnack's inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces*, Inv. Math., **15** (1972), pp. 24-46.
- [5] M. MIRANDA, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Sem. Mat. Padova, **33** (1967), pp. 238-257.
- [6] M. MIRANDA, *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro finito sui prodotti cartesiani*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **18** (1964), pp. 515-542.