ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ROBERTO MAGARI

Classi e schemi ideali. Congruenze ideali V

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 4 (1973), p. 687-706

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_687_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CLASSI E SCHEMI IDEALI

CONGRUENZE IDEALI V (*)

ROBERTO MAGARI (Siena)

SUNTO - Si associa ad ogni classe ideale una successione di naturali, detta segnatura della classe. Ciò permette una classificazione delle varietà idealizzabili più fine di quella data in [7]. Si danno nuove condizioni affinchè una varietà idealizzabile sia ideale.

SUMMARY - Let X be a class of similar algebras, and $n \in \omega$. A good n-family for X is a family of polynomial simbols of ariety $4n+2$ $(g_j)_{j \in m+1}$ such that:

$$\text{If } A \in X;\ x, y \in A;\ u, v \in A^n \quad \text{and} \quad \langle x, y\rangle \in \{\overline{\langle u^r, v^r\rangle : r \in n}\}^A \quad \text{then:}$$

$$x = g_0\ (u\,;\ v\,;\ u\,;\ v\,;\ x, y,)$$

$$g_i(u\,;\ u\,;\ v\,;\ v\,;\ x, y) = g_{i+1}\ (u\,;\ v;\ u;\ v\,,\ x, y) \qquad (i \in m)$$

$$y = g_m\ (u\,;\ u;\ v;\ v\,;\ x, y).$$

Pose:

$$m_n = \begin{cases} \min\ \{m : \text{there exist a good } n\text{-family of } m+1 \text{ polynomial simbols}\} : & \\ & \text{if a good } n\text{-family exists} \\ \omega : \ \text{otherwise.} & \end{cases}$$

We call $m = (m_n)_{n \in \omega}$ the signature of X. It is easy to see that X is ideal iff, for every $n \in \omega$, $m_n \in \omega$ (i. e. a good n-family exists).

Classifiyng the ideal classel by signatures a better analysis is possible. We find for example new sufficient and necessary and sufficient condition for an ideal class to generate an ideal variety. Also, if VX is ideal, the signature of VX is linked with the signature of X.

Pervenuto alla Redazione il 25 Settembre 1972.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Comitato Nazionale per le Matematiche del C. N. R. (gruppo G. N. S. A. G. A. anno 1972).

Examples of results.

If X is ideal and PHX *is regular then* VX *is ideal. If the signature of X is everywhere* 0 *then* VX *is ideal and the signature of* VX *is everywhere* 0.

If X ideal and PX *has permutable congruences then* VX *is ideal.*

The signature are useful for discovering properties which the ideal class of total algebras have but the ideal classes of partial algebras have not.

PREMESSA. In un recente lavoro ([7], vedi anche [8]) di cui presuppongo la lettura, ho dimostrato che se X è una varietà di algebra simili allora fra le condizioni:

(*a*) X è filtrabile

(*b*) X è superprincipalmente idealizzabile

(*c*) X è ideale

(*d*) X è idealizzabile

sussistono le implicazioni $(a) \longrightarrow (b) \longrightarrow (c) \longrightarrow (d)$ e che nessuna di esse può essere rovesciata. In questo lavoro introduco un concetto (« segnatura » di una classe di algebre) che permette di analizzare più a fondo la situazione e in particolare di dare notevoli condizioni affinchè una classe ideale generi una varietà ideale. Alcune proprietà sono con maggior naturalezza predicabili per coppie $\langle A, L \rangle$ con L sottoreticolo completo del reticolo delle equivalenze su A (schemi) che non per questa o quell'algebra $\mathcal{A}$ di insieme di base A e $\mathcal{C}(A) = L$ (se ve ne sono).

Le notazioni e le convenzioni seguite sono quelle di [7] oltre ad alcune semplificazioni di scrittura il cui significato è ovvio dal contesto Inoltre, se A è un'algebra, quando occorre distinguere A dal suo insieme di base, indicherò quest'ultimo con $\dot{A}$.

Naturalmente questo lavoro è concepito come una continuazione degli altri miei lavori sulle classi ideali ([4], [5], [6], [7], [8]) e in particolare di [7] di cui presuppone la lettura.

1. Algebre e schemi: schemi ideali. Condizioni di Bergmann per l'idealità.

Sia A un'algebra. Ovviamente $L = \mathcal{C}(A)$ è un sottoreticolo completo di $\mathcal{C}(\dot{A})$. Sarà utile la seguente:

DEF. 1. *Si dirà schema ogni coppia* $\langle A, L \rangle$ *in cui*:

(1, 1) A sia un insieme non vuoto,

(1, 2) L sia un sottoreticolo completo di $\mathcal{C}(A)$

OSSERVAZIONE 1. Come sopra osservato se B è un algebra con $\dot{B} = A$ allora $\langle A, \mathcal{C}(B) \rangle$ è uno schema, che si dirà lo schema di B. Non vale in generale l'inverso.

Nel seguito sarà utile talvolta riferirsi a proprietà di schemi piuttosto che a proprietà di algebre.

DEF. 2. *Sia* X *una classe di schemi. Si dirà che* X *è ideale se esiste una classe ideale* Y *di algebre simili e una funzione* F *da* X *a* Y *tale che, comunque preso* $\langle A, L \rangle$ *in* X, *posto* $F\langle A, L \rangle = B$, *sia* $\dot{B} = A$, $L = \mathcal{C}(B)$. (Insomma se esiste una classe ideale di algebre simili che ammette X come classe dei suoi schemi). *Si dirà che uno schema* $\langle A, L \rangle$ *è ideale se* $\{\langle A, L \rangle\}$ *è ideale ossia se esiste un'algebra ideale* B *di schema* $\langle A, L \rangle$.

OSSERVAZIONE 2. Ovviamente uno schema $\langle A, L \rangle$ è ideale se e solo se è ideale l'algebra B di insieme di base A munita di tutte le operazioni compatibili con le equivalenze di L e $L = \mathcal{C}(B)$: *essa si dirà talvolta l'algebra completa di schema* $\langle A, L \rangle$.

In [1] G. Bergmann dà una condizione necessaria e sufficiente per la filtralità di una classe di algebre. Una analoga condizione caratterizza le classi ideali. Diamo anzitutto la seguente:

DEF. 3. *Sia* X *una classe di algebre simili (di schemi) e* $n \in \omega$. *Una famiglia* $({}^j g^n)_{j \in m_n+1}$ $(m_n \in \omega)$ *si dirà una buona n-famiglia per* X *se e solo se*:

(2,1) $({}^j g^n)_{n \in m_n+1}$ è una famiglia di *polinomi* di arietà $4n + 2$ (è una famiglia di simboli di operazione di arietà $4n + 2$ ammettenti una fissata interpretazione in ciascuno schema $\langle A, L \rangle \in X$, ciascuna di queste interpretazioni essendo un'operazione di arietà $4n + 2$ in A *compatibile* con le equivalenze di L).

(2,2) Se $A \in X$, $L = \mathcal{C}(A)$ (se $\langle A, L \rangle \in X$)

$$u, v \in A^n;\ x, y \in A\ \ (u = (u^r)_{r \in n},\ v = (v^r)_{r \in n})\ \text{e}$$

$$\langle x, y \rangle \in \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n\}}^{L}$$

allora valgono le:

$$(2,20) \qquad {}^0g^n(u\,;v\,;u\,;v\,;x,y) = x$$

$$(2,2j) \qquad {}^jg^n(u\,;u\,;v\,;v\,;x,y) = {}^{j+1}g^n(u\,;v\,;u\,;v\,;x\,,y)$$

$$(2,2m_n) \qquad {}^{m_n}g^n(u\,;u\,;v\,;v;x,y) = y$$

Vale la seguente estensione alle classi ideali del citato teorema di Bergmann:

TEOR. 1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una classe* (1) *sia ideale è che per ogni* $n \in \omega$ *essa ammetta una buona n-famiglia*

Ometto la dimostrazione che si può condurre ricalcando la dimostrazione di Bergmann.

DEF. 4. *Per ogni classe ideale si può considerare la sequenza dei minimi* m_n *di cui nel teorema precedente. Essa si dirà la segnatura della classe. Può essere conveniente parlare di segnatura anche per classi non ideali ponendo* $m_n = \omega$ *quando* X *non ammette una buona n-famiglia* (2).

Per snellire la formulazione di certi risultati sarà opportuno porre anche in ogni caso $m_\omega = \omega$.

Una famiglia $(m_n)_{n \in \omega+1}$ si dirà finita se, per $i \in \omega$, $m_i \in \omega$. Così le classi ideali sono precisamente quelle a segnatura finita.

Potrà tornare utile il seguente banale:

LEMMA 1. *Sia* X *una classe di segnatura* $(m_n)_{n \in \omega+1}$ *e sia* $(k_n)_{n \in \omega+1}$ *una successione con* $k_n \geq m_n$. *Allora esiste per ogni* $n \in \omega$ *per cui* k_n *sia finito una buona n-famiglia di* $k_n + 1$ *polinomi.*

DIM. Sia per un $n \in \omega$, $k_n > m_n$, k_n finito. È sufficiente prolungare una n-famiglia di $m_n + 1$ polinomi ponendo per $i > m$: ${}^ig^n(a\,;b\,;c\,;d\,;e\,;f) = f$

2. Prodotti e somme di schemi.

DEF. 5. *Sia* $(s_i)_{i \in I}$ *una famiglia di schemi* $(s_i = \langle A_i L_i \rangle)$. *Si dirà prodotto della famiglia e si indicherà con* $\prod_{i \in I} s_i$ *lo schema* $\langle A, L \rangle$ *in*

(1) Di algebre o di schemi.

(2) Ovviamente per ogni classe (di algebre o di schemi) si ha

$$0 = m_0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_n \leq \ldots$$

cui:

(3,1) $$A = \prod_{i \in I} A_i$$

(3,2) L è il reticolo delle equivalenze in A associate nel senso consueto a ideali di $\prod_{i \in I} L_i$. Vale il seguente teorema:

TEOR. 2. *La segnatura di* $s = \prod_{i \in I} s_i$ *è il supremo delle segnature degli* s_i. *Quindi* s *è ideale se e solo se tutti gli* s_i *sono ideali e il supremo delle loro segnature è finito.*

DIM. Sia $m^i = (m^i_n)_{n \in \omega}$ la segnatura di s_i e $m = (m_n)_{n \in \omega}$ la segnatura di s. Sia $n \in \omega$, $n \neq 0$, sia m_n finito e sia $({}^j g)_{j \in m_n + 1}$ una buona famiglia per s. Sia $i \in I$. Poiché le ${}^j g$ sono compatibili con le equivalenze di L lo sono in particolare con Ker s_i che è associata all'ideale di $\prod_{i \in I} L_i$ generato dall'elemento l definito da:

$$l_j = \begin{cases} 1_j & \text{se } j \neq i \\ 0_j & \text{se } j = i \end{cases} \qquad (j \in I)$$

(1_j e 0_j essendo rispettivamente il minimo e il massimo di L_j). La formula:

(4) $$ {}^j g_i \, \varepsilon_i a = \varepsilon_i \, {}^j g a \qquad (a \in A^{4n+2})$$

definisce quindi un'operazione in A_i.

La ${}^j g_i$ risulta compatibile con le equivalenze di L_i. Siano infatti a_i, $b_i \in A^{4n+2}$. Consideriamo certi elementi a_r, b_r $(r \in 4n + 2)$ in A tali che le loro componenti i-esime siano a^r_i, b^r_i. Si avrà, essendo la ${}^j g$ compatibile con le equivalenze di L, $\Delta({}^j g a, {}^j g b) \leq \bigvee \Delta(a^r, b^r)$, da cui:

$$\langle {}^j g_i \, a_i, {}^j g_i \, b_i \rangle \in \overline{\{\langle a^r_i, b^r_i \rangle : r \in n\}}^{L_i} .$$

Siano u_i, $v_i \in A_i^{4n+2}$, x_i, $y_i \in A_i$ e $\langle x_i, y_i \rangle \in \overline{\{\langle u^r_i, v^r_i \rangle : r \in n\}}^{L_i}$. Scegliamo degli elementi u^r, v^r, x, y in A le cui componenti i-esime siano u^r_i, v^r_i, x_i, y_i e per i quali, per $j \neq i$, si abbia $x_j = y_j$. È allora ovviamente:

$$\Delta(x, y) \leq \bigvee_{r \in n} \Delta(u^r, v^r)$$

onde

$$\langle x, y \rangle \in \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle, r \in n\}}^{L}$$

e valgono le (2,2) da cui, tramite la (4), le loro analoghe, che stabiliscono essere $({}^j g_i)_{j \in m_n+1}$ una buona famiglia per A_i. Ne segue $m_n^j \leq m_n$.

Viceversa sia al solito $n \in \omega$, $n \neq 0$ e supponiamo che gli m_n^i abbiamo supremo k_n finito.

Allora esistono a norma del lemma 1 delle buone n-famiglie $({}^j g_i)_{j \in k_n+1}$ per le $\langle A_i L_i \rangle$. Definiamo ${}^j g$ in A mediante la (4).

Per ogni j la ${}^j g$ risulta compatibile con le equivalenze di L, come si verifica facilmente, e la $({}^j g)_{j \in k_n+1}$ è una buona famiglia per $\langle A, L \rangle$.

Dunque $m_n \leq k_n$. Il teorema è così dimostrato.

OSSERVAZIONE 3. È facile vedere che se $(s_i)_{i \in I}$ è una famiglia di schemi anche la segnatura di $\{s_i : i \in I\}$ è il supremo delle segnature degli s_i onde coincide con la segnatura del prodotto.

DEF. 6. *Sia* $(s_i)_{i \in I}$ $(s_i = \langle A_i, L_i \rangle)$ *una famiglia di schemi non degeneri. Si dirà somma della famiglia e si indicherà con* $\sum_{i \in I} s_i$ *lo schema* $\langle A, L \rangle$ *per cui:*

$$A = \sum_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times A_i)$$

L consiste della equivalenza totale e di tutte le $R \subseteq \operatorname{Ker} s$ ($s : A \longrightarrow I$ essendo la prima proiezione) tali che, per ogni $i \in I$, sia $R \cap B_i \in \overline{L}_i$ (dove $B_i = \{i\} \times A_i$ e $\overline{L}_i$ è il sottoreticolo completo di $\mathcal{C}(B_i)$ associato in modo ovvio a L_i) (3).

Vale il seguente:

TEOR. 3. *La segnatura di* $\sum_{i \in I} s_i$ *è il supremo delle segnature degli* s_i.

DIM. Per comodità supponiamo gli A_i a due a due disgiunti cosicché si potrà supporre, a meno di isomorfismi, $A = \bigcup A_i$. Al solito sia $m = (m_n)_{n \in \omega}$ la segnatura di $\langle A, L \rangle$ e $m^i = (m_n^i)_{n \in \omega}$ la segnatura di s_i. Sia $n \in \omega$, $n \neq 0$, $i \in I$, m_n finito e sia $({}^j g)_{j \in m_n+1}$ una buona famiglia per $\langle A, L \rangle$.

Osserviamo che se $a \in A_i^{4n+2}$ non può essere ${}^j g a \notin A_i$. Si prendano infatti $u, v \in A_i^n$, $x \in A_i$. Dev'essere:

$$z^0 = {}^0 g\,(u\,;\, v\,;\, u\,;\, v\,;\, x, x) = x$$

$$z^1 = {}^0 g\,(u\,;\, u\,;\, v\,;\, v\,;\, x, x) = {}^1 g\,(u\,;\, v\,;\, u\,;\, v\,;\, x, x)$$

$$z^j = {}^{j-1} g\,(u\,;\, u\,;\, v\,;\, v\,;\, x, x) = {}^j g\,(u\,;\, v\,;\, u\,;\, v\,;\, x, x)$$

---

(3) Cfr esempio costruito in [7] § 4.

onde, nella congruenza R generata da $\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n\}$ che, salvo su A_i, è discreta, dev'essere xRz^j onde $z^j \in A_i$. Inoltre a e $(u; v; u; v; x, x)$ sono certo associati nell'equivalenza che è totale su A_i e discreta altrove e dev'essere ${}^jga$ associato a z^j. Dunque ${}^jga \in A_i$.

Le restrizioni delle ${}^jg$ ad A_i sono allora operazioni su A_i e formano ovviamente una buona famiglia. Dunque $m_n^i \leq m_n$. Viceversa sia ancora $n \in \omega$, $n \neq 0$ e il supremo k_n degli m_n^i sia finito. Esiste allora per ogni $p \leq n$ e per ogni A_i una buona p-famiglia $({}^jg_i^p)_{j \in k+1}$ (nota (2) e lemma 1).

Siano $a, b, c, d \in A^n$, e, $f \in A$ e definiamo le ${}^jg^n : A^{4n+2} \to A$ nel modo seguente.

(i) sia $\varepsilon e = \varepsilon f$ e, per ogni $r \in n$, $\varepsilon a^r = \varepsilon b^r = \varepsilon c^r = \varepsilon d^r$.

Sia $h = \{r \in n : \varepsilon a^r = \varepsilon e\}$ e, per comodità di scrittura, supponiamo $h \in \omega$. Si porrà:

$$ {}^jg^n(a; b; c; d; e, f) = {}^jg_i^h(a^*, b^*, c^*, d^*, e, f) \qquad (j \in k+1) $$

dove $a^* = (a^r)_{r \in k}$ etc. e $i = \varepsilon e$.

(ii) non valga (i) allora, si porrà:

$$ {}^jg^n(a; b; c; d; e, f) = \begin{cases} f, & \text{se } \varepsilon a = \varepsilon b, \varepsilon c = \varepsilon d, \varepsilon a \neq \varepsilon c \\ e & \text{altrimenti} \end{cases} $$

Mostriamo che le $({}^jg^n)_{j \in k+1}$ costituiscono una buona famiglia. Anzitutto risultano compatibili con le equivalenze di L. Sia infatti $R \in L$ propria e siano

$$ a, \bar{a}, b, \bar{b}, c, \bar{c}, d, \bar{d} \in A^n \quad e, f, \bar{e}, \bar{f} \in A $$

con $e R \bar{e}$, $f R \bar{f}$, $a^r R \bar{a}^r$, etc.

I sistemi $x = (a; b; c; d; e, f)$ $\bar{x} = (\bar{a}; \bar{b}; \bar{c}; \bar{d}; \bar{e}, \bar{f})$ sono ambedue nel caso (i) o ambedue nel caso (ii) (la R è propria). Se sono ambedue nel caso (i) è ovvio che sia ${}^jg^n x R {}^jg^n \bar{x}$. Se sono nel caso (ii) sia ${}^jg^n x = f$.

Ciò implica $\varepsilon a = \varepsilon b$, $\varepsilon c = \varepsilon d$, $\varepsilon a \neq \varepsilon c$, onde, essendo R propria, è $\varepsilon \bar{a} = \varepsilon \bar{b}$, $\varepsilon \bar{c} = \varepsilon \bar{d}$, $\varepsilon \bar{a} \neq \varepsilon \bar{c}$, quindi ${}^jg^n \bar{x} = \bar{f}$.

Analogamente se ${}^jg^n \bar{x} = \bar{f}$ è ${}^jg^n x = f$ onde in ogni caso ${}^jg^n x R {}^jg^n \bar{x}$.

Siano ora $u, v \in A^n$ $x, y \in A$ con $\langle x, y \rangle \in \overline{\{\langle u^r v^r \rangle : r \in n\}}^L$. Se $\varepsilon x = \varepsilon y$ e, per ogni $r \in n$, $\varepsilon u^r = \varepsilon v^r$, allora sarà $\langle x, y \rangle \in \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n, \varepsilon u^r = \varepsilon x\}}^{L_i}$ e le ${}^jg^n$

sugli argomenti $(u\,;v\,;u\,;v;x,y)$ $(u;u\,;v\,;v\,;x,y)$ si trovano nel caso (i) e soddisfano quindi le (1).

Se $\varepsilon x \neq \varepsilon y$ o, per almeno un $r \in n$, $\varepsilon u^r \neq \varepsilon v^r$ le ${}^j g^n$ sui suddetti argomenti si trovano nel caso (ii). Inoltre da $\langle x, y \rangle \in \overline{\{\langle u^r\ v^r \rangle : r \in u\}}^L$ segue che, se $x \neq y$, dev'essere comunque per qualche $r \in n$, $\varepsilon u^r \neq \varepsilon v^r$. Si ha allora:

$$ {}^j g^n (u\,;v\,;u\,;v\,;x,y) = x $$

$$ {}^j g^n (u\,;u\,;v\,;v\,;x,y) = y $$

Si ha dunque in ogni caso $m_n \leq k$ e ne segue il teorema.

3. Distanze.

Sia $\langle A, L \rangle$ uno schema e siano $R, S \in L$. Si dirà (R, S)-cammino ogni sequenza $(x^i)_{i \in n+1}$ tale che valga una delle:

$$ \text{(5)} \quad \left.\begin{cases} x^i R x^{i+1} & \text{se } i \text{ è dispari} \\ x^i S x^{i+1} & \text{se } i \text{ è pari} \end{cases}\right\} (i \in n) $$

$$ \text{(6)} \quad \left.\begin{cases} x^i R x^{i+1} & \text{se } i \text{ è pari} \\ x^i S x^{i+1} & \text{se } i \text{ è dispari} \end{cases}\right\} $$

Il numero degli S-tratti di un (R, S)-cammino si dirà la *lunghezza* del cammino (con le precedenti notazioni la lunghezza è allora $\frac{[n]}{2} + 1$ se n è dispari e il cammino è nel caso (5), $\frac{[n]}{2}$ altrimenti).

Si dirà poi che un (R, S)-cammino è:

un R-S-R-cammino se il primo e l'ultimo tratto sono R-tratti (cioè se il cammino è nel caso (6) e n è dispari)

un R-S-cammino se il primo tratto è un R-tratto e l'ultimo un S-tratto, analogamente si definiscono gli S-R-cammini e gli S-R-S-cammini. Infine dati due elementi $x, y \in A$ si chiamerà:

(R, S)-distanza di x da y la minima lunghezza degli (R, S)-cammini congiungenti x con y $(x = x^0,\ y = x^n)$,

R-S-R-distanza di x da y la minima lunghezza degli R-S-R-cammini congiungenti x con y

analogamente si definiscono la R-S-distanza, la S-R-S-distanza e la S-R-distanza.

Si ha ora:

LEMMA 2. *Siano* $\langle A, L \rangle$, R, S *come sopra, sia* R *compatta ammettente un sistema di* n *generatori e* $\langle A, L \rangle$ *ammetta una buona* n*-famiglia* $({}^j g)_{j \in m+1}$. *Allora la* S R*-distanza (e quindi la* (R, S)*-distanza) di due elementi* x, y *con* $\langle x, y \rangle \in R \vee S$ *non supera* $2m + 2$.

DIM. Mostriamo anzitutto che:

Se due elemenli sono congiunti da un R-S-R*-cammino di lunghezza* $m+1$ *allora sono congiunti anche da un* S-R-S*-cammino di lunghezza* $m + 2$.

Siano x, y congiunti da un R-S-R-cammino di lunghezza $m + 1$, esistano cioè certi $(x^i)_{1 \leq i \leq m+2} (y^i)_{i \in m+2}$ con $x = y^0$, $y = x^{m+2}$, $y^i R x^{i+1}$, $x^i S y^i$.

Siano $u, v \in A^n$ con $R = \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n\}}^L$.

Per comodità scriviamo jab per ${}^j g\ (u\,;\, v;\ u\,;\, v\,;\, a, b)$ e $j\bar{a}\bar{b}$ per ${}^j g\ (u\,;u;\ v;v;\ a,b)$.

Consideriamo gli elementi:

$$a^0 = 0y^0\, x^1$$

$$b^0 = 0y^0\, y^1$$

$$c^0 = \overline{0x^1\, x^2}$$

$$d^0 = \overline{0y^1\, x^2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a^i = iy^i\, x^{i+1}$$

$$b^i = iy^i\, y^{i+1}$$

$$c_i = \overline{ix^{i+1}\, x^{i+2}}$$

$$d^i = \overline{iy^{i+1}\, x^{i+2}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a^m = my^m\, x^{m+1}$$

$$b^m = my^m\, y^{m+1}$$

$$c^m = \overline{mx^{m+1}\, x^{m+2}}$$

$$d^m = \overline{my^{m+1}\, x^{m+2}}$$

Poiché $y^i R x^{i+1}$ e le ${}^i g$ costituiscono una buona famiglia si trova:

$$a^0 = y^0 = x$$

$$d^m = x^{m+2} = y$$

$$d^i = a^{i+1}.$$

D'altronde per la compatibilità delle $^j g$ con le equivalenze di L si trova $a^i\, Sb^i\, Rc^i\, Sd^i$. Si ha così l'S-R-S-cammino:

$$x = a^0\, Sb^0\, Rc^0\, Sb^1 \ldots \quad b^m Rc^m\, Sd^m = y$$

la cui lunghezza è appunto $m + 2$.

Da quanto dimostrato segue subito che:

Se due elementi sono congiunti da un R-S-cammino di lunghezza $m + 2$ allora sono anche congiunti da un S-R-S-cammino di lunghezza $m + 2$. É sufficiente osservare che un R-S-cammino di lunghezza $m + 2$ consiste di un R-S-R cammino di lunghezza $m + 1$ e di un ulteriore S-tratto. Applicando ripetutamente l'ultima proposizione si trova:

Se due elementi sono congiunti da un R S-cammino o da un S-R-cammino di lunghezza $n\,(m + 2)$ allora sono congiunti anche da un S-R-S-cammino di lunghezza $nm + n + 1$.

Infine con semplici considerazioni si trova:

Siano x, y due elementi congiunti da un R-S-R-cammino di lunghezza l. Sia i il resto di l modulo $m + 2$. Allora x, y sono congiunti anche da un S-R-cammino e a fortiori da un R-S-R-cammino di lunghezza $nm + n + i + 1$.

Poichè per $n > 2$ è $nm + n + i + 1 < l$ due qualsiansi elementi risultano sempre congiunti da un S-R-cammino dí lunghezza non superiore a $2m + 3$.

La limitazione viene ulteriormente migliorata dall'osservazione che un S-R-camino di lunghezza $2m + 3$ può essere considerato come composto da un S-tratto seguito da un R-S-R-cammino di lunghezza $m + 1$ seguito da un S-R-cammino di lunghezza $m + 1$. Sostituendo il cammino centrale con un S-R-S-cammino di lunghezza $m + 2$ e sopprimendo i vertici incidenti a due S-tratti si ottiene un S-R-cammino di lunghezza $2m + 2$.

Il lemma è così dimostrato.

4. Una caratterizzazione delle classi X ideali per cui $\mathbf{V}X$ è ideale.

Dal lemma 2 si ricava facilmente il seguente

TEOR. 4. *Sia X ideale. Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\mathbf{V}X$ sia ideale è che $\mathbf{PH}X$ sia regolare.*

DIM. La secessità è ovvia. Sia $\mathbf{PH}X$ regolare e sia $A \in \mathbf{SPH}X$. Si abbia cioè la reguente situazione:

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{i \in I} B_i \arrow[d, "\varphi"] & B_i \arrow[d, "\varphi_i"] & B_i \in X \\
A \arrow[r, tail, "\iota"'] & \prod_{i \in I} A_i & A_i &
\end{tikzcd}$$

e siano x, y, u^r, v^r $(r \in n)$ elementi di A con $\Delta(x, y) \leq \bigvee \Delta(u^r, v^r)$. Scegliamo per ogni $w \in \prod_{i \in I} A_i$ un $\dot{w} \in \prod_{i \in I} B_i$ con $\varphi \dot{w} = w$. Si ha:

$$\langle x_i, y_i \rangle \in \overline{\{\langle u_i^r, v_i^r \rangle : r \in n\}}^{A_i} \qquad (i \in I)$$

da cui, tenuto conto del lemma 2 si ha per opportuni $w^s, t^s \in \prod_{i \in I} B_i$ con $\langle w_i^s, t_i^s \rangle \in \mathrm{Ker}\, \varphi_i$:

$$\langle \dot{x}_i, \dot{y}_i \rangle \in \overline{\{\langle \dot{u}_i^r, \dot{v}_i^r \rangle : r \in n\} \cup \{\langle \dot{w}_i^s, \dot{t}_i^s \rangle : s \in 2m+2\}}^{B_i} \quad (i \in I)$$

(dove m è il numero dei polinomi di una buona n-famiglia per X) ossia:

$$\Delta(\dot{x}, \dot{y}) \leq \bigvee_{r \in n} \Delta(\dot{u}^r, \dot{v}^r) \vee \bigvee_{s \in 2m+2} \Delta(w^s, t^s)$$

e quindi:

$$\langle \dot{x}, \dot{y} \rangle \in \overline{\{\langle \dot{u}^r, \dot{v}^r \rangle : r \in n\} \cup \{\langle \dot{w}^s, \dot{t}^s \rangle : s \in 2m+2\}}^{\Pi B_i}$$

ma $\langle w^s, \dot{t}^s \rangle \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ onde si trova:

$$\langle x, y \rangle \in \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle ; r \in n\}}^{\Pi A_i}.$$

Poiché $\Pi A_i \in \mathbf{PH}X$ è regolare ne segue:

$$\langle x, y \rangle \in \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n\}}^{A}$$

onde A è a congruenze ideali. Così $\mathbf{H}X$ è ideale e dal teorema 3 di [7] segue che $\mathbf{V}X$ è ideale.

Si ha anche:

Cor. 1. *Se X è ideale $\mathbf{V}X$ è semiideale.*

Dim. Dalla dimostrazione del teorema 4 si ricava che se Y è una classe ideale allora $\mathbf{H}Y$ è semiideale. Ora se X è ideale lo è anche $\mathbf{SP}X$ ([6] teor. 1.) e, per l'osservazione fatta, $\mathbf{V}X = \mathbf{HSP}X$ è semiideale.

Il teor. 4 non fornisce alcuna condizione sulla segnatura di VX in relazione alla segnatura di X.

Il prossimo paragrafo è dedicato a una condizione di questo tipo.

5. Segnatura di $\mathbf{V}X$.

Ci è utile per il seguito il seguente banale:

LEMMA 3. *Sia A un'algebra e $S \in \mathcal{C}(A)$. Sono equivalenti le:*

(i) A/S è regolare

(ii) Comunque presa $B \sqsubseteq A$ e $R \in \mathcal{C}(B)$ si ha:

$$(\overline{R}^A \vee S) \cap B^2 = R \vee (S \cap B^2) \tag{7}$$

(iii) comunque presa $B \sqsubseteq A$ e $R \in \mathcal{C}(B)$, R compatta, vale la (7).

DIM. Sia $C = A/S$ non regolare. Ciò significa che esistono una sottoalgebra D di C e nna $T \in \mathcal{C}(D)$ con:

$$\overline{T}^C \cap D^2 \supset T. \tag{8}$$

Posto $\varphi = \mathrm{Nat}\ S$ sia $B = \varphi^{-1}(D)$. Per la (8) esiste un coppia $p \in \overline{T}^C \cap D^2, p \notin T$ onde esistono certe coppie $(q_r)_{r \in n}$ in numero finito con $q_r \in T$ e $p \in \overline{\{q_r : r \in n\}}^C$.

Scegliamo n coppie $\dot{q}^r$ di B^2 con $\varphi \dot{q}_r = q_r$ e poniamo $R = \overline{\{\dot{q}_r : r \in n\}}^B$. Si ha, scelta una $\dot{p} \in B^2$ con $\varphi \dot{p} = p$, $\dot{p} \in \overline{\{\dot{q}_r : r \in n\}}^A \vee S = \overline{R}^A \vee S$. D'altronde $p \notin T$ onde $p \notin \overline{\{q_r : r \in n\}}^D$ e perciò $\dot{p} \notin R \vee (S \cap B^2)$. La (iii) implica quindi la (i). E' poi ovvio che la (ii) implica la (iii).

Non valga la (ii), sia dunque $B \sqsubseteq A, R \in \mathcal{C}(B)$ con $(\overline{R}^A \vee S) \cap B^2 \supset R \vee (S \cap B^2)$. Posto $D = \varphi(B)$, $C = A/S$, $T = \varphi_{|B} \circ (R \vee (S \cap B^2)) \circ \varphi_{|B}^{-1}$ si trova facilmente $\overline{T}^C \cap D^2 \supset T$ one A/S risulta non regolare.

La (i) implica dunque la (ii) e il lemma è dimostrato.

È opportuno ora dimostrare che il risultato del lemma 2 vale anche, sotto una ulteriore ipotesi, in una versione « uniforme ». Precisamente si ha:

TEOR. 5. *Sia X una classe ideale con $\mathbf{PH}X$ regolare, di algebre di un certo tipo τ, di segnatura $(m_n)_{n \in \omega}$. Per ogni $n \in \omega$ esistono allora certi polinomi astratti del tipo τ, $h^0, h^1, \ldots, h^{2m_n+1}, h^{2m_n+2}, k^0, k^1, \ldots, k^{2m_n+1}$ di arietà $2n+2$ tali che comunque scelti:*

$$A \in X$$
$$S \in \mathcal{C}(A)$$
$$n \in \omega$$

$u, v \in A^n$

$x, y \in A$ con $\langle x, y \rangle \in R \vee S$ (scriviamo R per $\overline{\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n\}}^A$)

si abbia:

(9,1) $$x = h^0(u;\ v;\ x, y)$$

(9,2) $$y = h^{2m_n+2}(u;\ v;\ x, y)$$

(9,3) $$h^i(u;\ v;\ x, y)\ S\, k^i(u;\ v;\ x, y) \qquad (i \in 2m_n + 2)$$

(9,5) $$k^i(u;\ v;\ x, y)\ R\, h^{i+1}(u;\ v;\ x, y) \qquad (i \in 2m_n + 2)$$

DIM. Fissiamo n, per comodità scriviamo m per m_n, e sia $({}^j g)_{j \in m+1}$ una buona n-famiglia.

La dimostrazione procede con tecniche analoghe a quelle usate in Magari [6] teor. 2 e in Bergmann [1] teor. 3.

Supponiamo in un primo tempo che X sia un insieme e sia I l'insieme dei sistemi:

$$\langle A, R, S, u, v, x, y \rangle$$

come nell'enunciato. Se $i \in I$ indichiamo con A_i, R_i, etc. gli oggetti per cui $i = \langle A_i, R_i, S_i, n_i, v_i, x_i, y_i \rangle$ e siano:

$$A = \Pi A_i$$

u^r l'elemento di A di componente i-esima u_i^r;

v^r » » » » » » v_i^r;

x » » » » » » x_i;

y » » » » » » y_i;

B la sottoalgebra di A generata da $M = \{x, y\} \cup \bigcup_{r \in n} \{u^r, v^r\}$, R la congruenza di B definita da:

(10) $\alpha\, R\, \beta$ se e solo se, per ogni $i \in I$, $\alpha_i\ R_i\ \beta_i$ $\qquad (\alpha, \beta \in B)$

Ovviamente le ${}^j g$ costituiscono una buona famiglia per B (4).

---

(4) Siano infatti $\alpha, \beta \in B$. $\gamma\ \delta \in B^n$ con $\langle \alpha, \beta \rangle \in \overline{\{\langle \gamma^r, \delta^r \rangle : r \in n\}}^B$ Ovviamente ne segue, per ogni $i \in I$, $\langle \alpha_i, \beta_i \rangle \in \overline{\{\langle \gamma_i^r, \delta_i^r \rangle : r \in n\}}^{A_i}$ da cui, poiché ${}^i g$ costituiscono una buona famiglia per A_i, le solite eguaglianze che legano α_i, β_i, γ_i^r, δ_i^r e ${}^i g$. Queste a loro volta implicano le analoghe per $\alpha, \beta, \gamma^r, \delta^r$ e ${}^i g$.

Si trova in questo modo che:

Se X è una classe di algebre simili allora X e **S P** *X hanno la stessa segnatura.* Da ciò si ritrova come immediato corollario il teor. 1 di [6]: *Se X è una classe ideale allora anche* **S P** *X è ideale.* Alcuni miei collaboratori si stanno occupando di stabilire quali altri risultati di [5], [6] possano essere dimostrati più semplicemente (e precisati) usando il concetto di segnatura.

Da ciò segue che $R = \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n\}}^B$.

Sia ora S la congruenza di A definita da:

(11) $\alpha S \beta$ se e solo se, per ogni $i \in I$, $\alpha_i S_i \beta_i$ $\quad (\alpha, \beta \in A)$

Si ha:

$$\langle x, y \rangle \in \overline{R}^A \vee S \tag{12}$$

Infatti, tenuto conto del lemma 2, si ha per ogni $i \in I$:

$$\langle x_i, y_i \rangle \in \overline{\{\langle u_i^r, v_i^r \rangle : r \in n\} \cup \{\langle w_i^s, t_i^s \rangle : s \in 2m+2\}}^{A_i}$$

per opportuni $\langle w_i^s, t_i^s \rangle \in S_i$, e, presi degli elementi di A w^s, t^s di componenti i-esime w_i^s, t_i^s, ne segue:

$$\Delta(x, y) \leq \bigvee_{r \in n} \Delta(u^r, v^r) \vee \bigvee_{s \in 2m+2} \Delta(w^s, t^s)$$

da cui, essendo X ideale e $\langle w^s, t^s \rangle \in S$, la (11).

Ma, essendo $\mathbf{P}\,\mathbf{H}\,X$ regolare e X ideale, anche $\mathbf{V}\,X$ è ideale per il teor. 4, onde $\mathbf{H}\{A\}$ è regolare e dal lemma 3 si trova $(\overline{R}^A \vee S) \cap B^2 = R \vee (S \cap B^2)$ onde, dalla 12), $\langle x, y \rangle \in R \vee (S \cap B^2)$. Devono quindi esistere, per il lemma (2) certi elementi $a^0, a^1, \ldots, a^{2m+2}$, $b^0, b^1, \ldots, b^{2m+1}$ *di* B con

$$x = a^0$$

$$y = a^{2m+2}$$

$$a^i S b^i$$

$$b^i R a^{i+1}$$

e quindi dei polinomi astratti del tipo τ

$$h^0, h^1, \ldots, h^{2m+2} \; k^0, k^1, \ldots k^{2m+1}$$

con:

$$x = h^0(u; v; x, y)$$

$$y = h^{2m+2}(u; v; x, y)$$

$$h^i(u; v; x, y) S k^i(u; v; x, y)$$

$$k^i(u; v; x, y) R h^{i+1}(u; v; x, y).$$

Si tratta, come ora si verifica facilmente, dei polinomi cercati.

Il caso in cui X sia una classe propria si tratta facilmente osservando che i polinomi del tipo devono costituire un insieme.

Siamo ora in grado di dimostrare che:

LEMMA 4. *Sia X una classe ideale, $m = (m_n)_{n \in \omega}$ la sua segnatura e* $\mathbf{P}\,\mathbf{H}\,X$ *sia regolare. Allora per la segnatura $\overline{m} = (\overline{m}^n)_{n \in \omega}$ di* $\mathbf{H}X$ *si ha:*

$$m_n \leq \overline{m}_n \leq m_{2m_n+n+2}$$

DIM. Sia $n \in \omega$ e siano h^i, k^i come nel teor. 5.

La $m_n \leq \overline{m}_n$ è ovvia.

Poniamo $k = 2m_n + n + 2$ e sia ${}^j(g)_{j \in m_k+1}$ una buona k-famiglia per X. Definiamo dei polinomi astratti $({}^jf)_{j \in m_k+1}$ di arietà $4n + 2$ ponendo

$$\begin{aligned}
{}^jf(a; b; c; d; e, f) = {}^jg\,(a; h^0(a; d; e, f),\ h^1(a; d; e, f),\\
\ldots, h^{2m+1}(a; d; e, f), b;\ h^0(a; d; e, f), \ldots\\
\ldots, h^{2m+1}(a; d; e, f), c;\ h^0(a; d; e, f), \ldots\\
\ldots, h^{2m+1}(a; d; e, f),\ d;\ h^0(a; d; e, f), \ldots\\
\ldots, h^{2m+1}(a; d; e, f);\ e, f)
\end{aligned}$$

Sia $A \in \mathbf{H}\,X$, $u, v \in A^n$; $x, y \in A$ e $\langle x, y \rangle \in \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n\}}^A$. Sarà, per certi B, φ, $B \in X$, $B \xrightarrow{\varphi} A$. Per ogni $a \in A$ sia $\dot{a} \in B$ con $\varphi\dot{a} = a$ e poniamo $S = \mathrm{Ker}\varphi$, $R = \overline{\{\langle \dot{u}^r, \dot{v}^r \rangle : r \in n\}}^B$.

Si ha:

$$\langle \dot{x}, \dot{y} \rangle \in \overline{\{\langle \dot{u}^r, \dot{v}^r \rangle : r \in n\}}^B \vee S$$

e anche, per il lemma 3:

$$\langle \dot{x}, \dot{y} \rangle \in \overline{\{\langle \dot{u}^r, \dot{v}^r \rangle : r \in n\} \cup \{\langle \dot{h}^s(\dot{u}; \dot{v}; \dot{x}, \dot{y}),\ \dot{k}^s(\dot{u}; \dot{v}; \dot{x}, \dot{y}) \rangle : s \in 2m + 2\}}^B$$

da cui:

$$\begin{aligned}
x = {}^0g\,(\dot{u}; \dot{h}^0(\dot{u}; \dot{v}; \dot{x}, \dot{y}), h^1(\dot{a}; \dot{v}; \dot{x}, \dot{y},), \ldots, h^{2m+1}(\dot{u}; \dot{v}; \dot{x}, \dot{y}),\\
\dot{v};\ k^0(\dot{u}; \dot{v}; \dot{x}; \dot{y}), k^1(\dot{u}; \dot{v}; \dot{x}, \dot{y}), \ldots, k^{2m+1}(\dot{u}; \dot{v}; \dot{x}, \dot{y}),
\end{aligned}$$

$$\dot{u}\,;\, h^0(\dot{u}\,;\,\dot{v}\,;\,\dot{x},\dot{y}),\, h^1(\dot{u};\,\dot{v}\,;\,\dot{x},\dot{y}),\,\ldots,\, h^{2m+1}(\dot{u}\,;\,\dot{v}\,;\,\dot{x},\dot{y}),$$

$$\dot{v}\,;\; k^0(\dot{u}\,;\,\dot{v}\,;\,\dot{x},\dot{y}),\; k^1(\dot{u}\,;\,\dot{v}\,;\,\dot{x},\dot{y})\ldots,\, k^{2m+1}(\dot{u}\,;\,\dot{v}\,;\,\dot{x},\dot{y}),$$

$$x, y)$$

$$^{j}g(\dot{u}\,;h;\,\dot{u}\,;\,h\,;\,\dot{v}\,;\,k\,;\,\dot{v}\,;k\,;\,x,y) = {}^{j+1}g(\dot{u}\,;\,h\,;\,\dot{v}\,;\,k\,;\,\dot{u}\,;\,h\,;\,\dot{v}\,;\,k\,;\,x,y)$$

$$\dot{y} = {}^{m_k}g\,(\dot{u}\,;\,h\,;\,\dot{u}\,;\;h\,;\,\dot{v}\,;\,k\,;\,\dot{v}\,;k\,;\,x,y)$$

(dove si sono usate ovvie abbreviazioni).

Se ne ricava facilmente:

$$x = {}^{0}f(u\,;\,v\,;\,u\,;\,v\,;\,x,y)$$

$$f(u\,;\,u\,;\,v\,;\,v\,;\,x,y) = {}^{j+1}f(u\,;\,v\,;\,u\,;\,v\,;\,x,y)$$

$$y = {}^{m}f(u\,;\,u\,;\,v\,;\,v\,;\,x,y)$$

onde $({}^{j}f)_{j\in m_k+1}$ risulta una buona famiglia per $\mathbf{H}\,X$ e il lemma è dimostrato.

Si ha ora:

TEOR. 6. *Sono equivalenti le*:

(i) X *è ideale con* $\mathbf{P}\,\mathbf{H}\,X$ *regolare*

(ii) $\mathbf{H}\,X$ *è ideale*

(iii) $\mathbf{V}\,X$ *è ideale*

e, detta m *la segnatura di* X, *per la segnatura* $\overline{m}$ *di* $\mathbf{V}\,X$ *vale la limitazione*:

$$m_n \leq \overline{m}_n \leq m_{2m_n+n+2}$$

DIM. L'equivalenza delle (i) (ii) (iii) è già stata dimostrata (teor. 3 di (7) e teor. 4). È facile vedere che per ogni classe X la segnatura di $\mathbf{S}\,\mathbf{P}\,X$ coincide con la segnatura di X onde dal lemma 4 segue l'ultima osservazione del teorema.

6. Classi ideali a segnatura nulla.

Sia X una classe ideale, $m = (m_n)_{n\in\omega}$ la sua segnatura e supponiamo $m_n = 0$ per ogni $n \in \omega$.

Dimostreremo che in tal caso $\mathbf{V}\, X$ è ideale e ha anch'essa segnatura nulla.

Allo scopo ci è utile il seguente;

LEMMA 5. *Sia A un'algebra di segnatura nulla, $R, S \in \mathcal{C}(A)$, $u, v \in A^n$, $x, y \in A$, $R = \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n\}}^A$ e $\langle x, y \rangle \in R \vee S$.*

Sia B la sottoalgebra di A generata da $M = \{x, y\} \cup \bigcup_{r \in n} \{u^r, v^r\}$ e poniamo $R' = R \cap B^2$, $S' = S \cap B^2$. Allora si ha:

$$\langle x, y \rangle \in R' \vee S' \text{ (dove il } \vee \text{ è inteso in } \mathcal{C}(B)).$$

DIM. Alteriamo la terminologia usata prima chiamando lunghezza di un (R, S)-cammino il numero dei suoi R-tratti.

La dimostrazione procede per induzione rispetto alla lunghezza. Se x, y sono congiunti da un (R, S)-cammino di lunghezza 0 la cosa è ovvia.

Siano x, y congiunti da un (R, S) cammino di lunghezza $n + 1$ e supponiamo il risultato valido quando x, y siano congiunti da un (R, S)-cammino di lunghezza n. Possiamo supporre si tratti di un S-R-S-cammino.

Si avrà dunque per certi $x^i, y^i \in A$:

$$\begin{aligned} &x = y^0 \\ &y^i\, S x^{i+1} \\ &x^i\, R y^i \\ &x^{n+2} = y. \end{aligned}$$

Sia g un buon n-polinomio.

Scriviamo per comodità ab per $g(u; v; u; v; a, b)$ e $\overline{ab}$ per $g(u; u; v; v; a, b)$.

Si considerino i cammini:

$$x = y^0,\ x^1 = x^1 g^1,\ y^0 x^2,\ \overline{y^0 y^2},\ \overline{y^0 x^3}, \ldots,\ \overline{y^0 x^{n+2}}$$

$$y = x^{n+2},\ y^{n+1} = \overline{x^{n+1} y^{n+1}},\ \overline{y^n x^{n+2}},\ \overline{x^u x^{n+2}}, \ldots, \overline{y^0 x^{n+2}}$$

È facile vedere che (sopprimendo i vertici x^1, y^{u+1}) si tratta di due cammini di lunghezza n che quindi cadono sotto l'ipotesi induttiva. Poiché $y^0, x^{n+2}, \overline{y^0 x^{n+2}} \in B$ ne segue il risultato per cammini di lunghezza $n + 1$ e il lemma è dimostrato.

Tenuto conto dei lemmi 3,5 si ha:

TEOR. 7. *Se X è una classe ideale di seguatura nulla allora $\mathbf{V}\, X$ è ideale di segnatura nulla.*

DIM. Se X ha segnatura nulla anche $\mathbf{P}\,X$ ha segnatura nulla onde per i lemmi 3, 5 $\mathbf{H}\,\mathbf{P}\,X$ è regolare e quindi è regolare $\mathbf{P}\,\mathbf{H}\,X$. Il risultato segue dal teorema 6.

7. Classi ideali permutabili.

È ben nota la particolare importanza delle varietà ogni algebra delle quali è a congruenze permutabili (cfr. ad esempio PIXLEY [9] [10] [11]).

Si mostrerà in questo numero che una varietà idealizzabile a congruenze permutabili è ideale. In realtà mostreremo un risultato più forte.

Ci sarà utile il seguente:

LEMMA 6. *Sia A un'algebra ideale, $R, S \in \mathcal{C}(A)$, $u, v, \in A^n$ $x, y \in A$, $R = \overline{\{\langle u^r, v^r \rangle : r \in n\}}^A$ e $\langle x, y \rangle \in R \vee S$, $R \vee S = S \circ R \circ S$.*

Sia B la sottoalgebra di A generata da $M = \{x, y\} \cup \bigcup_{r \in n} \{u^r, v^r\}$ e poniamo $R' = R \cap B^2$, $S' = S \cap B^2$. Allora si ha $\langle x, y \rangle \in R' \vee S'$ (dove il $\vee$ è inteso in $\mathcal{C}(B)$).

DIM. Sarà $x = y^0\, S x^1\, R y^1\, S x^2 = y$. Sia $({}^j g)_{j \in n+1}$ una buona n-famiglia per A e al solito scriviamo $j\,ab$ per ${}^j g\,(u\,;\,v\,;\,u\,;\,v\,;\,a,\,b)$, $\overline{j\,a\,b}$ per ${}^j g\,(u\,;\,u\,;\,v\,;\,v\,;\,a,\,b)$.

Consideriamo la sequenza:

$$
\begin{array}{l}
x^0 \\
0y^0\, x^2 \\
\overline{0y^0\, x^2} \\
1y^0\, x^2 \\
\overline{1y^0\, x^2} \\
\quad\vdots \\
my^0\, x^2 \\
\overline{my^0\, x^2} \\
x^2
\end{array}
$$

Si ha $y^0 S x^1 = 0 x^1 y^1 \; S \, 0 \, y^0 x^2$ onde $y^0 S \, 0 \, y^0 x^2$ e anche:

$$x^2 S y^1 = \overline{m x^1 y^1} \; S \overline{m y^0 x^2} \text{ onde } m \overline{y^0 x^2} S x^2.$$

E' poi ovviamente $i y^0 x^2 R \; i \overline{y^0 x^2}$. Infine si ha:

$$\overline{i y^0 x^2} \; S \, \overline{i x^1 y^1} = (i+1) x^1 y^1 \, S \, (i+1) \; y^0 x^2 \text{ onde } \overline{i y^0 x^2} \, S \, (i+1) \, y^0 x^2.$$

Ne segue l'asserto.

Ne deriva.

TEOR. 8. *Sia X una elasse ideale e comunque presa $A \in \mathbf{P} X$, R, $S \in \mathcal{C}(A)$ con R compatta si abbia $R \vee S = S \circ R \circ S$. Allora $\mathbf{V} X$ è ideale* (con la segnatura soddisfacente la solita limitazione).

DIM. Ovvia tenuto conto dei lemmi 3,5.

In particolare si ha:

COR. 2. *Se Y è una varietà idealizzabile a congruenze permutabili allora Y è ideale.*

BIBLIOGRAFIA

[1] G. BERGMANN, *Sulle classi filtrali di algebre,* Ann. Un. Ferrara (nuova serie) sez. VII.

[2] P. M. COHN, *Universal Algebra,* Harper and Row, New York, N. Y. 1965.

[3] G. GRATZER, *Universal Algebra,* Van Nostrand, Princeton, 1968.

[4] R. MAGARI, *Congruenze di un prodotto diretto legate alle congruenze dei fattori* (*congruenze ideali I*) sta in *Algebre a congruenze speciali,* Istituto Naz. di Alta Matematica, Symposia Matematica, Vol. V pp. 83-111 (1970).

[5] R. MAGARI, *Varietà a congruenze ideali* (*congruenze ideali II*) Ann. Un. Ferrara (nuova serie) sez. VII vol. XV n. 7 pp. 113-143 (1970).

[6] R. MAGARI, *Classi metaideali di algebre simili* (*congruenze ideali III*) Ann. Un. Ferrara (nuova serie) sez. VII vol. XV n. 8 pp. 131-143 (1970).

[7] R. MAGARI, *Classification of idealizable varieties* (*congruenze ideali IV*), (in corso di pubblicazione sul Journal of Algebra).

[8] R. MAGARI, *Sulle varietà gènerate da classi ideali,* B. U. M. I. (4) 4 (1971) pp. 1007-1009.

[9] A. F. PIXLEY, *Functionally complete algebras generating distributive and permutable classes,* Math. 2. 114, 361-372 (1970).

[10] A. PIXLEY, *Local weak independence and primal algebra theory,* B.U.M.I. ser. IV vol. V n. 3 pp. 381-399 (1972).

[11] A. F. PIXLEY, *Completeness in arithmetical algebras,* Alg. Un. 2, 2, pp. 179-196 (1972).