

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

LIVIO C. PICCININI

SERGIO SPAGNOLO

**Una valutazione della regolarità delle soluzioni di sistemi  
ellittici variazionali in due variabili**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 27,*  
n° 3 (1973), p. 417-429

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1973\\_3\\_27\\_3\\_417\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_3_417_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UNA VALUTAZIONE DELLA REGOLARITÀ DELLE SOLUZIONI DI SISTEMI ELLITTICI VARIAZIONALI IN DUE VARIABILI

di LIVIO C. PICCININI e SERGIO SPAGNOLO (\*)

## 1. Introduzione.

Proseguendo la ricerca iniziata in [6] limitatamente alle equazioni ellittiche su  $R^2$ , viene qui studiata la regolarità delle soluzioni di un sistema ellittico di tipo variazionale  $E$  su un aperto di  $R^2$ . Se il coefficiente di ellitticità di un tale sistema viene indicato con  $L$  ( $L$  è definito dalla (3) e risulta  $L \geq 1$ ) è ben noto che tutte le soluzioni  $u$  di  $Eu = 0$  sono localmente hölderiane con esponente di Hölder  $1/2L$  (Morrey [4] e [5]).

In questa nota viene migliorata la valutazione di Morrey fino a ottenere il migliore esponente possibile, cioè  $1/\sqrt{L}$ ; è da notare che questo esponente non dipende dal numero delle equazioni che compongono il sistema e quindi non differisce da quello già ottenuto in [6] per il caso di una sola equazione. Ricordiamo che su  $R^n$  con  $n \geq 3$  le soluzioni di un sistema di  $n$  equazioni non sono in generale neppure limitate (De Giorgi [2]).

Passando poi al caso non omogeneo, viene qui dimostrato che ogni soluzione  $u$  di  $Eu = \operatorname{div} f$ , con

$$r^{-2\mu} \int_{|x-x_0| \leq r} |f|^2 dx \leq C(f) < +\infty \quad (\mu > 0)$$

per ogni  $x_0$  ed ogni  $r > 0$ , è localmente hölderiana con esponente  $\alpha$ , dove  $\alpha = \min(1/\sqrt{L}, \mu)$  se  $\mu \neq 1/\sqrt{L}$ , mentre  $\alpha$  è un qualunque numero minore di  $1/\sqrt{L}$  se  $\mu = 1/\sqrt{L}$ . Anche in questo caso, questa è la miglior valutazione

---

Pervenuto alla Redazione il 2 Luglio 1972.

(\*) Lavoro eseguito con finanziamento del C. N. R. nell'ambito del G. N. A. F. A..

Indirizzo degli autori: Livio C. Piccinini: Scuola Normale Superiore, PISA; Sergio Spagnolo: Istituto di Matematica per Ingegneri, CAGLIARI.

possibile dell'esponente di Hölder in funzione del coefficiente di ellitticità, come mostrano gli esempi alla fine della nota.

## 2. Il caso omogeneo.

**TEOREMA 1.** *Sia  $U$  un aperto limitato di  $R^2$  ed  $(u_1, \dots, u_N) \in [H_{\text{loc}}^1(U)]^N$  una soluzione su  $U$  del sistema di equazioni differenziali*

$$(1) \quad \sum_{k=1}^N \operatorname{div} (A^{hk}(x) \nabla u_k) = 0 \quad (h = 1, \dots, N)$$

dove  $A^{hk}(x)$  sono  $N^2$  matrici  $2 \times 2$  di funzioni misurabili verificanti per ogni  $x \in U$  le condizioni seguenti:

$$(2) \quad A^{hk}(x) = [A^{kh}(x)]^*$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^N |\xi_k|^2 \leq \sum_{h,k=1}^N \langle \xi_h, A^{hk}(x) \xi_k \rangle \leq L \sum_{k=1}^N |\xi_k|^2$$

per ogni  $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in [R^2]^N$ .

Allora, per ogni compatto  $K$  di  $U$  ed ogni  $x, y$  in  $K$ , si ha

$$(4) \quad |u_h(x) - u_h(y)| \leq C(|x - y|)^{1/\tilde{L}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N \int_U u_k^2 dx \right\}^{1/2} \quad (h = 1, \dots, N)$$

con  $C$  costante dipendente solo da  $L$  e  $\operatorname{dist}(K, \partial U)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x_0$  un punto fissato di  $U$ ,  $B(r) = \{x \in R^2 : |x - x_0| \leq r\}$ ,  $S(r) = \{x \in R^2 : |x - x_0| = r\}$  e definiamo, per  $r < \operatorname{dist}(x_0, \partial U)$ ,

$$(5) \quad g(r) = \sum_{h,k=1}^N \int_{B(r)} \langle \nabla u_h, A^{hk}(x) \nabla u_k \rangle dx.$$

Utilizzando la maggiorazione (che segue dalla (3))

$$\sum_{k=1}^N \int_{B(r)} |\nabla u_k|^2 dx \leq g(r)$$

e la nota disuguaglianza di Caccioppoli, per un teorema di Morrey (vedi ad esempio [5], pag. 35; o anche [7], [1]), per provare l'hölderianità nella forma

(4) sarà sufficiente verificare che

$$(6) \quad g(r) \leq C' r^{2/\sqrt{L}} \sum_{k=1}^N \int_U |\nabla u_k|^2 dx$$

con  $C' = C'(L, \text{dist}(x_0, \partial U))$ , per ogni  $x_0 \in U$  ed ogni  $r < \text{dist}(x_0, \partial U)$ .

Proveremo dunque la (6).

Per mezzo delle formule di Gauss-Green, dalle (1) si ricava, per ogni  $N$ -pla di costanti  $(b_1, \dots, b_N)$  cui verrà attribuito in seguito un valore opportuno (dipendente da  $r$ ) e per quasi tutti i valori di  $r$ , l'eguaglianza

$$(7) \quad g(r) = \sum_{h,k=1}^N \int_{S(r)} (u_h - b_h) \langle A^{hk}(x) \nabla u_h, \underline{n} \rangle d\sigma$$

dove  $\underline{n} = \underline{n}(x)$  è la normale esterna a  $B(r)$  in un punto  $x$  di  $S(r)$ , mentre  $d\sigma$  è la misura 1 dimensionale su  $S(r)$ .

Introduciamo a questo punto le coordinate polari  $(\varrho, \vartheta)$  di centro  $x_0$  e poniamo

$$J(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix};$$

si ha  $\underline{n} = J(\vartheta) \underline{e}_1$ , con  $\underline{e}_1 \equiv (1, 0)$ , e  $\nabla u = J(\vartheta) \bar{\nabla} u$ , con  $\bar{\nabla} u \equiv \left( \frac{\partial u}{\partial \varrho}, \varrho^{-1} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right)$ .

Inoltre, facendo la posizione

$$J^*(\vartheta) A^{hk} J(\vartheta) = P^{hk} \equiv [p_{ij}^{hk}]_{i,j=1,2},$$

la definizione (5) di  $g(r)$  e la (7) si trasformano nelle

$$(8) \quad g(r) = \sum_{h,k=1}^N \int_{B(r)} \langle \bar{\nabla} u_h, P^{hk} \bar{\nabla} u_k \rangle dx$$

$$(9) \quad g(r) = \sum_{h,k=1}^N \int_{S(r)} (u_h - b_h) \langle P^{hk} \bar{\nabla} u_k, \underline{e}_1 \rangle d\sigma.$$

Si noti poi che in virtù di (2) e (3) si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} P^{hk} = [P^{kh}]^* \\ \sum_{k=1}^N |\xi_k|^2 \leq \sum_{h,k=1}^N \langle \xi_h, P^{hk} \xi_k \rangle \leq L \sum_{k=1}^N |\xi_k|^2 \end{array} \right.$$

per ogni  $(\xi_1, \dots, \xi_N) \in [K^2]^N$ ; da cui, introducendo la matrice  $2N \times 2N$

$$T = [P^{hk}]_{h,k=1,\dots,N},$$

risulta

$$(10) \quad \begin{cases} T = T^* \\ |\eta|^2 \leq \langle \eta, T\eta \rangle \leq L |\eta|^2 \quad \text{per ogni } \eta \in R^{2N}. \end{cases}$$

Consideriamo ora le quattro seguenti sottomatrici  $N \times N$  della matrice  $T$  (ottenute prendendo alternativamente le righe pari o dispari e le colonne pari o dispari di  $T$ )

$$\begin{aligned} E &= [p_{11}^{hk}] & F &= [p_{12}^{hk}] \\ G &= [p_{21}^{hk}] & H &= [p_{22}^{hk}]. \end{aligned} \quad (h, k = 1, \dots, N)$$

Tali matrici godono della proprietà che  $E = E^*$ ,  $G = F^*$ ,  $H = H^*$ ; costruiamo la nuova matrice  $2N \times 2N$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

per la quale si verifica facilmente che

$$(11) \quad \begin{cases} \bar{T} = \bar{T}^* \\ |\eta|^2 \leq \langle \eta, \bar{T}\eta \rangle \leq L |\eta|^2 \quad \text{per ogni } \eta \in R^{2N}, \end{cases}$$

e infine introduciamo i vettori

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv (u_1 - b_1, \dots, u_N - b_N) \\ \Phi_e &\equiv \left( \frac{\partial u_1}{\partial \varrho}, \dots, \frac{\partial u_N}{\partial \varrho} \right) \\ \Phi_\vartheta &\equiv \left( \frac{\partial u_1}{\partial \vartheta}, \dots, \frac{\partial u_N}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned}$$

Utilizzando tutte queste notazioni si possono riscrivere la (8) e la (9) nella forma seguente:

$$(12) \quad g(r) = \int_{B(r)} [\langle \Phi_e, E \Phi_e \rangle + 2\varrho^{-1} \langle \Phi_e, F \Phi_\vartheta \rangle + \varrho^{-2} \langle \Phi_\vartheta, H \Phi_\vartheta \rangle] dx$$

$$(13) \quad g(r) = \int_{S(r)} \langle \Phi, E \Phi_e + e^{-1} F \Phi_\vartheta \rangle d\sigma.$$

Ci proponiamo ora di maggiorare il secondo membro della (13). Ricordando che  $E = E^*$ , si può definire la matrice simmetrica  $\sqrt{E}$  e scrivere

$$g(r) = \int_{S(r)} \langle \sqrt{E} \Phi, \sqrt{E} \Phi_e + e^{-1} \sqrt{E^{-1}} F \Phi_\vartheta \rangle d\sigma$$

da cui segue per la diseuguaglianza di Schwarz

$$(14) \quad g(r) \leq \left\{ \int_{S(r)} \langle \Phi, E \Phi \rangle d\sigma \cdot \int_{S(r)} |\sqrt{E} \Phi_e + e^{-1} \sqrt{E^{-1}} F \Phi_\vartheta|^2 d\sigma \right\}^{1/2}.$$

Ora dalla (11) segue in particolare che

$$|\zeta|^2 \leq \langle \zeta, E \zeta \rangle \leq L |\zeta|^2 \quad \text{per ogni } \forall \zeta \in R^N,$$

cosicch  risulta

$$\int_{S(r)} \langle \Phi, E \Phi \rangle d\sigma \leq L \int_{S(r)} |\Phi|^2 d\sigma = L \left( \sum_{k=1}^N \int_{S(r)} |u_k - b_k|^2 d\sigma \right).$$

A questo punto diamo un valore alle costanti  $b_1, \dots, b_N$ , scegliendo (per ogni fissato valore di  $r$ )

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_k(r, \vartheta) d\vartheta \quad (k = 1, \dots, N);$$

possiamo in tal modo applicare la diseuguaglianza di Wirtinger<sup>(1)</sup>, ottenendo la stima

$$(15) \quad \int_{S(r)} \langle \Phi, E \Phi \rangle d\sigma \leq L r^2 \cdot \int_{S(r)} e^{-2} |\Phi_\vartheta|^2 d\sigma.$$

---

(1) Per ogni funzione  $w(t)$  periodica di periodo  $2\pi$  per cui sia  $\int_0^{2\pi} w(t) dt = 0$  vale la diseuguaglianza seguente  $\int_0^{2\pi} w^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} [w'(t)]^2 dt$ . Vedi [3], § 258.

Se poi osserviamo che

$$(16) \quad |\zeta|^2 \leq \langle \zeta, (H - F^* E^{-1} F) \zeta \rangle \quad \text{per ogni } \zeta \in R^N,$$

possiamo dedurre dalla (15) la seguente maggiorazione

$$(17) \quad \int_{S(r)} \langle \Phi, E \Phi \rangle d\sigma \leq L r^2 \int_{S(r)} \varrho^{-2} \langle \Phi_\varphi, (H - F^* E^{-1} F) \Phi_\varphi \rangle d\sigma.$$

Proviamo dunque la (16): innanzitutto la matrice  $H - F^* E^{-1} F$  risulta essere simmetrica; inoltre se  $\lambda_0$  è il minimo autovalore di tale matrice e  $\zeta_0$  è un corrispondente autovettore si verifica che

$$(-E^{-1} F \zeta_0, \zeta_0) \begin{bmatrix} E & F \\ F^* & H \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -E^{-1} F \zeta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = \lambda_0 |\zeta_0|^2,$$

da cui per la (11)

$$\lambda_0 |\zeta_0|^2 \geq |E^{-1} F \zeta_0|^2 + |\zeta_0|^2 \geq |\zeta_0|^2,$$

e quindi  $\lambda_0 \geq 1$ , cioè la (16).

Introducendo ora la (17) nella (14) si ricava (essendo  $|ab|^{1/2} \leq \frac{1}{2}(|a| + |b|)$ )

$$g(r) \leq$$

$$\sqrt{L} r \left[ \int_{S(r)} \varrho^{-2} \langle \Phi_\varphi, (H - F^* E^{-1} F) \Phi_\varphi \rangle d\sigma \cdot \int_{S(r)} |\sqrt{E} \Phi_e + \varrho^{-1} \sqrt{E}^{-1} F \Phi_\varphi|^2 d\sigma \right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{L} r \frac{1}{2} \int_{S(r)} \left[ \varrho^{-2} \langle \Phi_\varphi, (H - F^* E^{-1} F) \Phi_\varphi \rangle + |\sqrt{E} \Phi_e + \varrho^{-1} \sqrt{E}^{-1} F \Phi_\varphi|^2 \right] d\sigma =$$

$$= \frac{\sqrt{L}}{2} r \int_{S(r)} [\langle \Phi_e, E \Phi_e \rangle + 2\varrho^{-1} \langle \Phi_e, F \Phi_\varphi \rangle + \varrho^{-2} \langle \Phi_\varphi, H \Phi_\varphi \rangle] d\sigma.$$

Da qui, ricordando la (12) e osservando che  $\frac{d}{dr} \int_{B(r)} \varphi dx = \int_{S(r)} \varphi d\sigma$ , si ottiene

$$g(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2} r g'(r) \quad \text{ovvero}$$

$$(18) \quad \frac{d}{dr} [lg(r^{-2/\sqrt{L}} g(r))] \geq 0.$$

La (18) implica che la funzione  $lg(r^{-2/\sqrt{L}}g(r))$  è crescente per  $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial U)$ , e quindi anche  $r^{-2/\sqrt{L}}g(r)$  risulta crescente; pertanto vale la (6) con  $C' = L \cdot (\text{dist}(x_0, \partial U))^{-2/\sqrt{L}}$ , e quindi per quanto detto all'inizio della dimostrazione la tesi del teorema è provata.

### 3. Il caso non omogeneo.

**TEOREMA 2.** *Sia  $U$  un aperto limitato di  $R^2$  e  $(u_1, \dots, u_N)$  in  $[H_{\text{loc}}^1(U)]^N$  una soluzione su  $U$  del sistema di equazioni*

$$(19) \quad \sum_{k=1}^N \text{div}(A^{hk}(x) \nabla u_k) = \text{div} f_h \quad (h = 1, \dots, N)$$

dove le matrici dei coefficienti  $A^{hk}(x)$  verificano le ipotesi (2) e (3) e  $(f_1, \dots, f_N)$  è una  $N$ -pla di funzioni vettoriali appartenenti a  $[L_{\text{loc}}^2(U)]^N$  tali che

$$(20) \quad \sum_{h=1}^N \int_{|x-x_0| \leq r} |f_h|^2 dx \leq C_0^2 r^{2\mu} \quad (\mu > 0)$$

con  $C_0$  dipendente solo da  $(f_1, \dots, f_N)$ , per ogni  $x_0$  in  $U$  e  $r < \text{dist}(x_0, \partial U)$ .

Allora per ogni compatto  $K$  di  $U$  ed ogni  $x, y$  in  $K$ , si ha la maggiorazione seguente ( $h = 1, \dots, N$ )

$$(21) \quad |u_h(x) - u_h(y)| \leq C |x - y|^\alpha \left[ \sum_{k=1}^N \int_U |u_k|^2 dx + C_0^2 \right]^{1/2}$$

con  $C$  costante dipendente solo da  $L, \text{dist}(K, \partial U)$  ed  $\alpha$ , per ogni  $\alpha < \min(1/\sqrt{L}, \mu)$  ed anche per  $\alpha = \min(1/\sqrt{L}, \mu)$  se  $\mu \neq 1/\sqrt{L}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione procede allo stesso modo e con le stesse notazioni di quella del teorema 1: si fissa  $x_0$  in  $U$ , si definisce  $g(r)$  con la (5) come in precedenza e si introducono le costanti  $(b_1, \dots, b_N)$ . Questa volta dalle equazioni (19), moltiplicando per  $u_h - b_h$  e integrando su  $B(r)$ , si ricava in luogo della (7) la seguente espressione di  $g(r)$

$$\begin{aligned} g(r) &= \sum_{h,k=1}^N \int_{B(r)} (u_h - b_h) \langle A^{hk} \nabla u_k, \underline{n} \rangle d\sigma - \sum_{h=1}^N \int_{B(r)} (u_h - b_h) \text{div} f_h dx = \\ &= \sum_{h=1}^N \int_{B(r)} (u_h - b_h) \langle \sum_{k=1}^N A^{hk} \nabla u_k - f_h, \underline{n} \rangle d\sigma + \sum_{h=1}^N \int_{B(r)} \langle f_h, \nabla u_h \rangle dx. \end{aligned}$$



Questa può essere messa a sua volta, ponendo  $\Psi = (\langle f_1, \underline{n} \rangle, \dots, \langle f_N, \underline{n} \rangle)$ , sotto la forma

$$g(r) = \int_{S(r)} [\langle \Phi, E \Phi_e + e^{-1} F \Phi_\phi \rangle - \langle \Phi, \Psi \rangle] d\sigma + \sum_{h=1}^N \int_{B(r)} \langle f_h, \nabla u_h \rangle dx$$

ovvero

$$(22) \quad g(r) = \int_{S(r)} \langle \sqrt{E} \Phi, \sqrt{E} \Phi_e + e^{-1} \sqrt{E^{-1}} F \Phi_\phi - \sqrt{E^{-1}} \Psi \rangle d\sigma + \sum_{h=1}^N \int_{B(r)} \langle f_h, \nabla u_h \rangle dx.$$

Allo scopo di maggiorare il secondo membro della (22) cominciamo con l'osservare che in virtù della (20) e della (3) si ha

$$\sum_{h=1}^N \left| \int_{B(r)} \langle f_h, \nabla u_h \rangle dx \right| \leq C_0 r^\mu \sqrt{g(r)}.$$

Applicando la disegualianza di Schwarz al primo integrale della (22), e ponendo per semplicità

$$\beta = \langle \Psi, E^{-1} \Psi \rangle - 2 \langle \Psi, \Phi_e \rangle - 2 \langle \Psi, e^{-1} E^{-1} F \Phi_\phi \rangle$$

si ottiene allora

$$g(r) \leq \left[ \int_{S(r)} \langle \Phi, E \Phi \rangle d\sigma \int_{S(r)} (|\sqrt{E} \Phi_e + e^{-1} \sqrt{E^{-1}} F \Phi_\phi|^2 + \beta) d\sigma \right]^{1/2} + C_0 r^\mu \sqrt{g(r)}.$$

Di qui, procedendo esattamente come nella dimostrazione del teorema 1 si giunge alla maggiorazione

$$(23) \quad g(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2} r \left[ g'(r) + \int_{S(r)} \beta d\sigma \right] + C_0 r^\mu \sqrt{g(r)}.$$

Poniamo ora

$$f(r) = g(r) + \int_{B(r)} \beta dx$$

e diamo una maggiorazione per l'integrale in cui compare  $\beta$ .

Dalla (11) si ricava con opportuni calcoli che

$$\|E^{-1}\| \leq 1, \quad \|F\| \leq L,$$

inoltre si ha

$$\int_{\tilde{B}(r)} |\Psi|^2 dx \leq \sum_{h=1}^N \int_{\tilde{B}(r)} |f_h|^2 dx \leq C_0^2 r^{2\mu}$$

$$\int_{\tilde{B}(r)} |\Phi_e|^2 dx \leq g(r), \quad \int_{B(r)} |\Phi_\phi|^2 e^{-2} dx \leq g(r).$$

Utilizzando queste stime e la disuguaglianza di Schwarz, si ottiene allora

$$(24) \quad \int_{\tilde{B}(r)} |\beta| dx \leq C_0^2 r^{2\mu} + C_0(1+L) r^\mu \sqrt{g(r)}.$$

Dalla (23) e dalla (24) si ottiene in conclusione

$$(25) \quad f(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2} r f'(r) + C_0^2 r^{2\mu} + C_1 r^\mu \sqrt{g(r)}$$

dove si è posto  $C_1 = C_0(2+L)$ .

A questo punto osserviamo che  $f(r) \geq 0$ ; infatti

$$f(r) = g(r) + \int_{B(r)} \beta dx =$$

$$= \int_{\tilde{B}(r)} [\langle \Phi_e, E \Phi_e \rangle + 2 \langle \Phi_e, F \Phi_\phi \rangle e^{-1} + \langle \Phi_\phi, H \Phi_\phi \rangle e^{-2}] dx + \int_{B(r)} \beta dx =$$

$$= \int_{\tilde{B}(r)} |\sqrt{E} \Phi_e + \sqrt{E^{-1}} F e^{-1} \Phi_\phi - \sqrt{E^{-1}} \Psi|^2 + e^{-2} \langle \Phi_\phi, (H - F^* E^{-1} F) \Phi_\phi \rangle dx$$

da cui per la (16) si ha appunto  $f(r) \geq 0$ .

Ora notiamo che per quei valori di  $r$  per cui si ha  $g(r) \leq f(r)$  la (25) porta alla

$$(26) \quad f(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2} r f'(r) + C_1 \sqrt{f(r)} r^\mu + C_0^2 r^{2\mu};$$

quando invece si ha  $g(r) \geq f(r)$  risulta per la (24)

$$g(r) - f(r) = \left| \int_{\tilde{B}(r)} \beta dx \right| \leq C_1 \sqrt{g(r)} r^\mu + C_0^2 r^{2\mu},$$

da cui, risolvendo rispetto a  $\sqrt{g(r)}$ , si ricava

$$\sqrt{g(r)} \leq C_2 r^\mu + \sqrt{f(r)}.$$

In ogni caso dunque si ottiene dalla (25) la

$$(27) \quad f(r) \leq \frac{\sqrt{L}}{2} r f'(r) + C_1 \sqrt{f(r)} r^\mu + C_3 r^{2\mu}$$

con  $C_3 = C_0^2 + C_1 C_2$ .

Trattiamo dapprima il caso in cui si ha  $\mu > \frac{1}{\sqrt{L}}$ .

Consideriamo la funzione

$$h(r) = r^{-2/\sqrt{L}} f(r);$$

poiché risulta  $h'(r) = \frac{2}{\sqrt{L}r} r^{-2/\sqrt{L}} \left( \frac{\sqrt{L}}{2} r f'(r) - f(r) \right)$ , la (27) diventa

$$\frac{\sqrt{L}}{2} r \cdot r^{2/\sqrt{L}} h'(r) + C_1 \sqrt{h(r)} r^{1/\sqrt{L}+\mu} + C_3 r^{2\mu} \geq 0.$$

Da qui, con un'ulteriore maggiorazione, segue

$$(28) \quad h'(r) \geq -C_4 \max [\sqrt{h(r)} r^{\mu-1/\sqrt{L}-1}, r^{2(\mu-1/\sqrt{L})-1}],$$

dove  $C_4$  è una costante positiva dipendente da  $L$  e  $C_0$ .

Sia  $\delta < \text{dist}(x_0, \partial U)$ ; poiché ogni soluzione della disequazione (28) sull'intervallo  $0 < r < \delta$  si può maggiorare con la soluzione dell'equazione corrispondente che ha lo stesso valore nel punto  $r = \delta$ , allo scopo di maggiorare tali soluzioni sarà sufficiente considerare l'equazione:

$$(29) \quad h'(r) = -C_4 \max [\sqrt{h(r)} r^{\mu-1/\sqrt{L}-1}, r^{2(\mu-1/\sqrt{L})-1}].$$

Osserviamo che  $h(r)$  è una funzione decrescente ( $C_4 \geq 0$ ) mentre  $r^{\mu-1/\sqrt{L}}$  è crescente, pertanto vi è al più un valore  $r_0$  di  $r$  per cui è  $\sqrt{h(r_0)} = r_0^{\mu-1/\sqrt{L}}$ . Per gli eventuali  $r < r_0$  risulta  $\sqrt{h(r)} \geq r^{\mu-1/\sqrt{L}}$ , quindi l'equazione diventa

$$(30) \quad h'(r) = -C_4 \sqrt{h(r)} r^{\mu-1/\sqrt{L}-1}.$$

Le soluzioni di tale equazione sono in questo caso

$$h(r) = \left[ \text{cost.} - \frac{C_4}{2} (\mu - 1/\sqrt{L})^{-1} r^{\mu-1/\sqrt{L}} \right]^2.$$

Per  $r > r_0$  si ha invece l'equazione

$$(31) \quad h'(r) = -C_4 r^{2(\mu-1/\sqrt{L})-1}$$

che ha soluzione

$$h(r) = \left[ \text{cost} - \frac{C_4}{2} (\mu - 1/\sqrt{L})^{-1} r^{2(\mu-1/\sqrt{L})} \right].$$

Poiché  $h(\delta) \leq C(\delta, L) \left[ C_0^2 + \sum_{h=1}^N \int_U u_h^2 dx \right]$ , si ha dunque per le soluzioni della (28)

$$(32) \quad h(r) \leq \bar{C}(\delta, L) \left[ C_0^2 + \sum_{h=1}^N \int_U u_h^2 dx \right].$$

Nel caso in cui si ha  $\mu < 1/\sqrt{L}$  la dimostrazione procede allo stesso modo pur di considerare la funzione  $h(r) = r^{-2\mu} f(r)$ ; anche questa volta si arriva alla (32).

Se infine  $\mu = 1/\sqrt{L}$  si consideri per ogni  $\alpha < \mu$  la funzione  $h_\alpha(r) = r^{-2\alpha} f(r)$ ; questa soddisfa la disequazione

$$h'_\alpha(r) \geq -C_5 (\sqrt{h_\alpha(r)}) r^{\mu-\alpha-1} + r^{2\mu-2\alpha-1} \quad (C_5 \geq 0)$$

da cui procedendo come sopra si ottiene la stima

$$(33) \quad h_\alpha(r) \leq \bar{C}(\delta, L, \alpha) \left[ C_0^2 + \sum_{h=1}^N \int_U u_h^2 dx \right].$$

Dalla (32), (33) si ottiene in ogni caso la stima

$$(34) \quad f(r) \leq C_* r^{2\alpha} \quad (0 < r < \delta < \text{dist}(x_0, \partial U))$$

dove

$$C_* = \bar{C}_*(\delta, L, \alpha) \left[ C_0^2 + \sum_{h=1}^N \int_U u_h^2 dx \right],$$

per ogni  $\alpha < \min(1/\sqrt{L}, \mu)$  ed anche per  $\alpha = \min(1/\sqrt{L}, \mu)$  purché sia  $\mu \neq 1/\sqrt{L}$ .

Ricordando la definizione di  $f(r)$  e la (24) si ottiene dalla (34) la seguente stima

$$g(r) \leq C_* r^{2\alpha} + C_0^2 r^{2\mu} + C_0(1+L) r^\mu \sqrt{g(r)},$$

da cui, risolvendo rispetto a  $\sqrt{g(r)}$ , si ricava

$$2\sqrt{g(r)} \leq C_0(1+L) r^\mu + [C_0^2((1+L)^2 + 4) r^{2\mu} + 4C_* r^{2\alpha}]^{1/2}.$$

Di qui, ricordando che  $\alpha \leq \mu$ , segue che

$$r^{-2\alpha} g(r) \leq C_{**} \left( C_0^2 + \sum_{h=1}^N \int_{\bar{V}} u_h^2 dx \right)$$

da cui, per il lemma di Morrey citato in precedenza, segue la tesi.

#### 4. Esempi.

Rimane ora da far vedere che le valutazioni degli esponenti di Hölder date nei teoremi 1 e 2 non possono essere migliorate; sarà sufficiente mostrarlo nel caso di una sola equazione ( $N = 1$ ).

Consideriamo l'operatore

$$E = \sum_{i,j=1}^2 D_i(a_{ij}(x) D_j)$$

dove

$$a_{11} = (Lx_1^2 + x_2^2) |x|^{-2}, \quad a_{12} = a_{21} = (L-1) x_1 x_2 |x|^{-2}, \quad a_{22} = (x_1^2 + Lx_2^2) |x|^{-2},$$

che può essere scritto in coordinate polari

$$E = L \varrho^{-1} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \varrho^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

L'equazione

$$Eu = \frac{L\mu^2 - 1}{\mu - 1} \frac{\partial}{\partial x_1} (|x|^{\mu-1})$$

ammette la soluzione

$$u = x_1 |x|^{-1} (|x|^{1/\sqrt{L}} + |x|^\mu) \equiv (\varrho^{1/\sqrt{L}} + \varrho^\mu) \cos \vartheta,$$

che è hölderiana esattamente di esponente  $\min(1/\sqrt{L}, \mu)$ .

Nel caso in cui  $\mu = 1/\sqrt{L}$ , infine, costruiamo un altro esempio in cui la soluzione è hölderiana solo per esponenti minori di  $1/\sqrt{L}$  (supporremo  $L \neq 1$ ):

$$Eu = \frac{2L}{1 - \sqrt{L}} \frac{\partial}{\partial x_1} (|x|^{1/\sqrt{L}-1})$$

una cui soluzione è

$$u = x_1 |x|^{-1} (|x|^{1/\sqrt{L}} \lg |x|).$$

### BIBLIOGRAFIA

- [1] CAMPANATO, S., *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Sc. Norm. Pisa, 17, 175-188, (1963).
- [2] DE GIORGI, E., *Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico*, Boll. U. M. I., 1, 135-137, (1968).
- [3] HARDY-LITTLEWOOD-POLYA, *Inequalities*, Cambridge Uni. Press. (1934).
- [4] MORREY, C. B., *Multiple Integral Problem in the Calculus of Variations and Related Topics*, Univ. of Calif. Publications (1943).
- [5] MORREY, C. B., *Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and Related Topics*, Ann. Sc. Norm. Pisa, 14, 1-61 (1960).
- [6] PICCININI, L. C.-SPAGNOLO, S., *On the Hölder Continuity of Solutions of Second Order Elliptic Equations in Two Variables*, Ann. Sc. Norm. Pisa, 26, 391-402 (1972).
- [7] STAMPACCHIA, G., *The spaces  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$  and  $N^{p,\lambda}$  and Interpolation*, Ann. Sc. Norm. Pisa, 10, 443-462 (1965).