

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

RAY REDHEFFER

**Abschätzung nach unten für Lösungen nichtlinearer
Differentialungleichungen**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 27,
n° 3 (1973), p. 441-456

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_441_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ABSCHÄTZUNG NACH UNTEN FÜR LÖSUNGEN NICHTLINEARER DIFFERENTIALUNGLEICHUNGEN

RAY REDHEFFER ⁽¹⁾

1. Fragestellung.

Es sei B ein Bereich im reellen Euklidischen Raum E_n , mit Punkten $x \in B$ und mit Rand ∂B . Es sei $u = u(x)$ eine positive Funktion der Klasse $D^2(B)$, die einer passenden partiellen Differentialungleichung in B genügt. Sind P und Q zwei Punkte aus B , so lässt sich bekanntlich $u(Q)$ oft nach unten durch $u(P)$ abschätzen. Diese Abschätzung hängt sowohl von der Geometrie von P , Q und B als auch von der Differentialungleichung ab. Es ist die Absicht der vorliegenden Arbeit, diese Abhängigkeit zu untersuchen.

Um das Problem genauer anzudeuten, sei $x = X(s)$ eine glatte Kurve, die P und Q verbindet; sei nämlich $0 \leq s \leq s_1$,

$$X(0) = P, \quad X(s_1) = Q, \quad |X'(s)| = 1.$$

Die geometrische Beschreibung der Lage von P , Q , X und B werde durch die Funktion $\varrho(s)$ festgelegt, wobei $\varrho(s)$ den Abstand von $X(s)$ zu ∂B bedeute:

$$(1a) \quad \varrho(s) = \inf_{x \in \partial B} |X(s) - x|.$$

Es gibt verschiedene zusätzliche Bedingungen, aus denen man schliessen kann, dass u einer lokalen Harnack'schen Ungleichung genügt [1], [3], [4], [5], [7], [8], [10]. Wenn das der Fall ist, lässt sich der gegebene Anfangswert $u(P)$ ohne weiteres in eine untere Schranke auf einer Kugel umwandeln. Dasselbe gilt auch, wenn u eine bekannte untere Schranke auf eine passende Fläche besitzt, und dabei darf diese Fläche sogar ein Teil vom Rand ∂B sein [7].

Pervenuto alla Redazione il 10 Gennaio 1972.

⁽¹⁾ Supported in part by NSF Grant GP-28240.

Wir setzen daher

$$(1b) \quad M(s) = \inf u(x) \text{ für } |X(s) - x| < \frac{1}{2} \varrho(s)$$

und versuchen, $M(s)$ durch $M(0)$ abzuschätzen. Die Funktionen $\varrho(s)$ und $M(s)$ sollen stets die hier angegebene Bedeutung haben.

2. Die Differentialungleichung.

Um die Differentialungleichung einzuführen setzen wir

$$u' = \text{Vektor} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \quad u'' = \text{Matrix} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

Ferner ist $a = a(x, p)$ eine reelle, symmetrische $n \times n$ Matrix-funktion, die auch manchmal als eine Vektorfunktion der Dimension n^2 aufgefasst wird. Das Skalarprodukt zweier Vektoren u, v derselben Dimension wird als uv geschrieben, und insbesondere gilt nach der oben gemachten Bemerkung

$$au'' = \sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ist ξ ein n -Vektor, so ist $\xi a \xi$ eine quadratische Form, insbesondere hat man also

$$c' a c' = \sum a_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_j}$$

für $c = c(x) \in D^1(B)$. Bei $c(x) = \frac{1}{2} |x|^2$ ist $c'(x) = x$, und daher definieren wir

$$x' = \text{Einheitsmatrix, } ax' = \text{Spur } a.$$

Die zugrundgelegte Differentialungleichung lautet in dieser Schreibweise

$$(2a) \quad a(x, u') u'' \leq \varepsilon_1^2 u + \varepsilon_2 |u'|, \quad u \geq 0$$

mit

$$(2b) \quad a(x, p) \geq 0, \quad pa(x, p)p \geq |p|^2, \quad x' a(x, p) \leq \varepsilon_0.$$

Dabei sind ε_k konstant, $\varepsilon_0 \geq 1$, $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$, und es ist $p = u'(x)$. Die

zweite Bedingung (2b) stammt aus der frühen Arbeit von Bernstein und ist neuerdings von Serrin gründlich untersucht worden [9]. Sie ist wesentlich allgemeiner als die gleichmässige Elliptizität, $\xi a(x, p) \xi \geq |\xi|^2$.

3. Ergebnisse.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

und werden beweisen :

SATZ 1. *Es seien ϱ und M durch (1) erklärt, und sei u eine Lösung von (2). Dann ist*

$$M(s) \geq M(0) e^{-\varepsilon_0 E(s) - \varepsilon L(s)}, \quad 0 \leq s \leq s_1,$$

mit

$$E(s) = \int_0^s \frac{2 + \varrho'(s)}{\varrho(s)} ds, \quad L(s) = \int_0^s [2 + \varrho'(s)] ds.$$

Offenbar ist $|\varrho(s) - \varrho(t)| \leq |s - t|$, daher ist ϱ absolut stetig, und es gilt $|\varrho'(s)| \leq 1$ in den Punkten s , wo $\varrho'(s)$ existiert. Daraus folgt

$$\int_0^s \frac{ds}{\varrho(s)} \leq E(s) \leq 3 \int_0^s \frac{ds}{\varrho(s)}, \quad \int_0^s ds \leq L(s) \leq 3 \int_0^s ds.$$

Durch $E(s)$ wird die « Enge » und durch $L(s)$ wird die « Länge » des Weges gekennzeichnet, der P mit Q verbindet. Merkwürdig ist die Tatsache, dass ε_0 nur mit E und ε nur mit L in Satz 1 verbunden ist.

Die Ungleichung $\Delta u \leq \varepsilon_1^2 u + \varepsilon_2 |u_1|$ im Gebiet $|x_2| < \varrho_0$ für $n = 2$ führt zum Ergebnis, dass Satz 1 bezüglich der Koeffizienten ε_1 und ε_2 scharf ist. Das heisst, $\varepsilon L(s)$ lässt sich nicht durch $(\alpha \varepsilon_1 + \beta \varepsilon_2) L(s)$ ersetzen, wenn α und β absolute Konstanten sind mit $\alpha < 1/2$ oder $\beta < 1/2$. Eine entsprechende Schärfe bezüglich ε_0 folgt aus (12) in Zusammenhang mit [2].

Manchmal besteht (2) nicht im ganzen Gebiet B , sondern nur in den Punkten $x \in B$, wo die Bedingungen

$$(3) \quad |u(x)| < M_1, \quad |u'(x)| < M_2$$

für gewisse positive Konstanten M_1 und M_2 gelten. Wir behaupten folgenden

ZUSATZ 1. Es gelte die Voraussetzung (2) bei Satz 1 nur unter den zusätzlichen Bedingungen (3). Sei M_0 durch

$$M_0 = \min \left(M(0), M_1, M_2 \frac{\varrho(0)}{2\varepsilon_0 + 2\varepsilon\varrho(0)} \right)$$

definiert. Dann ist die Behauptung von Satz 1 immer noch gültig, mit M_0 statt $M(0)$.

Es wird sich herausstellen, dass der Beweis einen allgemeineren und schärferen Satz liefert, der jetzt erläutert wird. Statt (2) sei

$$(4a) \quad a(x, u') u'' \leq e_1^2 u + e_2 |u'|, \quad u \geq 0$$

$$(4b) \quad a(x, p) \geq 0, \quad pa(x, p) p \geq |p|^2, \quad x' a(x, p) \leq e_0$$

wobei $e_k = e_k(x)$ positive Funktionen von x sind. Es seien $\varepsilon_k = \varepsilon_k(s)$, $k = 0, 1, 2$, durch

$$(4c) \quad \varepsilon_k(s) = \sup e_k(x) \text{ für } |X(s) - x| < \varrho(s)$$

erklärt, weiter sei zur Abkürzung

$$\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)}{2}$$

gesetzt.

Dann gilt folgender

SATZ 2. Es seien ϱ und M durch (1) erklärt, weiter sei M_0 irgendeine Zahl, für die $M_0 \leq M(0)$. Ist u eine Lösung von (4), dann gilt

$$M(s) \geq M_0 e^{-m_0(s)} e^{-m(s)}, \quad 0 \leq s \leq s_1,$$

wobei

$$m_0(s) = \int_0^s \frac{2 + \varrho'(s)}{\varrho(s)} \varepsilon_0(s) ds,$$

$$m(s) = \int_0^s [2 + \varrho'(s)] \varepsilon(s) ds.$$

Die Einführung von M_0 statt $M(0)$ ist nützlich, weil sie eine einfache Formulierung des folgenden Zsatzes erlaubt.

ZUSATZ 2. Die Bedingungen (4) bei Satz 2 werden nur in den Punkten $x \in B$ benutzt, für die gilt:

$$\begin{aligned} |X(s) - x| &< \varrho(s), \quad u(x) < M_0 e^{-m_0(s)} e^{-m(s)}, \\ |u'(x)| &< 2M_0 e^{-m_0(s)} e^{-m(s)} \left(\frac{\varepsilon_0(s)}{\varrho(s)} + \varepsilon(s) \right). \end{aligned}$$

4. Beweis von Satz 1.

Die Wahl $e_k(x) = \varepsilon_k$ in Satz 2 ergibt Satz 1. Aus $|\varrho'(s)| \leq 1$ folgt weiter

$$(5a) \quad \int_0^s \frac{\varepsilon_0(s)}{\varrho(s)} ds \leq m_0(s) \leq 3 \int_0^s \frac{\varepsilon_0(s)}{\varrho(s)} ds,$$

$$(5b) \quad \int_0^s \varepsilon(s) ds \leq m(s) \leq 3 \int_0^s \varepsilon(s) ds.$$

Um den Zusatz zu beweisen, sei T durch

$$T\Phi(s) = \Phi(s) \exp \left\{ - \int_0^s \Phi(s) ds \right\}, \quad 0 \leq s \leq s_1$$

erklärt, wobei $\Phi(s)$ absolut stetig ist. Die Bedingungen von Zusatz 2 lassen sich wegen (5) durch die schwächere Bedingungen

$$(6) \quad x \in B, u(x) < M_0, \quad |u'(x)| < 2M_0 \left\{ T \frac{\varepsilon_0(s)}{\varrho(s)} + T\varepsilon(s) \right\}$$

ersetzen. Ist nun $\Phi > 0$, $\Phi' \leq \Phi^2$, dann ist $T\Phi(s)$ eine nichtwachsende Funktion von s , und daher ist insbesondere $T\Phi(s) \leq \Phi(0)$. Bei $\Phi(s) = \varepsilon_0/\varrho(s)$, mit $\varepsilon_0 \geq 1$ konstant, gilt

$$|\Phi'| \leq \frac{\varepsilon_0}{\varrho^2(s)} = \frac{\Phi^2}{\varepsilon_0} \leq \Phi^2.$$

Somit lässt sich (6) bei konstantem ε_0 und ε durch die Bedingung

$$x \in B, \quad u(x) < M_0, \quad |u'(x)| < 2M_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varrho(0)} + \varepsilon \right)$$

ersetzen, und daraus folgt Zusatz 1.

5. Zwei Lemmata.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir im folgenden voraus, dass $\varepsilon_1 > 0$ ist.

LEMMA 1. Es sei $\mu(t)$ eine Funktion für die

$$\mu'' + (\varepsilon_0 - 1) \frac{\mu'}{t} + \varepsilon_2 \mu' \geq \varepsilon_1^2 \mu, \quad \mu' \leq 0, \quad \mu \geq 0$$

in $0 < r_0 \leq t \leq r_1$ gilt. Es sei $u(x)$ für $r_0 \leq |x| \leq r_1$ stetig und es gelte (2) in den Punkten x , für die

$$r_0 < |x| < r_1, \quad u(x) < \mu(|x|), \quad |u'(x)| = -\mu'(|x|).$$

Es sei weiter $u(x) \geq \mu(|x|)$ für $|x| = r_0$ und für $|x| = r_1$. Dann ist

$$u(x) \geq \mu(|x|), \quad r_0 \leq |x| \leq r_1.$$

Zum Beweis setzen wir $c = c(x) = |x|$. Wenn die Behauptung falsch ist, dann hat die Funktion $u(x) - \mu(c)$ ein Minimum im Ringgebiet $r_0 < |x| < r_1$. In dem Punkt x , in dem das Minimum angenommen wird, gilt $0 \leq u \leq \mu(c)$, $u' = \mu'(c) c'$ und auch

$$au'' \geq \mu'(c) ac'' + \mu''(c) c' ac',$$

wobei $a = a(x, u') = a(x, \mu'(c) c')$. Offenbar ist

$$ac'' = \frac{x' a}{|x|} - \frac{xax}{|x|^3},$$

und daher wegen (2b)

$$au'' \geq \mu'(c) \left(\frac{\varepsilon_0}{|x|} - \frac{1}{|x|} \right) + \mu''(c).$$

Andererseits ist in x

$$\varepsilon_1^2 u + \varepsilon_2 |u'| < \varepsilon_1^2 \mu(c) - \varepsilon_2 \mu'(c).$$

Die Ungleichung für μ führt zu einem Widerspruch an der Stelle $t = c = |x|$.

LEMMA 2. Die Ungleichung von Lemma 1 besitzt eine Lösung μ , für die gilt

$$\mu(r_0) = 1, \quad \mu(2r_0) = 0, \quad \mu'(r_0) > -\frac{\varepsilon_0}{r_0} - 2\varepsilon.$$

Es stellt sich heraus, dass die Lösung $\mu(t)$ von

$$\mu'' + \frac{\varepsilon_0 - 1}{r_0} \mu' + \varepsilon_2 \mu' = \varepsilon_1^2 \mu, \quad \mu(r_0) = 1, \quad \mu(2r_0) = 0$$

die Bedingung $\mu'(t) < 0$ erfüllt. Diese Funktion μ genügt daher der Ungleichung von Lemma 1. Mit

$$2p = \frac{\varepsilon_0 - 1}{r_0} + \varepsilon_2, \quad q^2 = p^2 + \varepsilon_1^2, \quad q > 0$$

ist ferner

$$\mu'(r_0) = -p - q \frac{e^{2r_0 q} + 1}{e^{2r_0 q} - 1}.$$

Aus der Ungleichung

$$t \frac{e^t + 1}{e^t - 1} \leq t + 2$$

mit $t = 2r_0 q$ folgt dann

$$\mu'(r_0) \geq -p - q - \frac{1}{r_0} > -2p - \varepsilon_1 - \frac{1}{r_0},$$

was zu beweisen war.

6. Beweis von Satz 2.

Wir setzen zunächst voraus, dass u im abgeschlossenen Bereich \bar{B} stetig ist und verwenden Lemma 1 mit μ aus Lemma 2 im Ringgebiet

$$\frac{1}{2} \varrho(s) < |X(s) - x| < \varrho(s).$$

Bei festem s denken wir uns den Nullpunkt so gewählt, dass $X(s) = 0$ ist. Aus Lemma 1 und aus der Konvexität der Funktion μ folgt dann

$$u(x) \geq M(s) \mu(|x|) \geq M(s) [1 + \mu'(r_0) (|x| - r_0)]$$

für $r_0 < |x| < r_1$. Daraus erhält man für kleines $\Delta s > 0$

$$M(s + \Delta s) \geq M(s) \left[1 + \mu'(r_0) \left(\Delta s + \frac{1}{2} \Delta \varrho \right) \right],$$

wobei $\Delta \varrho = \varrho(s + \Delta s) - \varrho(s)$ bedeute. Aus der Abschätzung für $\mu'(r_0)$ in Lemma 2 schliessen wir auf

$$(7) \quad \frac{1}{M} \frac{dM}{ds} \geq - \left[2 \frac{\varepsilon_0(s)}{\varrho(s)} + 2\varepsilon(s) \right] \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d\varrho}{ds} \right).$$

Die Behauptung folgt durch Integration, und zwar mit $M_0 = M(0)$.

Jetzt wenden wir uns dem Zusatz 2 zu. Da $|\mu'(t)| \leq |\mu'(r_0)|$ für $r_0 < t$, zeigt Lemma 1, dass die Gleichung (4) beim Beweis von (7) nur in den Punkten x benutzt wird, wo

$$\frac{1}{2} \varrho(s) < |X(s) - x| < \varrho(s)$$

und

$$(8) \quad u(x) \leq M(s), \quad |u'(x)| \leq 2M(s) \left(\frac{\varepsilon_0(s)}{\varrho(s)} + \varepsilon(s) \right)$$

gilt. (Dabei ist wieder die Abschätzung für $\mu'(r_0)$ aus Lemma 2 verwendet worden). Sei nun

$$N(s) = M_0 e^{-m_0(s)} e^{-m(s)},$$

wobei m und m_0 dieselben Funktionen sind, die in Satz 2 auftreten. Ist $M(s) \leq N(s)$ im Punkt s , dann sind die Bedingungen (8) mit denen von Zusatz 2 verträglich, und wir können wieder die Gültigkeit von (7) an der Stelle s behaupten. Das zeigt, dass

$$\frac{1}{M} \frac{dM}{ds} \geq \frac{1}{N} \frac{dN}{ds}$$

in den Punkten s gilt, wo $M(s) \leq N(s)$ ist. Daraus folgt wieder $M(s) \geq N(s)$, $0 \leq s \leq s_1$, wovon man sich durch eine leichte Überlegung überzeugen kann.

Wir müssen uns ist. noch von der Voraussetzung lösen, dass u in \bar{B} stetig. Das geschieht wie folgt: Man ersetzt $\varrho(s)$ durch $\theta \varrho(s)$, mit $0 < \theta < 1$. Aus $\theta \rightarrow 1$ — in der entsprechenden unteren Schranke $N(\theta, s)$ folgt dann die gewünschte Behauptung. Durch dieselbe Methode kann man $\varrho(s)$ durch eine glatte Approximation $\varrho(s, \theta)$ ersetzen. Daher ist die Tatsache, dass $\varrho(s)$ nicht überall differenzierbar, sondern nur absolut stetig ist, nicht in den obigen Beweisen betont worden.

7. Beispiele.

Bisher war vorausgesetzt, dass $\varrho(s)$ stets den Abstand von $X(s)$ zu ∂B bedeutet. Vom Beweis her sieht man leicht, dass $\varrho(s)$ in Satz 2 eine

beliebige absolut stetige Funktion sein kann, wenn nur

$$(9) \quad \varrho(s) > 0, \quad 2 + \varrho'(s) \geq 0 \quad (0 \leq s \leq s_1).$$

Die Behauptung von Satz 1 lässt sich in der Form

$$(10) \quad M(s) \geq M(0) \left[\frac{\varrho(s)}{\varrho(0)} e^{2h} \right]^{-s_0} \left[\frac{e^{\varrho(s)}}{e^{\varrho(0)}} e^{2s} \right]^{-s}$$

umschreiben, wobei

$$h(s) = \int_0^s \frac{ds}{\varrho(s)}.$$

Das folgt auch für beliebes $\varrho(s)$ unter der zusätzlichen Bedingung (9), die nach wie vor unentbehrlich ist.

Wir setzen nun

$$\varrho(s) = \varrho_0 + (\varrho_1 - \varrho_0) \frac{s}{s_1}, \quad 0 \leq s \leq s_1,$$

wobei ϱ_0 , ϱ_1 und s_1 positive Konstanten sind. Es sei ferner

$$\lambda = \varrho_1 - \varrho_0 + 2s_1 \geq 0.$$

Dann ist nach (10)

$$(11) \quad M(s_1) \geq M(0) A(\varrho_0, \varrho_1)^{-s_0} e^{-s_1 \lambda}$$

mit

$$A(\varrho_0, \varrho_1) = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho_1} \right)^{1/(\varrho_0 - \varrho_1)} \quad (\varrho_0 \neq \varrho_1)$$

$$A(\varrho_0, \varrho_0) = e^{1/\varrho_0} \quad (\varrho_0 = \varrho_1).$$

Falls die Kurve $x = X(s)$ eine Strecke ist, dann kann dieses Ergebnis in jedem konvexen Bereich B benutzt werden, der die Kugel $|x - X(0)| < \varrho_0$, $|x - X(s_1)| < \varrho_1$ enthält. Mit $s_1 \rightarrow 0$ + erhält man

$$(12) \quad \frac{M_1}{M_0} \geq \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0} \right)^{-s_0} \left(\frac{e^{\varrho_1}}{e^{\varrho_0}} \right)^{-s}, \quad \varrho_1 \geq \varrho_0,$$

wobei

$$M_k = \sup u(x) \quad \text{für} \quad |x - X(0)| < \frac{1}{2} \varrho_k \quad (k = 0, 1)$$

und (4) für $|x - X(0)| < \varrho_1$ gilt. Wählt man $\varrho_1 = \varrho(0)$, dann sieht man, dass kein Verlust an Allgemeinheit dadurch aufgetreten ist, dass man $M(0)$

anstatt M_0 als Anfangswert in den Sätzen 1, 2 verwendet hat. Das Ergebnis (12) ist ziemlich scharf [2].

Bemerkenswert ist auch der Fall

$$(13) \quad M(s_1) \geq M(0) \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0} \right)^{-3s_0} e^{-3s_1} \quad (\varrho_0 + s_1 = \varrho_1).$$

Dieser Fall entsteht, wenn die Kurve $x = X(s)$ eine Strecke ist und die Kugel $|X(0) - x| < \varrho_0$ in der Kugel $|X(s_1) - x| < \varrho_1$ liegt und diese berührt.

Als weiteres Beispiel sei $x_0 \in \partial B$, $|y_0| = 1$, $r_0 > 0$ und $0 < \theta < \pi/2$. Wir setzen $x_r = x_0 + ry_0$ und nehmen an, dass die Menge

$$\{x \mid |x - x_r| < r \sin \theta\}, \quad 0 < r \leq r_0$$

in B enthalten ist. (x_0 ist also die Spitze eines teilweise in B liegenden Kegels mit dem Öffnungswinkel 2θ). Es sei nun

$$M[r] = \inf u(x) \quad \text{für} \quad |x - x_r| < \frac{1}{2} r \sin \theta.$$

Setzt man in (11)

$$s_1 = r_0 - r, \quad \varrho_0 = r_0 \sin \theta, \quad \varrho_1 = r \sin \theta, \quad (14)$$

dann folgt aus (2)

$$\liminf_{r \rightarrow 0+} r^{(1-2\cos\theta)s_0} M[r] > 0,$$

wenn nur $u(P) > 0$ in einem Punkt $P \in B$ gilt. Vertauscht man in (14) ϱ_0 und ϱ_1 , so gilt

$$\limsup_{r \rightarrow 0+} r^{(1+2\cos\theta)s_0} M[r] < \infty.$$

Es sei nun $\varrho(s)$ die in (11) auftretende Funktion, $0 \leq s \leq s_1$. Wir setzen weiter

$$\varrho(s) = \varrho_1 + (\varrho_0 - \varrho_1) \frac{s}{2s_1}, \quad s_1 \leq s \leq 2s_1.$$

Wendet man (11) zweimal an, wobei einmal ϱ_0 und ϱ_1 vertauscht werden, dann ergibt sich

$$(15) \quad M(2s_1) \geq M(0) A(\varrho_0, \varrho_1)^{-4s_0 s_1} e^{-4s_1},$$

wenn nur $2s_1 \geq |\varrho_0 - \varrho_1|$ ist. Da $A(\varrho_0, \varrho_1) = A(\varrho_1, \varrho_0)$ ist, ändert sich (15) bei Vertauschung von ϱ_1 und ϱ_0 nicht. Eine ähnliche Symmetrieeigenschaft ist auch in der allgemeinen Formel (10) erkennbar.

Der Fall $\varrho_1 \ll \varrho_0$ in (15) entspricht ungefähr einem Loch, durch das die Kurve $x = X(s)$ läuft. Bei linearem $X(s)$ ist ein Loch genauer dadurch gekennzeichnet, dass

$$\varrho(s) = [\varrho_1^2 + (s_1 - s)^2]^{1/2}, \quad 0 \leq s \leq 2s_1.$$

Bei diesem ϱ gilt nach (10)

$$M(2s_1) \geq M(0) \left[\frac{s_1 + (\varrho_1^2 + s_1^2)^{1/2}}{\varrho_1} \right]^{-4s_0} e^{-4s_0 s_1}.$$

8. Drei Anwendungen.

Der folgende Satz verschärft den Teil von Satz 2 in [2], der sich auf den Fall $n \geq 2$ bezieht.

KOROLLAR 1. *Es gelte (2) in $|x| < 1$, und es sei $u(x) \geq 1$ in einer in $|x| < 1$ liegenden Kugel vom Radius ϱ_0 . Dann ist*

$$u(x) > \left(\frac{\varrho_0}{2} \right)^{3s_0} e^{-5s_0} (1 - |x|), \quad |x| < 1.$$

Zum Beweis nehmen wir an, dass $u(x) \geq 1$ in einer Kugel $|x - x_0| < \varrho_0$, die $|x| = 1$ berührt. (Dies ist offenbar der schlimmste Fall). Aus (13) mit

$$\varrho(s) = \varrho_0 + s, \quad 0 \leq s \leq 1 - \varrho_0$$

folgt

$$u(x) \geq \varrho_0^{3s_0} e^{-3s_0(1-\varrho_0)}, \quad |x| < \frac{1}{2}.$$

Für $1/2 < |x| < 1$ ergibt [2] Lemma 3 den zusätzlichen Faktor

$$2^{-s_0} e^{-(s_0+2s)} (1 - |x|),$$

und daraus folgt Korollar 1.

Für das nächste Ergebnis benötigen wir eine zweiseitige Ungleichung

$$(16) \quad -b(x)|u'| \leq a(x, u')u'' \leq \varepsilon_1^2|u| + \varepsilon_2|u'|.$$

Dabei sollen die Bedingungen (2b) immer noch gelten, und $b(x)$ soll eine beliebige in $|x| < 1$ stetige Funktion sein.

KOROLLAR 2. (Nach Serrin). *Sei u eine positive Lösung von (16) für $|x| < 1$, $n = 2$. Dann ist*

$$u(x) \geq e^{-9\varepsilon_0} e^{-3\varepsilon} u(0), \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Zum Beweis sei $u(0) = 1$ und $\theta < 1$. Wegen des Maximumprinzips gibt es eine glatte Kurve K , die von $x = 0$ bis zum Rand $|x| = \theta$ verläuft, derart, dass $u(x) > \theta$ auf K ist [7]. Das folgende sollte eigentlich zunächst für $\theta < 1$ ausgeführt werden, und dann erst sollte man in der so gefundenen Schranke $\theta = 1$ setzen. Aus Stetigkeitsgründen jedoch läuft das auf dasselbe hinaus, wenn man gleich am Anfang mit $\theta = 1$ arbeitet. Der Einfachheit halber setzen wir also $u \geq 1$ auf einer glatten Kurve K voraus, die $x = 0$ mit $x = 1$ verbindet.

Ist K durch $x = X(s)$, $0 \leq s \leq s_1$, gegeben, dann sei K_t die Kurve $x = X(s)$, $0 \leq s \leq t$. Der Radius des Spann. kreises dieser Kurve ist bei $t = s_1$ mindestens $1/2$. Von $t = 0$ ausgehend, sei t_0 der erste Punkt, für den $R_t = 1/2$. So erhält man einen Kreis $C: |x - x_0| = 1/2$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $|x_0| \leq 1/2$
- (2) $u(x) \geq 1$ auf einer glatten Kurve K , die C als Spannkreis besitzt.

Nun brauchen wir den folgenden Hilfsatz:

LEMMA 3. *Es sei u eine Lösung von (2) für $|x| < r_0 \leq 1$, $n = 2$, und $|x| = r_0$ sei der Spannkreis einer glatten Kurve K , auf der $u(x) \geq 1$. Dann ist*

$$u(x) \geq \frac{3}{8} e^{-5\varepsilon_0} e^{-5\varepsilon r_0/2}, \quad |x| \leq \frac{1}{4} r_0.$$

Das Ergebnis ist im Beweis von Lemma 6 in [2] enthalten.

Die Wahl $\varrho_0 = r_0/2$, $\varrho_1 = 1$, $s_1 = |x_0| \leq r_0$ bei (11) ergibt folgendes: Es sei u eine Lösung von (2) für $|x| < 1$, und es gelte $u(x) \geq 1$ für $|x - x_0| \leq r_0/4$, wobei $|x_0| \leq r_0 \leq 1/2$. Dann ist für $|x| < 1/2$

$$(17) \quad u(x) \geq \left(\frac{r_0}{2}\right)^{\varepsilon_0(2+3r_0)/(2-r_0)} e^{-\varepsilon(2+3r_0)/2}.$$

Korollar 1 erhält man nun folgendermassen: Man setzt $r_0 = 1/2$ und bildet

das Produkt der Schranke aus Lemma 3 mit der Schranke (17). Das ergibt nämlich

$$u(x) \geq \frac{3}{8} e^{-5\varepsilon_0} e^{-3\varepsilon} 4^{-7\varepsilon_0/3}, \quad |x| \leq 1/2.$$

Die Wahl $|x| \leq r_0/4$ in Lemma 3, anstatt z.B. $|x| \leq r_0/2$, ist dadurch motiviert, dass durch $|x| \leq r_0/4$ der Koeffizient von $-\varepsilon$ möglichst klein gemacht wird.

Das Problem der Bestimmung der Konstanten im Satz von Serrin ist auch von Protter und Weinberger in Angriff genommen worden [6]. Ihr Ergebnis liefert das folgende: Es sei $n = 2$,

$$(17a) \quad u \geq 0, \quad a(x) u'' = b(x) u + a(x) u', \quad |x| < 1,$$

wobei $\xi a(x) \xi \geq |\xi|^2$ ist und entsprechend (2b)

$$(17b) \quad a(x) \geq 0, \quad \|a(x)\| \leq \varepsilon_0, \quad 0 \leq b(x) \leq \varepsilon_1^2, \quad |c(x)| \leq \varepsilon_2$$

gilt. Dann ist

$$u(x) \geq e^{-7\alpha/12} (e^{\alpha/51} - 1) u(0), \quad |u| \leq 1/2,$$

mit

$$(18) \quad \alpha = [165,888 (\varepsilon_0^2 + \varepsilon_2^2) + 288 \varepsilon_1^2]^{1/2}.$$

Aus Korollar 1 dagegen folgt für das Problem (17)

$$u(x) \geq e^{-\beta} u(0), \quad \beta = 9\sqrt{2} \varepsilon_0 + \frac{3}{2} \varepsilon_1 + \frac{3}{2} \varepsilon_2.$$

Eine etwas schwächere Form von Korollar 1 lässt sich ohne Benutzung des Spannkreises beweisen. Wir wollen kurz andeuten, wie das geht. Wie in [6] und [7] sei $u(x) \geq 1$ auf einer Kurve, die $(0,0)$ mit $(0,1)$ verbindet. Weiter sei [6]

$$c^+(x) = \frac{3}{4} - x_1 - 3 \left(x_2 - \frac{1}{2} \right)^2,$$

$$c^-(x) = \frac{3}{4} + x_1 - 3 \left(x_2 - \frac{1}{2} \right)^2,$$

$$M = \{x \mid c^+(x) > 0, \quad c^-(x) > 0\}.$$

Bei $c = c^+$ oder c^- gilt für $x \in M$

$$c \leq \frac{7}{4}, \quad |c'| \geq 1, \quad c'' \geq -6x'.$$

Wir setzen $\beta = 6\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ und ersetzen (2a) durch die schwächere Ungleichung

$$(19) \quad a(x, u') u'' \leq \varepsilon_1 \beta u + \varepsilon_2 |u'|.$$

Bei $v = e^{\beta c} - 1$, $\lambda = \beta e^{\beta c}$ gilt

$$av'' \geq \lambda(\beta |c'| - 6\varepsilon_0), \quad \varepsilon_1 \beta v + \varepsilon_2 |v'| < \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 |c'|),$$

und daher genügt v der umgekehrten Ungleichung (19) und zwar mit $>$ anstatt \geq . Nach der Methode von Serrin [6], [7] schliessen wir auf

$$u(x) \geq \frac{e^{\beta c} - 1}{e^{7\beta/4} - 1} \geq \frac{4}{7} c e^{\beta(c-7/4)}, \quad x \in M.$$

Daraus folgt

$$(20) \quad u(x) \geq \frac{4}{7} \left(\frac{2}{3} - 3r^2 \right) e^{-(13/12+3r^2)\beta}$$

im Kreis $x_1^2 + (x_2 - 1/2)^2 = r^2$.

Jetzt wird (2a) statt (19) benutzt. Aus (11) mit $\varrho_0 = 2r$, $\varrho_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 1/2$ folgt

$$u(x) \geq M_r (2r)^{2\varepsilon_0(1-r)/(1-2r)} e^{-2\varepsilon(1-r)}, \quad |x| < \frac{1}{2},$$

wobei M_r durch (20) gegeben ist. Die Wahl $r = 1/6$ macht den Koeffizienten von ε zum Minimum und ergibt

$$u(x) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{5\varepsilon_0/2} e^{-7\varepsilon_0} e^{-4\varepsilon}, \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$

Das ist nur wenig schwächer als Korollar 1.

Zum Schluss betrachten wir einen Fall, bei dem das Maximumprinzip nicht gilt. Es sei

$$(21) \quad -\delta_1^2 |u| - \delta_2 |u'| \leq a(x, u') u'' \leq \varepsilon_1^2 u + \varepsilon_2 |u'|.$$

Dabei seien die $\delta_k \geq 0$ konstant und es sollen immer noch die Bedingungen (2b) gelten. Wir setzen

$$\delta = \frac{1}{2\delta_2} \log \left[1 + \frac{\delta_2}{2\delta_1} \right],$$

falls dieser Ausdruck $< 1/4$ ist, sonst $\delta = 1/4$. Bei $\delta_2 = 0$ ist $4\delta = \min(1, 1/\delta_1)$.

KOROLLAR 3. Es sei u eine positive Lösung von (21) für $|x| < 1$, $n = 2$. Dann ist

$$u(x) \geq \frac{1}{3} e^{-5\varepsilon_0} e^{-3\varepsilon} \delta^{3\varepsilon_0} u(0), \quad |x| \leq 1/2.$$

Wir wollen den Beweis nur andeuten. Sei $r_0 = 2\delta$. Aus Satz 1 in [2] folgt $u(x) \geq u(0)/2$ auf einer glatten Kurve K , die den Nullpunkt mit dem Kreis $|x| = 2r_0$ verbindet. Wir wenden zuerst Lemma 3 und danach (11) an. Daraus ergibt sich

$$u(x) \geq \frac{3}{16} e^{-5\varepsilon_0} e^{-\varepsilon(1+4r_0)} \left(\frac{r_0}{2}\right)^{\varepsilon_0(2+3r_0)/(2-r_0)}$$

für $|x| \leq 1/2$. Diese Ungleichung ist schärfer als das gewünschte Ergebnis.

s. Z. Universität Karlsruhe

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BONY, J. M. *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 19, 1 (1969), 277-304.
- [2] DELL, R., REDHEFFER, R. *Sharp Lower Bounds for Solutions of Nonlinear Differential Inequalities*. Math. Z. 127, 199-216 (1972).
- [3] HABETHA, K. *Über eine Integraldarstellung und das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip bei elliptischen Differentialgleichungen*. Math. Annalen 165, 91-110 (1966).
- [4] LADYZHENSKAYA, O. A., URAL'TSEVA, N. N. *Local estimates for gradients of solutions of nonuniformly elliptic and parabolic equations*. Comm. Pure Appl. Math., XXII, 677-703 (1970).
- [5] MOSER, J. *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*. Comm. Pure Appl. Math. 14, 577-591 (1961).
- [6] PROTTER, M. WEINBERGER, H., *Maximum principles in differential equations*. Prentice, Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1967).
- [7] SERRIN, J. *On the Harnack inequality for linear elliptic equations*. Jour. d'Anal. Math. 4 292-308 (1956).
- [8] SERRIN, J. *A Harnack inequality for nonlinear equations*. Bull. Amer. Math. Soc., 69, 481-486 (1963).
- [9] SERRIN, J. *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables*. Phil. Trans. Roy. Soc. London 264, 413-496 (1969).
- [10] TRUDINGER, NEIL, S. *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*. Comm. on Pure and Applied Math. XX, 721-747 (1967).