

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

CONSTANTIN NĂSTĂSESCU

La filtration de Gabriel

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 27, n° 3 (1973), p. 457-470

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_457_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA FILTRATION DE GABRIEL

par CONSTANTIN NĂSTĂSESCU

§ 0. Introduction.

Soit A un anneau commutatif et unitaire et $\text{Mod } A$ la catégorie des A -modules unitaires.

Suivant [5] nous associerons à tout ordinal α une sous-catégorie localisante $(\text{Mod } A)_\alpha$ de $\text{Mod } A$.

Nous noterons T_α le foncteur canonique de $\text{Mod } A$ dans la catégorie quotient $\text{Mod } A/(\text{Mod } A)_\alpha$ et avec S_α le foncteur adjoint à droite de T_α [5, chap. 3].

La construction des sous-catégories $(\text{Mod } A)_\alpha$ se fait par récurrence transfinitie :

— $(\text{Mod } A)_0$ est la plus petite sous-catégorie localisante contenant tous les A -module simples.

— Si l'ordinal α a un prédécesseur β , $(\text{Mod } A)_\alpha$ est la plus petite sous-catégorie localisante contenant tous les A -modules M tels que $T_\beta(M)$ soit des objets simples dans la catégorie $\text{Mod } A/(\text{Mod } A)_\beta$

— Si α est un ordinal limite, $(\text{Mod } A)_\alpha$ est la plus petite sous-catégorie localisante contenant toutes les sous-catégories $(\text{Mod } A)_\beta$ pour $\beta < \alpha$.

On obtient la suite ascendente des sous-catégories localisantes de $\text{Mod } A$ indexée d'après un ensemble de nombres ordinaux :

$$(\text{Mod } A)_0 \subset (\text{Mod } A)_1 \subset \dots \subset (\text{Mod } A)_\alpha \subset \dots$$

Cet suite des sous-catégorie localisante nous appellerons
« la filtration de Gabriel »

Puisque A est un ensemble, il existe un ordinal α avec la propriété :

$$(\text{Mod } A)_\alpha = (\text{Mod } A)_{\alpha+1} = \dots$$

S'il existe un ordinal α tel que $\text{Mod } A = (\text{Mod } A)_\alpha$ alors nous dirons que l'anneau A la dimension Krull définie et le plus petite ordinal α ayant cette propriété sera appelé la dimension Krull de $\text{Mod } A$, on le désigne par $K \dim A$.

Dans ce travail on caractérise les sous-catégories localisantes $(\text{Mod } A)_\alpha$, où A est un anneau commutatif et unitaire.

Les résultats sont donnés dans le théorème 3.1 et les corollaires 3.1, 3.2, 3.3.

§ 1. Définition et notations.

Dans ce qui suit A sera un anneau commutatif et unitaire et $\text{Mod } A$ la catégorie des A -modules. Si M est un A -module non-nul, alors nous dirons que l'idéal premier p de A est associé au module M [2] s'il existe un élément $x \in M$, tel que

$$p = \text{Ann}(x) = \{\lambda \mid \lambda \in A, \lambda x = 0\}$$

Nous noterons par $\text{Ass}(M)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M et par $\text{Spec } A$ (le spectre de l'anneau A), l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau A .

Si \mathcal{P} ($\text{Spec } A$) est l'ensemble des parties de $\text{Spec } A$ alors « l'application » :

$$\text{Ass} : \text{Mod } A \rightarrow \mathcal{P}(\text{Spec } A)$$

a les propriétés suivantes :

$$1) \text{ Si } 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte, alors

$$\text{Ass}(M') \subseteq \text{Ass}(M) \subseteq \text{Ass}(M') \cup \text{Ass}(M'')$$

2) Si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille filtrante croissante de sous-modules de M , alors

$$\text{Ass}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} \text{Ass}(M_i)$$

$(\bigoplus_{i \in I} M_i)$ est la somme directe de la famille $(M_i)_{i \in I}$. Si p_0, p_1, \dots, p_k est une chaîne strictement croissante des idéaux premiers de l'anneau A , alors k s'appelle la longueur de cette suite.

S'il existe un nombre naturel n qui est borne supérieure des longueurs des chaînes strictement croissantes des idéaux premiers d'anneau A , on note n la dimension de Krull (classique) d'anneau A et on le note avec $\dim A$.

Rappelons quelques notions de la théorie de catégorie.

Une catégorie abélienne \mathcal{C} est une catégorie Grothendieck si \mathcal{C} a des générateurs et limites inductives exactes [5 pp. 336].

Si \mathcal{C} est une catégorie Grothendieck, alors une sous-catégorie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ est localisante [5 ch. 3] si les propriétés suivantes sont remplies.

1) Si

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte alors $M \in \mathcal{A}$ si et seulement si $M', M'' \in \mathcal{A}$.

2) Si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille des objets de \mathcal{A} alors

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \in \mathcal{A}$$

Soient \mathcal{C} une catégorie abélienne et M un objet de \mathcal{C} . Une extension essentielle [5 pag. 358] de M est un monomorphisme $i: M \rightarrow P$ qui vérifie la condition suivante: si Q est sous-objet de non-nul, alors $Q \cap i(M) \neq 0$.

Un objet S de \mathcal{C} est dit simple s'il est non nul et s'il ne contient aucun sous-objet distinct de S ou de 0 .

D'après [9] une catégorie Grothendieck \mathcal{C} est dite semi-artinienne si tout objet non-nul de \mathcal{C} contient un sous-objet simple non-nul.

PROPOSITION 1.1. Soient \mathcal{C} une catégorie Grothendieck et \mathcal{A} une sous-catégorie non-nulle de \mathcal{C} ayant la propriété suivante:

(*) Si

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

est une suite exacte et si $M \in \mathcal{A}$, alors $M', M'' \in \mathcal{A}$.

Notons par \mathcal{A}_0 la plus petite sous-catégorie localisante qui contient \mathcal{A} .

Alors $M \in \mathcal{A}_0$ si et seulement si M/M' contient un sous-objet non-nul de \mathcal{A} , pour tout sous-objet $M' \subset M$, $M' \neq M$.

DÉMONSTRATION. Désignons par $\overline{\mathcal{A}}$ la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} formée des objets M de \mathcal{C} qui vérifient la condition suivante: pour tout sous-objet $M' \subset M$, $M' \neq M$, M/M' contient un sous-objet non-nul de \mathcal{A} . Il faut montrer que $\mathcal{A}_0 = \overline{\mathcal{A}}$.

LEMME 1.1. Si $M \in \overline{\mathcal{A}}$, $M \neq 0$, alors tout sous-objet $P \subset M$, $P \neq 0$, contient un sous-objet non-nul de \mathcal{A} .

DÉMONSTRATION. De la définition de $\bar{\mathcal{A}}$, on en déduit que M contient un sous-objet non nul Q de \mathcal{A} . Si M est une extension essentielle de P , alors $P \cap Q \neq 0$. Comme $P \cap Q \subset P$ et $P \cap Q \in \mathcal{A}$, alors P contient un sous-objet non-nul de \mathcal{A} .

Si M n'est pas une extension essentielle de P , alors il existe un sous-objet $P' \subset M$, $P' \neq 0$ tel que $P \cap P' = 0$.

On peut supposer que P' est maximal avec la propriété $P \cap P' = 0$.

Il en résulte qu'il existe un monomorphisme

$$\varphi: P \rightarrow M/P'$$

où M/P' est une extension essentielle de P . Mais M/P' contient un sous-objet de \mathcal{A} et ensuite P contient un sous-objet de \mathcal{A} .

Nous reprenons la démonstration de la proposition 1.1.

Parce que \mathcal{A} la propriété (*) alors $\mathcal{A} \leq \bar{\mathcal{A}}$. Vérifions que est une sous-catégorie localisante.

Soit

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

une suite exacte de \mathcal{C} .

Supposons que $M \in \bar{\mathcal{A}}$. Il est clair que $M'' \in \bar{\mathcal{A}}$. Soit $M'_1 \subset M$ un sous-objet de M tel que $M'_1 \neq M$.

Comme $M'/M_1 \subset M/M'_1$, il résulte du lemme 1.1 que M'/M_1 contient un sous-objet de \mathcal{A} . Donc $M' \in \mathcal{A}$. Réciproquement: Supposons $M', M'' \in \bar{\mathcal{A}}$.

Soit $P \subset M$ un sous-objet tel que $P \neq M$.

Si $P \cap M' \neq M'$ alors $M'/P \cap M'$ contient un sous-objet non-nul de \mathcal{A} . Parce que $M'/P \cap M' \cong M' + P/P$, alors M/P contient un sous-objet non-nul de \mathcal{A} .

Si $P \cap M' = M'$ alors $M' \subset P$ donc M/P est un objet quotient de M'' . Comme $M'' \in \bar{\mathcal{A}}$, il en résulte que M/P contient un sous-objet non-nul de \mathcal{A} . Donc $M \in \bar{\mathcal{A}}$.

Soit maintenant $(M_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\bar{\mathcal{A}}$ et $P \subset \bigoplus_{i \in I} M_i$ un sous-objet tel que $P \neq \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Les objets M_i peuvent être considérés comme des sous-objets de $\bigoplus_{i \in I} M_i$ par les morphismes canoniques.

Il existe un $i \in I$, tel que $P \cap M_i \neq M_i$. Puisque $M_i/P \cap M_i \cong M_i + P/P$, $M_i + P/P$ contient un sous-objet non-nul de \mathcal{A} , donc $\bigoplus_{i \in I} M_i/P$ contient un sous-objet non-nul de \mathcal{A} , d'où on conclut que $\bigoplus_{i \in I} M_i \in \bar{\mathcal{A}}$.

Donc $\bar{\mathcal{A}}$ est un sous-catégorie localisante. Il ensuit que $\mathcal{A}_0 \subset \bar{\mathcal{A}}$.

Si $\mathcal{A}_0 \neq \bar{\mathcal{A}}$, alors il existe $M \in \bar{\mathcal{A}}$ tel que $M \notin \mathcal{A}_0$. Si P est le plus grand sous objet de M qui appartient à \mathcal{A}_0 , alors $P \neq M$.

Parce que $M/P \in \bar{\mathcal{A}}$, alors M/P contient un sous-objet $P'/P \neq 0$ et $P'/P \in \mathcal{A}$.

De la suite exacte

$$0 \rightarrow P \rightarrow P' \rightarrow P'/P \rightarrow 0$$

on obtient $P' \in \mathcal{A}_0$ ce qui contredit la maximalité de P .

COROLLARIO 1.1. Si $M \in \mathcal{A}_0$, $M \neq 0$, alors il existe une famille $(M_i)_{i \in I}$ de sous objets avec les propriétés suivantes :

- 1) $\sum_{i \in I} M_i \subset M$ (la somme de sous objets M_i est directe),
- 2) M est une extension essentielle de $\sum_{i \in I} M_i$.

DÉMONSTRATION. Désignons par $R(M)$ l'ensemble des famille des sous objets de M qui sont des sommes directes dans M , et qui appartiennent à \mathcal{A} . Parce que $M \neq 0$, alors M contient un sous objet Q de \mathcal{A} . Donc $\{Q\} \in R(M)$ et ensuite $R(M) \neq \emptyset$.

Nous considerons $R(M)$ ordonné par l'inclusion.

Soit $(N_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $R(M)$ totalement ordonnés. Soit $N = \bigcup N_i$; montrons que $N \in R(M)$. Parce que $N_i \in R(M)$ alors $N_i = \sum_j N_{ij}$, la somme étant directe et les N_{ij} appartiennent à \mathcal{A} .

Parce que $N = \sum N_j$, alors $N = \sum_{i,j} N_{ij}$ et la somme est directe, parce que la famille $(N_i)_{i \in I}$ est totalement ordonnée par inclusion. Donc $N \in R(M)$.

Avec Zorn, l'ensemble $R(M)$ a un élément maximal, soit M_0 cel element maximal. Alors $M_0 = M_i$, $M_i \in \mathcal{A}$ et la somme est directe Si M n'est pas une extension essentielle de M_0 , il existe un sous objet $M_1 \subset M$, $M_1 \neq 0$ tel que $M_1 \cap M_0 = 0$. Comme M_1 contient un sous-objet $N_0 \in \mathcal{A}$. $N_0 \neq 0$, il en resulte que le sous objet $M_0 + N_0$, appartient a $R(M)$, ce qui contredit la maximalité de M_0 .

Donc M est une extension essentielle de M_0 .

REMARQUE. L'idée de cette démonstration est celle de la proposition 1. [8]. Avec les notations de § 0 on obtient :

COROLLAIRE 1.2. Soit α un ordinal limite et M un A -module, $M \in (\text{Mod } A)_\alpha$. Si M_β est le plus grand sous-module de M qui appartient a $(\text{Mod } A)_\beta$ où $\beta < \alpha$, alors M est une extension essentielle de $\bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$.

DÉMONSTRATION. La sous-catégorie $\bigcup_{\beta < \alpha} (\text{Mod } A)_\beta$ vérifie la propriété (*) de la proposition 1.1.

Si $P \subset M$ est un sous-module tel que $P \neq 0$, alors, d'après proposition 1.1, P contient un sous-module $P' \subset P$, $P' \neq 0$ tel que $P' \in \bigcup_{\beta < \alpha} (\text{Mod } A)_\beta$.

Donc il existe un ordinal β , $\beta < \alpha$ tel que $P' \in (\text{Mod } A)_\beta$ d'où il s'ensuit que $P' \subset M_\beta$. Donc M est une extension essentielle de $\bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$.

COROLLAIRE 1.3. Si A est un anneau commutatif et unitaire, alors :

1) $(\text{Mod } A)_0$ est la plus grande sous-catégorie localisante de $\text{Mod } A$ qui est semi artinienne

2) Pour tout ordinal α la catégorie $(\text{Mod } A)_{\alpha+1}/(\text{Mod } A)_\alpha$ est la plus grande sous-catégorie localisante semi artinienne de $\text{Mod } A/(\text{Mod } A)_\alpha$.

Ce corollaire résulte immédiatement de la proposition 1.1.

§ 2. La dimension de $\text{Spec } A$.

Par récurrence transfinie nous définirons sur $\text{Spec } A$ deux filtrations :

I) — $(\text{Spec } A)_0 = \{ \underline{m} \mid \underline{m} \text{ est un idéal maximal de } A \}$

— Si l'ordinal α a un prédécesseur β alors $(\text{Spec } A)_\alpha = \{ \underline{p} \mid \underline{p} \in \text{Spec } A \text{ et si } \underline{q} \in \text{Spec } A, \underline{p} \subseteq \underline{q} \implies \underline{p} = \underline{q} \text{ ou } \underline{q} \in (\text{Spec } A)_\beta \}$

Si α est un ordinal limite alors :

$$(\text{Spec } A)_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} (\text{Spec } A)_\beta$$

Il existe un ordinal α tel que $(\text{Spec } A)_\alpha = (\text{Spec } A)_{\alpha+1}$. Si il existe un ordinal α tel que $\text{Spec } A = (\text{Spec } A)_\alpha$, nous dirons que $\text{Spec } A$ a la dimension descendante Krull définie. Nous désignons par $K_\alpha(\text{Spec } A)$ le plus petit ordinal α avec la propriété que $\text{Spec } A = (\text{Spec } A)_\alpha$.

II) Nous définirons de la manière suivante deuxième filtration $\text{Spec } A$.

— $(\text{Spec } A)^0 = \{ \underline{p} \mid \underline{p} \text{ est un idéal premier minimal} \}$

— Si l'ordinal α a un prédécesseur β alors

$(\text{Spec } A)^\alpha = \{ \underline{p} \mid \underline{p} \in \text{Spec } A, \text{ si } \underline{q} \in \text{Spec } A \text{ alors } \underline{q} \subseteq \underline{p} \implies \underline{q} = \underline{p} \text{ ou } \underline{q} \in (\text{Spec } A)^\beta \}$

— Si α est un ordinal limite alors

$$(\text{Spec } A)^\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} (\text{Spec } A)^\beta$$

Il existe un ordinal α tel que $(\text{Spec } A)^\alpha = (\text{Spec } A)^{\alpha+1} = \dots$

Si existe un ordinal α tel que $\text{Spec } A = (\text{Spec } A)^\alpha$ alors nous dirons que $\text{Spec } A$ a la dimension Krull ascendente définie; nous désignons par $K_\alpha(\text{Spec } A)$ le plus petit ordinal α pour lequel $\text{Spec } A = (\text{Spec } A)^\alpha$.

PROPOSITION 2.1. Pour tout ordinal α , $(\text{Spec } A)_\alpha$ (respectivement $(\text{Spec } A)^\alpha$) vérifie la condition de maximalité (respectivement minimalité) minimalité) c'est-à-dire tous sous-ensemble $\neq \emptyset$ de $(\text{Spec } A)^\alpha$ (respectivement $(\text{Spec } A)^\alpha$) a un élément maximal (respectivement minimal).

DÉMONSTRATION Soit $X \subset (\text{Spec } A)_\alpha$, $X \neq \emptyset$ et ne contenant pas des éléments maximaux.

Soit $\underline{p} \in X$, il existe un ordinal $\alpha_1 \leq \alpha$ tel que $\underline{p} \in (\text{Spec } A)_{\alpha_1}$ et α_1 est le plus petit ordinal avec cette propriété. Il existe $\underline{q} \in X$, $\underline{p} \not\subseteq \underline{q}$ et soit α_2 le plus petit ordinal pour lequel $\underline{q} \in (\text{Spec } A)_{\alpha_2}$; donc $\alpha_2 < \alpha_1$.

De cette manière on construit une suite descendante infinie de nombres ordinaux; on obtient donc une contradiction.

D'une manière analogue on montre que $(\text{Spec } A)^\alpha$ vérifie la condition de minimalité.

COROLLAIRE 2.1. Il existe un ordinal α tel que $\text{Spec } A = (\text{Spec } A)_\alpha$ si et seulement si et seulement si $\text{Spec } A$ vérifie la condition de maximalité.

2) Il existe un ordinal α tel que $\text{Spec } A = (\text{Spec } A)^\alpha$ si et seulement si $\text{Spec } A$ vérifie la condition de minimalité.

DÉMONSTRATION. 1) Nous supposons que $\text{Spec } A$ vérifie la condition de maximalité. Soit α le plus petit ordinal tel que $(\text{Spec } A)_\alpha = (\text{Spec } A)_{\alpha+1} = \dots$

Si $X = \text{Spec } A \setminus (\text{Spec } A)_\alpha \neq \emptyset$, alors X a un élément maximal \underline{p} , d'où il résulte que $\underline{p} \in (\text{Spec } A)_{\alpha+1}$, donc $(\text{Spec } A)_\alpha \neq (\text{Spec } A)_{\alpha+1}$, contradiction.

D'une manière analogue on montre 2).

COROLLAIRE 2.2. Si A est un anneau avec dimension Krull (classique) finie, alors $\text{Spec } A$ a la dimension ascendente et descendente définie et

$$\dim A = Kd(\text{Spec } A) = Ka(\text{Spec } A)$$

§ 3. La caractérisation des sous-catégories $(\text{Mod } A)_\alpha$.

THÉORÈME 3.1. Si M est un A -modul alors les suivantes affirmations sont équivalentes :

- 1) $M \in (\text{Mod } A)_a$
 2) $\text{Ass}(M/M') \neq \emptyset$ et $\text{Ass}(M/M') \subseteq (\text{Spec } A)_a$ pour tout sous-modules $M' \subset M, M' \neq M$.

Pour la démonstration nous donnons les lemmes suivantes.

LEMME 3.1. Soit M un A -module et $M' \subseteq M$ un sous-module. Si M est une extension essentielle de M' alors

$$\text{Ass}(M) = \text{Ass}(M')$$

DÉMONSTRATION. Soit $\underline{p} \in \text{Ass}(M)$, alors $\underline{p} = \text{Ann}(x)$ où $x \in M, x \neq 0$. Il existe $\lambda \in A$ tel que $\lambda x \in M', \lambda x \neq 0$ donc $\lambda \notin \underline{p}$ et par suite $\underline{p} = \text{Ann}(x) = \text{Ann}(\lambda x)$ d'où $\underline{p} \in \text{Ass}(M')$.

Comme $\text{Ass}(M') \subseteq \text{Ass}(M)$ alors $\text{Ass}(M) = \text{Ass}(M')$

LEMME 3.2. Soient \mathcal{C} une sous-catégorie localisante de $\text{Mod } A, T : \text{Mod } A/\mathcal{C}$ le foncteur canonique, M un A -module tel que : a) le plus grand sous-module de M dans \mathcal{C} est nul, b) $T(M)$ est un objet simple dans $\text{Mod } A/\mathcal{C}$.

Alors pour tout $x \in M, x \neq 0, \text{Ann}(x)$ est un idéal premier

DÉMONSTRATION. Soient $B = A/\text{Ann}(x), b \in B, b \neq 0$ et $\varphi_b : B \rightarrow B$ l'homothétie de rapport b ($\varphi_b(y) = by, y \in B$); il faut démontrer que $\text{Ker } \varphi_b = 0$.

Soit $\text{Ker } \varphi_b \neq 0$. On a $\text{Ker } \varphi_b \subset B \subset M$ et donc, en vertu de l'hypothèse a), $\text{Ker } \varphi_b \notin \mathcal{C}$, d'où $T(\text{Ker } \varphi_b) \neq 0$ ([5], pg 166, lemme 2). Comme T est un foncteur exact ([5], pg. 167, prop. 1) on tire d'abord de l'hypothèse b) que $T(B)$ est un objet simple, ensuite que $T(\text{Ker } \varphi_b) = T(B)$ et enfin que $T(\text{Im } \varphi_b) = 0$, c'est à dire $\text{Im } \varphi_b \in \mathcal{C}$. Puisque $\text{Im } \varphi_b \subset B \subset M$ on a (hypothèse a)) $\text{Im } \varphi_b = 0$; mais $0 \neq b \in \text{Im } \varphi_b$: contradiction.

LEMME 3.3. Soit M un A -module tel que $\text{Ass}(M/M') \neq \emptyset$ et $\text{Ass}(M/M') \subseteq (\text{Spec } A)_0$ pour tout sous-module $M' \subset M, M' \neq M$. Dans ces conditions $M \in (\text{Mod } A)_0$.

DÉMONSTRATION. Soit M_0 le plus grand sous-module de M qui appartient à $(\text{Mod } A)_0$ [5. chap. 3].

Si $M_0 \neq M$ alors $\text{Ass}(M/M_0) \neq \emptyset$, donc il existe $\underline{m} \in (\text{Spec } A)_0$ tel que $A/\underline{m} \subseteq M/M_0$. Nous notons

$$A/\underline{m} = M'/M_0 \quad (M' \subseteq M, M_0 \neq M');$$

de la suite exacte :

$$0 \rightarrow M_0 \rightarrow M' \rightarrow M'/M_0 \rightarrow 0$$

on obtient que $M' \in (\text{Mod } A)_0$, d'où $M' = M_0$: contradiction.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1. 1) \implies 2). La catégorie $(\text{Mod } A)_\alpha$ étant localisante on peut supposer $M' = 0$ $\beta \leq \alpha$ nous notons avec M_β le plus grand sous-module de M qui appartient au $(\text{Mod } A)_\beta$ [5, chap. 3].

Nous procedons par récurrence transfinie : $\alpha = 0$, $M \in (\text{Mod } A)_0$, donc M est trossionné dans le sens de Dickson [6], [10], d'où $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ et $\text{Ass}(M) \subseteq (\text{Spec } A)_0$. Nous supposons l'affirmation vraie pour tout $\beta < \alpha$; si α est un ordinal limite alors M est une extension essentielle de $\bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$ (corollaire 1.2) d'où il résulte : $\text{Ass}(M) = \bigcup_{\beta < \alpha} \text{Ass}(M_\beta)$ (lemme 3.1), donc $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ et $\text{Ass}(M) \subseteq (\text{Spec } A)_\alpha$.

Si $\alpha = \beta + 1$ alors de la suite exacte :

$$0 \rightarrow M_\beta \rightarrow M \rightarrow M/M_\beta \rightarrow 0$$

il résulte :

Comme $M/M_\beta \in (\text{Mod } A)_\alpha$ on peut supposer que $M_\beta = 0$. Soit $M' \subset M$ un sous-module non-nul de M , alors $T_\beta(M')$ contient un sous-objet simple X de $\text{Mod } A/(\text{Mod } A)_\beta$.

Nous considerons la suite exacte : [5 chap. 3]

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{\psi(M')} S_\beta T_\beta(M')$$

où $\psi(M')$ est une extension essentielle; si $M'' = \psi(M')^{-1}(S_\beta(X))$ alors $M'' \neq 0$ et $T_\beta(M'') \cong X$.

L'A module M'' a la propriété que pour tout sous-module $M'_1 \subset M''$, $M'_1 \neq 0$, il résulte $M''/M'_1 \in (\text{Mod } A)_\beta$.

D'après corollaire 1.1, il en résulte que M est une extension essentielle de $\bigoplus_{M' \subset M} M'$ (somme directe) où M' est sous-module de M .
 $T_\beta(M')$ est objet simple

Alors :

$$\text{Ass}(M) = \bigcup_{\substack{M' \subset M \\ T_\beta(M') \text{ est objet simple}}} \text{Ass}(M')$$

D'après lemme 3.2. : $\text{Ass}(M') \neq \emptyset$ et $\text{Ass}(M') \subseteq (\text{Spec } A)_{\beta+1}$ d'où $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$.

Soit $\underline{p} \in (\text{Ass } N')$ et $\underline{p} \subsetneq \underline{q} (q \in \text{Spec } A)$, comme $T_\beta(A/\underline{p})$ est simple on obtient $A/\underline{q} \in (\text{Mod } A)_\beta$, donc $\underline{q} \in (\text{Spec } A)_\beta$ et par suite $\underline{p} \in (\text{Spec } A)_{\beta+1}$, donc $\text{Ass } (M') \subseteq (\text{Spec } A)_\alpha$, donc

$$\text{Ass } (M) \subseteq (\text{Spec } A)_\alpha$$

2) \implies 1) Pour $\alpha = 0$ 2) \implies 1) est consequence de la lemme 3.3.

Nous supposons l'affirmation vraie pour tout $\beta < \alpha$.

Soit $\alpha = \beta + 1$; si $M_\alpha \neq M$ alors $\text{Ass } (M/M_\alpha) \neq \emptyset$ et $\text{Ass } (M/M_\alpha) \subseteq \subseteq (\text{Spec } A)_\alpha$. Il existe $\underline{p} \in (\text{Spec } A)_\alpha$ tel que $A/\underline{p} \subsetneq M/M_\alpha$. Notons $N = A/\underline{p}$; si $N' \subsetneq N$, $N' \neq N$, alors $\text{Ass } (N/N') \neq \emptyset$

De plus, pour tout $\underline{q} \in \text{Ass } (N/N')$ nous avons $\underline{p} \subsetneq \underline{q}$, d'où $\underline{q} \in (\text{Spec } A)_\beta$, donc $\underline{q} \in (\text{Spec } A)_\beta$ et par suite $\text{Ass } (N/N') \subseteq (\text{Spec } A)_\beta$ et par l'hypothèse de la récurrence transfinie il résulte $N/N' \in (\text{Mod } A)_\beta$ d'où $T_\beta(A/\underline{p})$ est un objet simple de $\text{Mod } A/(\text{Mod } A)_\beta$, donc $A/\underline{p} \in (\text{Mod } A)_\alpha$ ce qui contredit la maximalité de M_α .

Soit α un ordinal limite, si $M_\alpha \neq M$, alors $\text{Ass } (M/M_\alpha) \neq \emptyset$ et $\text{Ass } (M/M_\alpha) \subseteq (\text{Spec } A)_\alpha$. Il existe $\underline{p} \in (\text{Spec } A)_\alpha$ tel que $A/\underline{p} \subsetneq M/M_\alpha$. Soit $\beta < \alpha$, $\underline{p} \in (\text{Spec } A)_\beta$, alors $A/\underline{p} \in (\text{Mod } A)_{\beta+1}$. Comme α est ordinal limite $\beta + 1 < \alpha$ et donc $(\text{Mod } A)_{\beta+1} \subseteq (\text{Mod } A)_\alpha$ d'où $A/\underline{p} \in (\text{Mod } A)_\alpha$ ce qui contredit la maximalité de M_α .

Si $\underline{a} \subsetneq A$ est un idéal et $x \in A$ nous notons par $\{a : x\}$ l'ensemble :

$$\{a : x\} = \{\lambda \mid \lambda \in A, \lambda x \in \underline{a}\}.$$

COROLLAIRE 3.1. Les suivantes affirmations sont équivalentes :

- 1) A a dimension Krull définie
- 2) a) $\text{Ass } (M) \neq \emptyset$ pour tout A -module $M \neq 0$
b) $\text{Spec } A$ vérifie la condition de maximalité.
- 3) a) Pour tout idéal $\underline{a} \subsetneq A$, $\underline{a} \neq A$, il existe $x \in A$ tel que $\{a : x\}$ soit un idéal premier.
b) $\text{Spec } A$ vérifie la condition de maximalité.

DÉMONSTRATION. 1) \implies 2). Comme A la dimension Krull définie, il existe un ordinal α tel que $\text{Mod } A = (\text{Mod } A)_\alpha$.

Si $\text{Spec } A \neq (\text{Spec } A)_\alpha$ alors il existe $p \in \text{Spec } A$ tel que $p \notin (\text{Spec } A)_\alpha$.

Comme $A/\underline{p} \in (\text{Mod } A)_\alpha$ alors d'après le théorème 3.1 $\text{Ass}(A/\underline{p}) \subseteq (\text{Spec } A)_\alpha$. donc $\underline{p} \in (\text{Spec } A)_\alpha$: contradiction. Ensuite que $\text{Spec } A = (\text{Spec } A)_\alpha$ et d'après corollaire 2.1. on obtient b).

2) \implies 3). Il reste seulement à vérifier a).

Soit $\underline{a} \subsetneq A$ un idéal de A ; comme $\text{Ass}(A/\underline{a}) \neq \emptyset$, il existe $\widehat{x} \in A/\underline{a}$, $\widehat{x} \neq 0$, tel que $\{a : x\} = \text{Ann}(x)$ est un idéal premier.

3) \implies 2) It est claire

2) 1) Soit α_0 le plus petit ordinal tel que

$$(\text{Mod } A)_{\alpha_0} = (\text{Mod } A)_{\alpha_0+1} = \dots$$

Supposons que $(\text{Mod } A)_{\alpha_0} \neq \text{Mod } A$. Alors il existe un A -module M tel que $M \notin (\text{Mod } A)_{\alpha_0}$.

Comme $\text{Spec } A$ vérifie la condition de maximalité, alors il existe un ordinal α tel que $(\text{Spec } A)_\alpha = \text{Spec } A$. D'après le théorème 3.1 il en résulte que $M \in (\text{Mod } A)_\alpha$. Mais $(\text{Mod } A) \subseteq (\text{Mod } A)_{\alpha_0}$: contradiction.

COROLLAIRE 3.2. Soit A un anneau commutatif de dimension Krull finie (classique). Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- 1) A a la dimension Krull définie
- 2) $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$ pour tout A -module $M \neq 0$.
- 3) Pour tout idéal $\underline{a} \subsetneq A$, $\underline{a} \neq A$, il existe $x \in A$ tel que $\{a : x\}$ soit un idéal premier.

La démonstration résulte du corollaire 2.2. corollaire 3.1.

REMARQUES. 1) Du théorème 2.1 on obtient :

Si A est un anneau commutatif unitaire avec la dimension Krull définie, alors :

$$K \cdot \dim A = K_d(\text{Spec } A)$$

- 2) Soit A un anneau local avec l'idéal maximal \underline{m} . Si $\underline{m} = \underline{m}^2$, alors $(\text{Mod } A)_0 = (\text{Mod } A)_\alpha$ pour tout ordinal α .

Il suffit de montrer que $(\text{Mod } A)_0 = (\text{Mod } A)_1$.

Si $(\text{Mod } A)_0 \neq (\text{Mod } A)_1$, alors il existe $\underline{p} \in (\text{Spec } A)_1 - (\text{Spec } A)_0$ tel que $T_0(A/\underline{p})$ soit un objet simple dans $\text{Mod } A/(\text{Mod } A)_0$. Il en résulte que A/\underline{p} a la propriété suivante : pour tout idéal \underline{a} , $\underline{p} \subsetneq \underline{a}$, $A/\underline{a} \in (\text{Mod } A)_0$.

Comme $\underline{m}^2 = \underline{m}$, tout A -module de $(\text{Mod } A)_0$ est semi-simple et donc en particulier $\underline{m} \cdot (A/\underline{a}) = 0$, d'où $\underline{m} = \underline{a}$. Donc $\underline{p} = \underline{m}$, contradiction.

3) Un anneau de valuation [3] d'hauteur 1 a la dimension Krull définie si et seulement si A est un anneau de valuation discrète.

En effet si \underline{m} est l'idéal maximal de A alors il y a les suivantes deux cas :

a) $\underline{m} = \underline{m}^2$. D'après remarque 2 le A -module A appartient à $(\text{Mod } A)_0$. Alors A est un anneau semi-artinien [9] et d'après proposition 3.1 [9], A est un corps.

b) $\underline{m} \neq \underline{m}^2$. Alors $\underline{m}/\underline{m}^2$ est l'espace vectoriel sur le corps $k = A/\underline{m}$. Comme A est un anneau de valuation alors $\dim_k(\underline{m}/\underline{m}^2) = 1$.

Soit $\lambda \in \underline{m}$, $\lambda \notin \underline{m}^2$. Comme $\underline{m}^2 \subset A \lambda \subset \underline{m}$, alors de l'égalité $\dim_k(\underline{m}/\underline{m}^2)$ on obtient que $\underline{m} = A\lambda$.

D'après la proposition 9, ([3], pg. 109) A est un anneau de valuation discrète.

4) Tout anneau noethérien a la dimension Krull définie, et $K \dim A$ est non limite

5) Soit P l'ensemble des nombres premiers. Dans l'anneau $B = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ (\mathbb{Z}_p est l'anneau des entiers modulo p) nous considérons l'idéal $\underline{a} = \sum_{p \in P} \mathbb{Z}_p$.

Soit A le plus petit sous-anneau de B contenant \underline{a} et l'élément unité de B .

$$\text{Donc } A = \{n.1 + x \mid n \in \mathbb{Z}, x \in \underline{a}\}.$$

La caractéristique de l'anneau A est zero, alors $A/\underline{a} \cong \mathbb{Z}$. D'une manière analogue comme dans l'exemple de ([9] pg. 365) \underline{a} est un A -module semi-simple, donc $\underline{a} \in (\text{Mod } A)_0 \subset (\text{Mod } A)_1$.

Comme l' A -module A/\underline{a} appartient au sous-catégorie $(\text{Mod } A)_1$, alors $A \in (\text{Mod } A)_1$. Par suite A est un anneau avec la dimension Krull définie et $K \cdot \dim A = 1$.

Parce que \underline{a} est un A -module qui n'est pas finiment engendré, alors A est un anneau non-noethérien.

Soit A un anneau commutatif et $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ l'anneau de polynômes. Si M est un A -module nous notons avec $M[x_1, x_2, \dots, x_n]$ l' $A[x_1, \dots, x_n]$ -module $M \otimes_A A[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

LEMME 3.4. Si $M \in (\text{Mod } A)_0$ alors

$$M[x_1, x_2, \dots, x_n] \in (\text{Mod } A[x_1, x_2, \dots, x_n])_n.$$

DÉMONSTRATION. Si $M \in (\text{Mod } A)_0$ alors A est un A -module de torsion dans le sens de Dickson [6], [10].

On définit sur M une filtration de la manière suivante [9, § 5].

$M_0 = S_0(M)$ ($S_0(M)$ le socle de M), c'est-à-dire la somme de sous-modules simples de M ; si l'ordinal α a un prédécesseur β , on choisit M_α tel que $M_\alpha/M_\beta = S_0(M/M_\beta)$; si α est un ordinal limite, alors $M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta$.

Puisque $M \in (\text{Mod } A)_0$ il existe un ordinal α tel que $M = M_\alpha$; le plus petit ordinal avec cette propriété s'appelle « elevation » de M et on le note par $e_A(M)$.

Comme $A[x_1, \dots, x_n]$ est un A -module plat [1], alors : Si l'ordinal α a un prédécesseur β ,

$$M_\alpha[x_1, \dots, x_n]/M_\beta[x_1, \dots, x_n] \cong M_\alpha/M_\beta[x_1, \dots, x_n].$$

Si α est un ordinal limite,

$$M_\alpha[x_1, \dots, x_n] = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta[x_1, \dots, x_n]$$

Procédant par récurrence transfinie il suffit de vérifier le lemme pour M semi-simple [4].

Dans ce cas $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$ ou $(S_i)_{i \in I}$ est une famille des A -modules simple $S_i \cong A/\underline{m}_i$, \underline{m}_i idéal maximal, alors $M[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{i \in I} A/\underline{m}_i[x_1, \dots, x_n]$. Il est clair que l' $A[x_1, \dots, x_n]$ module $A/\underline{m}_i[x_1, \dots, x_n] \in (\text{Mod } A[x_1, \dots, x_n])_n$ ($i \in I$) et par suite $M \in (\text{Mod } A[x_1, \dots, x_n])_n$.

COROLLAIRE 3.3. Si A est un anneau semi-artinien [9] alors l'anneau des polynômes $A[x_1, \dots, x_n]$ a la dimension Krull définie et

$$K \cdot \dim A[x_1, \dots, x_n] = n.$$

En effet le A -module A appartient à $(\text{Mod } A)_0 = \text{Mod } A$. Alors d'après le lemme 3.4., $A[x_1, \dots, x_n] \in (\text{Mod } A[x_1, \dots, x_n])_n$, donc l'anneau $A[x_1, \dots, x_n]$ a la dimension Krull définie.

Grâce à la démonstration de lemme 3.4. il en résulte que

$$K \cdot \dim A[x_1, \dots, x_n] = n.$$

Université de Bucarest
Facultate de Matematica
Str. Academiei, nr. 14
Bucarest - Roumanie

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, chap. 1 et 2.
- [2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative* chap. 3 et 4.
- [3] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative* chap. 5 et 6.
- [4] N. BOURBAKI, chap. 8 : *Modules et anneaux semi-simples*, Paris, 1958.
- [5] P. GABRIEL, *De catégories abélienne*, Bull. Soc. Math. France, t. 90, 1962, p. 323-448.
- [6] S. DICKSON, *Decomposition of Modules II, Rings without chain condition*, Math. Z. 104 (1968), 349-357.
- [7] A. HUDRY, C. R. Acad. Sci. Paris t. 270, p. 925-928 (1970).
- [8] C. NĀSTĀSESCU, N. POPESCU, *Sur la structure des objets de certaines catégorie abéliennes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 262, 1966, p. 1295-1927.
- [9] C. NĀSTĀSESCU, N. POPESCU, *Anneau semi-artiniens*, Bull. Soc. Math. France, 7. 96, 1968, p. 357-368.
- [10] C. NĀSTĀSESCU, *Quelques remarques sur la dimension homologique des anneaux. Éléments réguliers*, Journal of Algebra, 19, N° 4, 1971.