ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

D. LUNA
TH. VUST

Un théorème sur les orbites affines des groupes algébriques semi-simples

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 27, nº 3 (1973), p. 527-535
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_527_0>

UN THEOREME SUR LES ORBITES AFFINES DES GROUPES ALGEBRIQUES SEMI-SIMPLES

par D. LUNA et TH. VUST

RÉSUMÉ. Dans cet article, on étudie l'opération d'un groupe algébrique semisimple G dans une variété algébrique affine X, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. Le résultat principal obtenu est le suivant: on suppose que l'algèbre des fonctions régulières de X est factorielle; la dimension maximale des orbites affines de G dans X est alors égale à la dimension maximale des orbites fermées de G dans X.

Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle. Soit G un groupe algébrique qui opère (morphiquement) dans une variété affine X. On désigne par $k[X]$ l'algèbre des fonctions régulières de X. On note a_X (resp. f_X) le maximum des dimensions des orbites affines (resp. fermées) de G dans X. En général, on a $a_X \geq f_X$. Plus bas, au paragraphe 3, nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME. *On suppose que G est semi-simple et que $k[X]$ est factorielle. Alors $a_X = f_X$.*

Nous déduirons ensuite du théorème ces deux corollaires:

COROLLAIRE 1. ([4], théorème 1). *Mêmes hypothèses que dans le théorème. Pour qu'il existe un ouvert non vide de X composé d'orbites fermées dans X, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert non vide de X où l'isotropie de G est réductive.*

Pervenuto alla Redazione il 16 Aprile 1972.

Corollaire 2. *Mêmes hypothèses que dans le théorème. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *G a une orbite ouverte dans X;*

(2) *les seuls invariants de G dans $k[X]$ sont les constantes;*

(3) *G n'a qu'une orbite fermée dans X;*

(4) *G n'a qu'une orbite affine dans X.*

§ 1.

Dans ce paragraphe, G désigne un groupe algébrique réductif connexe qui opère dans une variété affine (non nécessairement irréductible) X. Nous commençons par introduire les notations et rappeler les faits de base dont nous aurons besoin dans la suite (pour plus de détails, voir [2]).

L'algèbre $k[X]^G$ des éléments de $k[X]$ que G laisse invariants, est de type fini sur k. Cela permet de définir une variété affine X/G par $k[X/G] = k[X]^G$. L'inclusion $k[X]^G \subset k[X]$ donne un morphisme $\pi_X : X \to X/G$ dont on montre qu'il est surjectif. Pour tout $\xi \in X/G$, $\pi_X^{-1}(\xi)$ contient exactement une orbite fermée: notons-la $T(\xi)$. Les points de $\pi_X^{-1}(\xi)$ sont ceux de X dont l'orbite est adhérente à $T(\xi)$. Ainsi, les points du « quotient » X/G correspondent de façon biunivoque aux orbites fermées de G dans X.

Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints de X, stables par G. Il existe alors $f \in k[X]^G$, qui est nul sur F_1 et égal à 1 sur F_2 (« les invariants séparent les fermés G-stables disjoints »). On en déduit en particulier que, si F est un fermé G-stable de X, $\pi_X(F)$ est fermé dans X/G.

Si $f \in k[X]$, nous désignons par X_f le sous-ensemble de X où la fonction f n'est pas nulle; c'est un ouvert affine de X. Si $f \in k[X]^G$, X_f est stable par G. Par dimension de X on entend le maximum des dimensions des composantes irréductibles de X; lorsque X est irréductible et que F est un fermé de X, on dira que F est de codimension p dans X, si $\dim F = \dim X - p$. Si $k[X]$ est intègre, on note $k(X)$ son corps des fractions.

Soit H un sous-groupe réductif de G. Supposons que H opère dans une variété affine Y. Faisons opérer H dans $G \times Y$ par $t(s, y) = (st^{-1}, ty)$. Notons $G \times_H Y$ le « quotient » de $G \times Y$ par cette opération (c'est-à-dire la variété affine définie par $k[G \times_H Y] = (k[G] \otimes k[Y])^H$); $G \times_H Y$ est un fibré localement trivial au sens étale, de base G/H et de fibre type Y. L'opération de G dans lui-même, par translations à gauche, passe au quotient en une opération de G dans $G \times_H Y$. Si Y est une sous-variété de X, stable par H, l'opération de G dans X induit un G-morphisme $G \times_H Y \to X$. Notons e l'élément neutre de G; si $y \in Y$, désignons par $\overline{(e, y)}$ l'image de $(e, y) \in G \times Y$ dans $G \times_H Y$.

Pour tout point x de X, nous notons $G(x)$ l'orbite de G passant par x, et G_x le groupe d'isotropie de G en x. D'après un théorème de Matsushima, pour que $G(x)$ soit affine, il faut et il suffit que G_x soit réductif.

LEMME 1. *Soit x un point de X dont le groupe d'isotropie G_x est réductif. Il existe alors une sous-variété affine (localement fermée) Y de X dont les propriétés sont les suivantes :*

1) *Y contient x ;*
2) *Y est stable par G_x ;*
3) *l'opération de G dans X induit un G-morphisme étale*

$$G \times_{G_x} Y \to X.$$

Si la variété X est normale, on peut de plus choisir Y irréductible.

Preuve: Il est bien connu qu'on peut plonger X comme sous-G-variété fermée dans un espace vectoriel M de dimension finie sur k, dans lequel G opère linéairement. Puisque G_x est supposé réductif, il opère de façon complètement réductible dans T_xM et M, espaces que nous identifions. Soit N' un supplémentaire de $T_xG(x)$ dans $T_xM = M$, stable par G_x. Désignons par N l'espace affine $x + N'$; il est encore stable par G_x. L'opération de G dans M induit un G-morphisme $\varphi : G \times_{G_x} N \to M$, qui est étale en $\overline{(e, x)}$ (on vérifie que la variété $G \times_{G_x} N$ est lisse et que $T_{\overline{(e,x)}} \varphi$ est bijectif). Notons V l'ensemble des $y \in N$ tels que φ soit étale en $\overline{(e, y)}$; V est ouvert, stable par G_x et contient x. Il existe $f \in k[N]^{G_x}$ tel que $x \in N_f \subset V$ (les invariants séparent les fermés G_x-stables disjoints).

Posons $X' = (\varphi \mid G \times_{G_x} N_f)^{-1}(X)$; c'est une sous-variété fermée de $G \times_{G_x} N_f$, stable par G. On en déduit que X' est de la forme $G \times_{G_x} Y$, où Y est un fermé de $N_f \cap X$, contenant x et stable par G_x (voir [2], I § 3). Enfin, du fait que $\varphi : G \times_{G_x} N_f \to M$ est étale, il résulte que $\varphi : X' = G \times_{G_x} Y \to X$ l'est aussi (voir [5], exposé 1).

Si la variété X est normale, comme $\varphi : X' \to X$ est étale, X' est également normale (ibid.); par suite, Y l'est aussi (car X' est un fibré localement trivial au sens étale, de fibre type Y). Il est alors aisé de voir qu'on peut remplacer Y, au cas où il ne serait pas irréductible, par sa composante irréductible qui contient x.

LEMME 2. *L'ensemble des ξ de X/G tels que* $\dim T(\xi) = f_X$ *est ouvert dans X/G.*

Preuve: Soit $\xi \in X/G$ tel que $\dim T(\xi) = f_X$. Nous allons exhiber un voisinage V de ξ dans X/G dans lequel la fonction $\xi' \mapsto \dim T(\xi')$ reste constante.

Choisissons $x \in T(\xi)$. L'hypothèse du lemme 1 est remplie ($T(\xi)$ est affine, donc G_x réductif) : considérons le G-morphisme étale $\varphi : G \times_{G_x} Y \to X$ qu'il nous fournit. L'image de φ est ouverte et stable par G. Par suite, il existe $f \in k[X]^G$ tel que $T(\xi) \subset X_f \subset \varphi(G \times_{G_x} Y)$ (les invariants séparent les fermés G-stables disjoints). Posons $V = (X/G)_f$; il est clair que V est un voisinage de ξ dans X/G. Soit $\xi' \in V$. Puisque les fibres du G-morphisme φ sont finies, $\varphi^{-1}(T(\xi'))$ est composé d'un nombre fini d'orbites T_i $(i = 1, \ldots, k)$, de même dimension que $T(\xi')$. Toute orbite de $G \times_{G_x} Y$ est de dimension $\geq \dim G/G_x$. Par suite, $f_X \geq \dim T(\xi') = \dim T_1 \geq \dim G/G_x = \dim T(\xi) = f_X$.

Soient C' et C deux variétés affines irréductibles dans lesquelles G opère, et soit $\varphi : C' \to C$ un G-morphisme.

LEMME 3. *On suppose que φ est dominant, que les fibres de φ sont finies, et que G a une orbite ouverte O dans C telle que $C - O$ soit de codimension > 1 dans C. Alors φ est fini.*

Preuve : Nous donnerons deux démonstrations du lemme 3. Commençons par des remarques qui servent dans l'une et l'autre.

Soient $\widetilde{C}'$ et $\widetilde{C}$ les normalisations de C' et C. Le groupe G opère dans $\widetilde{C}'$ et $\widetilde{C}$. Le G-morphisme $\varphi : C' \to C$ donne un G-morphime $\widetilde{\varphi} : \widetilde{C}' \to \widetilde{C}$. On voit aisément que $\widetilde{\varphi}$ remplit les hypothèses du lemme 3, et que, si $\widetilde{\varphi}$ est fini, φ l'est également. On peut donc supposer C' et C normales, ce que nous ferons désormais.

Puisque φ est dominant, que φ est un G-morphisme, et que ses fibres sont finies, on voit que $\varphi^{-1}(O)$ est non vide, et qu'il est composé d'orbites de dimension $\dim O = \dim C = \dim C'$. Il s'ensuit, comme C' est irréductible, que $O' = \varphi^{-1}(O)$ est une seule orbite qui est ouverte dans C'.

Nous aurons enfin besoin du résultat bien connu que voici (voir par exemple [3], III § 8) :

(*) Soient Z une variété affine, irréductible et normale, V un ouvert de Z tel que $Z - V$ soit de codimension > 1 dans Z. Les seuls éléments de $k(Z)$ qui soient définis en tout point de V, sont ceux de $k[Z]$.

PREMIÈRE VARIANTE.

Désignons par A la fermeture intégrale de $k[C]$ dans $k[C']$; c'est une algèbre de type fini sur k, qui est intégralement close si $k[C']$ l'est. Définissons une variété affine Z par $k[Z] = A$. Le groupe G opère dans Z, et les inclusions $k[C'] \supset k[Z] \supset k[C]$ donnent des G-morphismes $i : C' \to Z$ et $\psi : Z \to C$ dont le composé est φ. Par construction, ψ est fini. D'après le théorème principal de Zariski (voir par exemple [3], III § 9), i est une immersion ouverte. On vérifie aisément que $Z - i(O') = \psi^{-1}(C - O)$. Puisque $C - O$ est supposé de codimension > 1 dans C, on en déduit que $Z - i(O')$, et à plus forte raison $Z - i(C')$, est de codimension > 1 dans Z.

Puisque nous supposons la variété C' (et donc aussi Z) normale, et que $k(C') = k(Z)$, grâce à $(*)$, il s'ensuit que $k[C'] = k[Z]$, c'est-à-dire que $i: C' \to Z$ est un isomorphisme. Par suite, $\varphi = \psi$ est bien fini.

DEUXIÈME VARIANTE.

Choisissons un point y' dans O', et posons $y = \varphi(y') \in O$. Puisque φ est un G-morphisme dont les fibres sont finies, on trouve $G_{y'}^0 = G_y^0$ (si H est un groupe algébrique, on note H^0 la composante connexe de l'élément neutre de H). Considérons les variétés quasi affines G/G_y et G/G_y^0 dont les algèbres des fonctions régulières partout définies s'identifient à $k[G]^{G_y}$ et $k[G]^{G_y^0}$ (voir [1]). On a un diagramme commutatif évident de G-morphismes

$$\begin{array}{ccc} C' & \longrightarrow & C \\ \uparrow & & \uparrow \\ G/G_y^0 & \longrightarrow & G/G_y . \end{array}$$

Il se reflète en un diagramme commutatif d'homomorphismes injectifs d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} k[C'] & \supset & k[C] \\ \cap & & \cap \\ k[G]^{G_y^0} & \supset & k[G]^{G_y} . \end{array}$$

Puisque $k[C]$ et $k[G]^{G_y}$ ont même corps de fractions (car G/G_y est quasi-affine, et $G/G_y \to C$ une immersion ouverte) et que la variété C est supposée normale, on déduit de $(*)$ que $k[C] = k[G]^{G_y}$. Il s'ensuit, comme $k[G]^{G_y^0}$ est entier sur $k[G]^{G_y}$ (car $k[G]^{G_y} = (k[G]^{G_y^0})^{G_y/G_y^0}$), que $k[C']$ est entier sur $k[C]$. Il en résulte bien que φ est fini.

§ 2.

Dans ce paragraphe, nous supposerons que G est semi-simple et connexe, et que $k[X]$ est factoriel. Si A est un anneau unitaire, nons désignons par A^* l'ensemble de ses éléments inversibles. On sait que $k[X]^*/k^*$ est un groupe abélien libre de type fini (voir [6], p. 28). Comme G est supposé connexe, il s'ensuit que G opère trivialement dans $k[X]^*$ (1). Si $s \in G$ et

(1) Les auteurs remercient V. L. POPOV et M. RAYNAUD de leur avoir signalé ce résultat.

$f \in k(X)$, notons f^s l'image de f par l'automorphisme de $k(X)$ qui est associé à s. Désignons par m_X le maximum des dimensions des orbites de G dans X. Notons U l'ouvert des points de X dont les orbites ont la dimension m_X; posons $F = X - U$ et notons F_i $(i = 1, \ldots, k)$ les composantes irréductibles de F; les F_i étant des fermés G-stables de X, les $\pi_X(F_i)$ sont fermés dans X/G.

Lemme 4. *Si F_i est de codimension 1 dans X, on a $\pi_X(F_i) \neq X/G$.*

Preuve: Supposons F_i de codimension 1 dans X. Désignons par $\mathfrak{a}$ l'idéal des fonctions de $k[X]$ qui sont nulles sur F_i. Puisque $k[X]$ est supposé factoriel, l'idéal $\mathfrak{a}$ est engendré par un élément f de $k[X]$. L'ensemble F_i étant stable par G, $\mathfrak{a}$ l'est aussi. On en déduit que, pour tout $s \in G$, $f^s = u(s) f$, où $u(s) \in k[X]^*$. Comme G opère trivialement dans $k[X]^*$, on trouve $f^{st} = u(s)\, u(t) f = f^{ts}$, quels que soient $s, t \in G$. Comme le groupe semi-simple connexe G est égal à son groupe dérivé, il s'ensuit que $f \in k[X]^G$. Il en résulte que $\pi_X(F_i) \neq X/G$: en effet, si $\pi_X(F_i) = X/G$, on aurait $f = 0$, ce qui est absurde.

Lemme 5. *Il existe un ouvert non vide W de X/G dont les propriétés sont les suivantes: pour tout $\xi \in W$,*

(1) *les composantes irréductibles de $\pi_X^{-1}(\xi)$ ont comme dimension* $\dim X - \dim X/G$,

(2) *les composantes irréductibles de $F \cap \pi_X^{-1}(\xi)$ ont des dimensions* $< \dim X - \dim X/G - 1$.

Preuve: Nous aurons besoin du résultat suivant qui est bien connu (voir par exemple [3], I § 8).

(*) Soient A et B deux variétés algébriques irréductibles, $\varphi : A \to B$ un morphisme dominant. Il existe alors un ouvert non vide V de B tel que, pour tout $y \in V$, toutes le composantes irréductibles de $\varphi^{-1}(y)$ ont comme dimension $\dim A - \dim B$.

Prouvons maintenant le lemme 5. Si $\pi_X(F_i) \neq X/G$, posons $W_i = X/G - \pi_X(F_i)$. Si $\pi_X(F_i) = X/G$, nous savons F_i de codimension > 1 dans X (lemme 4). Choisissons, d'après (*), un ouvert non vide W_i dans X/G tel que, pour tout $\xi \in W_i$, les composantes irréductibles de $(\pi_X | F_i)^{-1}(\xi) = \pi_X^{-1}(\xi) \cap F_i$ aient comme dimension $\dim F_i - \dim X/G < \dim X - \dim X/G - 1$. Choisissons enfin, toujours grâce à ( ), un ouvert non vide $\widetilde{W}$ de X/G tel que, pour tout $\xi \in \widetilde{W}$, on ait (1). Il est clair que $W = \widetilde{W} \cap W_1 \cap \ldots \cap W_k$ convient.

Lemme 6. *On a* $k(X)^G = k(X/G)$.

Voir [4], lemme 1.

Corollaire. *On a* $m_X = \dim X - \dim X/G$.

Voir par exemple [2], III § 4.

Proposition. *Il existe un ouvert non vide* W *de* X/G *qui a les propriétés suivantes: pour tout* $\xi \in W$,

(1) $\dim T(\xi) = f_X$,

(2) *si* $C_1, \dots, C_n$ *désignent les composantes irréductibles de* $\pi_X^{-1}(\xi)$ *alors, pour tout* $i = 1, \dots, n$, *l'intersection* $U \cap C_i$ *est formée d'une seule orbite qui est ouverte dans* C_i, *et* $C_i - U \cap C_i = C_i \cap F$ *est de codimension* > 1 *dans* C_i.

Preuve: On prend pour W l'intersection du « W » du lemme 5 et de l'ouvert du lemme 2. La deuxième assertion de la proposition résulte alors aussitôt du corollaire du lemme 6.

Soit X' une deuxième variété affine irréductible dans laquelle G opère, et soit $\varphi : X' \longrightarrow X$ un G-morphisme.

Lemme 7. *On suppose* φ *dominant et les fibres de* φ *finies. Alors, on a* $f_{X'} = f_X$.

Preuve: Soit V un ouvert affine de X'/G tel que $\dim T(\xi') = f_{X'}$, quel que soit $\xi' \in V$ (lemme 2). Quitte à remplacer X' par $\pi_{X'}^{-1}(V)$, on peut supposer que toutes les orbites fermées de G dans X' ont dimension $f_{X'}$.

Puisque φ est supposé dominant, $\varphi(X')$ est d'intérieur non vide dans X. Choisissons un point intérieur x de $\varphi(X')$ tel que $\pi_X(x) = \xi \in W$, où l'on désigne par W le « W » de la proposition. Soit C une composante irréductible de $\pi_X^{-1}(\xi)$ contenant x. L'ensemble $\varphi(X') \cap C$ est dense dans C; il existe donc une composante irréductible C' de $\varphi^{-1}(C)$ qui domine C. Soit T une orbite fermée de G dans C'. Considérons $\varphi : C' \longrightarrow C$; grâce à la proposition, on vérifie que les hypothèses du lemme 3 sont remplies: $\varphi : C' \longrightarrow C$ est donc fini. Il s'ensuit que l'orbite $\varphi(T)$ est fermée. Puisque $T(\xi)$ est l'unique orbite fermée de C, il en résulte que $\varphi(T) = T(\xi)$. Les orbites T et $T(\xi)$ ont donc même dimension (les fibres de φ sont finies). Par suite, $f_{X'} = \dim T = \dim T(\xi) = f_X$.

§ 3.

PREUVE DU THÉORÈME.

On peut clairement supposer G connexe. Soit x un point de X dont l'orbite $G(x)$ est affine et de dimension a_X. Les hypothèses du lemme 1 sont remplies : considérons le G-morphisme $\varphi : G \times_{G_x} Y \longrightarrow X$ qu'il nous fournit (où nous pouvons supposer Y irréductible, car $k[X]$ est factorielle, donc X normale). Ce morphisme satisfait aux conditions du lemme 7, d'où $f_{G \times_{G_x} Y} = f_X$. Le théorème découle alors aussitôt du lemme suivant :

LEMME 8. *On a* $f_{G \times_{G_x} Y} = a_X$.

PREUVE. Puisque φ est un G-morphisme dont les fibres sont finies, il envoie toute orbite fermée dans $G \times_{G_x} Y$ sur une orbite affine dans X de même dimension, d'où $f_{G \times_{G_x} Y} \leq a_X$. D'autre part, l'orbite de G dans $G \times_{G_x} Y$ passant par $\overline{(e, x)}$ est fermée et isomorphe à $G(x)$; par suite $f_{G \times_{G_x} Y} \geq \dim G(x) = a_X$.

PREUVE DU COROLLAIRE 1. Du théorème de Matsushima résulte que la condition est nécessaire. Inversement, s'il existe un ouvert non vide de X où l'isotropie de G est réductive, G a une orbite affine dans X de dimension m_X. D'après le théorème, G a alors aussi une orbite fermée dans X de dimension m_X. Partant de là, il est facile de conclure (voir [4], théorème 4).

PREUVE DU COROLLAIRE 2. Les implications (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3) et (4) $\Longrightarrow$ (3) sont vraies pour tout groupe réductif qui opère dans une variété affine irréductible ; (1) $\Longrightarrow$ (2) résulte du fait que toute fonction de $k[X]^G$ est constante sur l'orbite ouverte, donc est constante partout ; puisque les points de X/G correspondent de façon biunivoque aux orbites fermées de G dans X, on voit que (2) $\Longleftrightarrow$ (3) ; enfin (4) $\Longrightarrow$ (3) est évident.

L'implication (2) $\Longrightarrow$ (1) est une conséquence immédiate du lemme 6 et de son corollaire.

Reste à prouver que (3) $\Longrightarrow$ (4). Désignons par T l'unique orbite fermée et par A une orbite affine dans X. On a $T \subset \bar{A}$. D'après le théorème, $\dim A \leq \dim T$. Comme $\dim(\bar{A} - A) < \dim A$, il s'ensuit que $A = T$.

Université scientifique et médicale de Grenoble
Laboratoire de mathématiques pures associé au C. N. R. S.
Boîte postale 116
38402 - Saint - Martin - d'Hères

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIALYNICKI-BIRULA A., HOCHSCHILD G., MOSTOW G. D.: *Extensions of representations of algebraic linear groups.* Amer. J. Math., 85 (1963), 131-144.

[2] LUNA D.: *Slices étales.* Bull. Soc. Math. France, Mémoire 33 (1973), 81-105.

[3] MUMFORD D.: *Introduction to algebraic geometry.*

[4] POPOV V. L.: *Stability criteria for the action of a semi-simple group on a factorial manifold.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. Tom 34 (1970), N^0 3; English transl. Math. USSR-Izvestija, Vol. 4 (1970), N^0 3, 527-535.

[5] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61, Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1), un séminaire dirigé par A. GROTHENDIECK, *Lecture notes in mathematics,* vol. 224, Berlin-Heidelberg - New-York, Springer Verlag (1971).

[6] ROSENLICHT M.: *Some rationality questions on algebraic groups.* Ann. Math. Pura Appl. s. 4, t. 43 (1957), 25-50.