Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

P. M. Gauthier

Ngo Van Que

Problème de surjectivité des applications holomorphes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 3 (1973), p. 555-559

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_555_0>

PROBLEME DE SURJECTIVITE DES APPLICATIONS HOLOMORPHES

par P. M. GAUTHIER et NGO VAN QUE

Introduction.

Un exemple de Fatou-Bieberbach ([1] page 45) montre qu'il existe des applications holomorphes

$$h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

à Jacobien $J(h)$ partout non nul, mais dont le complémentaire de l'image $K = \mathbb{C}^n - \operatorname{Im}(h)$ est un fermé à intérieur non vide. Nous voulons montrer que

THÉORÈME 1. Si p est une application polynomiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ à Jacobien partout non nul, alors on a: $K = \mathbb{C}^n - \operatorname{Im}(p)$ est une variété algébrique de codimension au moins deux.

THÉORÈME 2. Soit X un espace analytique séparable de pure dimension n et dont l'algèbre des fonctions holomorphes $H(X)$ sépare les points. Alors à l'exception d'un ensemble maigre (pour la topologie C. O. de $H(X, \mathbb{C}^n)$) les applications holomorphes de X dans $\mathbb{C}^n$ sont surjectives.

Nous remercions les professeurs Ivan Kupka et S. Takahashi pour d'utiles conversations relativement à ce sujet. Notre Théorème 2 est dans une certaine mesure une généralisation aux applications holomorphes d'un résultat connu pour les fonctions holomorphes [2].

A. *Preuve du théorème* 1.

Soit $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$$(z_1, \dots, z_n) \to (p_1(z_1, \dots, z_n), \dots, p_n(z_1, \dots, z_n))$$

Pervenuto alla Redazione il 5 Giugno 1972.

Travail supporté par le conseil National de Recherches du Canada et partiellement pour le second auteur par Consiglio Nazionale delle Ricerche, Italia.

avec $p_i(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Comme le Jacobien de p est partout non nul, $\forall\, m \in \mathbb{C}^n$, $p^{-1}(m)$ est une variété algébrique de dimension 0 dans $\mathbb{C}^n$, dont le nombre des points $r(m) = \#\{p^{-1}(m)\}$, est d'après le théorème de Bézout

$$r(m) = \#\{p^{-1}(m)\} \leq \prod_{1 \leq i \leq n} (\text{degré total de } p_i) = k.$$

Soit l'ouvert U ainsi défini

$$U = \{m \in \mathbb{C}^n,\ r(m) = k\}.$$

Lemme 1. $K_1 = \mathbb{C}^n - U$ est une sous-variété algébrique de $\mathbb{C}^n$.

En effet, comme K_1 est fermé, il suffit de montrer que K_1 est constructible au sens de Chevalley (Définition 2, page 96 et corollaire 1, page 114 [3]). Or évidemment $K_1 = A \cap \mathbb{C}^n$, où $\tilde{p}$ étant le prolongement rationnel de p

$$\tilde{p} : P^n\,\mathbb{C} = \mathbb{C}^n \cup H^\infty \longrightarrow P^n\,\mathbb{C} = \mathbb{C}^n \cup H^\infty$$

A est l'image $\tilde{p}(H^\infty)$, donc constructible par un théorème de Chevalley (Corollaire 2, page 97, [3]).

Lemme 2. K est une sous-variété algébrique de K_1.

En effet, K est évidemment un sous ensemble de K_1. Il suffit de montrer que K est algébrique; or cela est vrai car K est fermé et il est d'autre part constructible ($K = C^n - \operatorname{Im}(p)$).

Supposons maintenant que K admet une composante irréductible I de codimension 1. Il est alors bien connu que le groupe d'homotopie libre $\pi_1(\mathbb{C}^n - I)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Soit γ le lacet qui représente le générateur $\bar{\gamma}$, et nous pouvons le supposer éviter K_1 (qui est algébrique de codimension complexe au moins 1). Alors $p^{-1}(\gamma)$ est une famille de courbes fermées dans $\mathbb{C}^n$, donc homotopes à zéro ($\pi_1(\mathbb{C}^n) = 0$). Ce qui implique : $\bar{\gamma}$ doit être de torsion, d'où contradiction. C. Q. F. D.

Pour être complet, nous démontrons la proposition suivante.

Proposition. Si $K = K_1$, alors $K = \varnothing$ et p est bijectif.

En effet, on sait que K est de codimension plus grande ou égale à 2. Donc $\mathbb{C}^n - K$ est simplement connexe. La condition que $K = K_1$ implique que $\mathbb{C}^n$ est un revêtement de son image. Comme $\operatorname{Im}(p) = \mathbb{C}^n - K$ est simplement connexe, p est inversible, et p^{-1} est défini sur un ouvert en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension 2 au moins. Par le théorème de Hartog, p^{-1} peut s'étendre à tout $\mathbb{C}^n$. C. Q. F. D.

Remarque. 1) La proposition est une autre forme du théorème de Ax-Kolchen qui dit que toute application polynômiale injective de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ est surjective.

2) La proposition est évidemment encore vraie si on suppose que $\mathbb{C}^n$ est par l'application polynômiale p un revêtement ramifié de son image.

B. *Preuve du théorème* 2.

Pour $f \in H(X, \mathbb{C}^n)$ et $w \in \mathbb{C}^n$, dénotons par $L_w(f)$ la ligne de niveaux de f:

$$L_w(f) = \{x \in X \mid f(x) = w\}$$

et $\dim_x L_w(f)$, la dimension en x de la variété analytique $L_w(f)$. Sous l'hypothèse du théorème que X est séparable et que l'algèbre $H(X)$ sépare les points de X on a à ce propos le résultat connu:

Lemme 1. (Chap. V, page 166, [4]). Il existe $f \in H(X, \mathbb{C}^n)$ t. q. $\forall\, x \in X$, $\dim_x L(f) = 0$.

Ceci dit, pour tout entier m, considérons

$$A(m) = \{f \in H(X, \mathbb{C}^n) \mid \exists\, w \in \mathbb{C}^n,\ \|w\| \leq m,\ \text{et si } f(x) = w,\ \dim_x L(f) \neq 0\}.$$

Remarquons que $A(m)$ contient les applications $f \in H(X, \mathbb{C}^n)$ telles que $\operatorname{Im}(f)$ ne contienne pas $B(0, m) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \|w\| \leq m\}$.

Lemme 2. $A(m)$ est un sous ensemble fermé de $H(X, \mathbb{C}^n)$ (muni de la topologie C. O.).

En effet, soit une suite de f_k, $f_k \in A(m)$ et $\lim_{k \to \infty} f_k = f_0$. On peut supposer que la suite w_k, correspondante aux f_k dans la définition de $A(m)$, converge vers w_0. Soit x_0 tel que $f_0(x_0) = w_0$. On doit montrer que $\dim_{x_0} L(f_0) \neq 0$. Supposons donc par l'absurde que $\dim_{x_0} L(f_0) = 0$. Il existe alors un voisinage compact V de x_0 t. q. $\forall\, x \in V$, $\dim_x L(f_0) = 0$ et l'ensemble

$$G_V = \{f \in H(X, \mathbb{C}^n) \mid \forall\, x \in V,\ \dim_x L(f) = 0\}$$

est un ouvert contenant f (voir la preuve du théorème 4, chap. V, D, page 168, [4]). On peut supposer que $\partial V = V - \overset{\circ}{V}$ étant les points frontières de V, $\inf_{x \in \partial V} \|f_0(x) - w_0\| > \delta \neq 0$. Alors si $N(f_0, K, \varepsilon)$, désigne $\{f \in H(X, \mathbb{C}^n) \mid \forall\, x \in K,\ \text{compact},\ \|f(x) - f_0(x)\| < \varepsilon\}$, on a pour tout $f \in H(X, \mathbb{C}^n)$ tel que

$$f \in G_V \cap N\left(f_0, \partial V, \frac{\delta}{2}\right) \cap N\left(f_0, x_0, \frac{\delta}{3}\right) = N(f_0)$$

on a facilement que n étant la pure dimension de X,

$$f(V) \supset B\left(w_0, \frac{\delta}{2}\right).$$

Pour k assez grand pour que $f_k \in N(f_0)$ et $w_k \in B\left(w_0, \frac{\delta}{2}\right)$, on en conclut immédiatement une contradiction. Ce qui prouve le lemme 2.

Pour prouver le théorème, il reste à montrer

LEMME 3.

$$C(m) = H(X, \mathbb{C}^n) - A(m) \text{ est dense dans } H(X, \mathbb{C}^n).$$

Soit donc $g \in H(X, \mathbb{C}^n)$ et un voisinage fondamental de g, $N(g, K, \varepsilon) = \{f \in H(X, \mathbb{C}^n) \mid \forall x \in K$, compact, $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon\}$. Soit $\Phi \in H(X)$, qui n'atteind pas en module son maximum sur K. Il existe alors un ouvert U de X t. q. $\bar{U} \cap K = \emptyset$ et $\Phi(U)$ est contenu dans une boule fermée de $\mathbb{C}$, disjointe de $B(0, \|\Phi\|_K) = \{z \mid \|z\| \leq \sup_{x \in K} \|\Phi(x)\|\}$. D'après le théorème de Mergelyan (page 386, [5]), pour tout ε_0, il existe un polynôme $p \in \mathbb{C}[z]$ t. q.

$$\|p \circ \Phi\|_K < \varepsilon_0 \quad \text{et} \quad \|p \circ \Phi - 1\|_{\bar{U}} < \varepsilon_0,$$

D'après le lemme 1, on peut construire une fonction $f_0 \in H(X, \mathbb{C}^n)$ telle que V étant un ouvert de X, $\bar{V} \subset U$, nous avons

$$f_0(V) \supset B(0, m) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| \leq m\}$$

et $\forall x \in \bar{V}$, $\dim_x L(f_0) = 0$. Comme rappelons encore que

$$\{f \in H(X, \mathbb{C}^n) \mid \dim_x L(f) = 0, \ \forall x \in \bar{V}\}$$

est un ouvert de $H(X, \mathbb{C}^n)$, on peut choisir ε_0 assez petit pour que

$$g + (p \circ \Phi)(f_0 - g) \in C(m) \cap N(g, K, \varepsilon). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Pour illustrer notre théorème 2, rappelons aussi le théorème de Sard: Si X est espace analytique de dimension strictement inférieure à n, alors pour $\forall f \in H(X, \mathbb{C}^n)$, $f(x) = \operatorname{Im} f$ est de mesure nulle dans $\mathbb{C}^n$. Cependant on a aussi la proposition suivante:

PROPOSITION. Si X est un espace analytique admettant une fonction analytique non constante, alors à l'exception d'un ensemble maigre, les applications $f \in H(X, \mathbb{C}^n)$ sont telles que $\mathrm{Im} f = f(X)$ soit dense dans $\mathbb{C}^n$.

PREUVE. Il suffit de montrer pour tout $B(w_0, r) = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \|w - w_0\| < \varepsilon\}$ l'ensemble $A = \{f \in H(X, \mathbb{C}^n) \mid \mathrm{Im} f \cap B(w_0, r) = \emptyset\}$ est un fermé dont le complémentaire $\mathbb{C}$ est dense dans $H(X, \mathbb{C}^n)$. Il est évident que A est fermé. Soit $N(f, K, \varepsilon)$ un voisinage de $f \in H(X, \mathbb{C}^n)$. Considérons une fonction $\Phi \in H(X)$, non constante. Soit $x_0 \in X$ tel que $|\Phi(x_0)| > \sup_{x \in K} |\Phi(x)|$. Alors pour k assez grand, la fonction

$$g = f + \left(\frac{\Phi}{\Phi(x_0)}\right)^k (w_0 - f)$$

est dans $C \cap N(f, K, \varepsilon)$. C. Q. F. D.

Rappelons pour conclure qu'on a toujours cette question ouverte: Si p est une application polynômiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, à Jacobien partout non nul, alors p est surjectif.

Dans le cas où $n \leq 2$, la réponse est affirmative [6].

Signalons enfin que le premier auteur a prouvé dans un autre travail à paraitre que dans l'ensemble $H(X, P^n\mathbb{C})$ des applications analytiques d'un espace analytique de Stein de pure dimension n dans l'espace projectif $P^n\mathbb{C}$, il existe un ouvert partout dense, pour la topologie C. O, d'applications surjectives.

REFERENCES

[1] S. BOCHNER et W. T. MARTIN, *Several complex variables.* Princeton University Press, Princeton, 1948.

[2] L. BROWN et P. M. GAUTHIER, *Equidistribution des valeurs d'une fonction analytique générique sur un espace de Stein* (à paraitre).

[3] D. MUMFORD, *Introduction to algebraic geometry.* Department of Mathematics, Harvard University.

[4] R. C. GUNNING et H. ROSSI, *Analytic functions of several complex variables.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1965.

[5] W. RUDIN, *Real and complex analysis.* McGraw-Hill, Toronto, 1966.

[6] W. ENGEL, *Ein Satz uber ganze Cremona-Transformationen der Ebene,* Math. Ann. 130 (1955) 11-19.