

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ANNA MARIA MICHELETTI

Metrica per famiglie di domini limitati e proprietà generiche degli autovalori

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 26,
n° 3 (1972), p. 683-694

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_3_683_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

METRICA PER FAMIGLIE DI DOMINI LIMITATI E PROPRIETÀ GENERICHE DEGLI AUTOVALORI

di ANNA MARIA MICHELETTI

Introduzione.

Nello studiare la continuità dell' n -esimo autovalore dell'operatore di Laplace $-\Delta_\Omega$ relativo ad un aperto limitato Ω con dati di Dirichlet nulli, considerato come funzione dell'aperto Ω , Courant introduce una nozione di vicinanza tra due domini basata su un diffeomorfismo del tipo $I + \psi$ con $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^m)$, che trasforma l'uno nell'altro.

Lo scopo di questo lavoro è inquadrare questa nozione in un ambito più generale introducendo una distanza vera e propria tra i domini che sarà chiamata « distanza di Courant ». Sulla base di questa distanza si riprendono i risultati del lavoro precedente [1] e si arriva a formulare il seguente risultato: preso un aperto campione Ω_0 , limitato e introdotta la distanza di Courant nella famiglia degli aperti ad esso diffeomorfi, risulta di prima categoria l'insieme degli aperti Ω per i quali l'operatore di Laplace $-\Delta_\Omega$ non ha autovalori tutti semplici.

§ 1. Data un'applicazione di \mathbb{R}^m in sè, per semplicità di notazione, conviene considerare la sua derivata prima, seconda, ..., r -sima, rispettivamente come un'applicazione lineare, bilineare, ..., r -lineare definita in ciascun punto e introdurre per queste le norme consuete⁽¹⁾. Indichiamo con $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$ lo spazio di Banach delle applicazioni di \mathbb{R}^m in sè con derivate prime, seconde, ..., r -esime continue e limitate dotate della norma:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^r} = \sup_x \max [\|f(x)\|, \|f^{(1)}(x)\|, \dots, \|f^{(r)}(x)\|].$$

Pervenuto alla Redazione il 12 Luglio 1971.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

⁽¹⁾ Partendo dalla seguente norma di \mathbb{R}^m : $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2}$

DEFINIZIONE: Sia \mathcal{F}^r l'insieme delle applicazioni di \mathbb{R}^m in sè tali che

i) sono del tipo $I + f$ dove $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$ e inoltre $\|f(x)\|$ e $\|f^{(i)}(x)\|$ tendono a zero per $\|x\| \rightarrow +\infty$ ($i = 1, \dots, r$)

ii) sono invertibili come diffeomorfismi di classe \mathcal{C}^r .

Una forma k -lineare su \mathbb{R}^m , S , dipendente da x e avente come argomenti y_1, \dots, y_k verrà indicata con la notazione

$$S(x)[y_1][y_2], \dots, [y_k].$$

LEMMA 1. Siano F e G due applicazioni di \mathbb{R}^m in sè tali che F è differenziabile in un intorno del punto x fino all'ordine r e G è differenziabile in un intorno di $F(x)$ fino all'ordine r . Allora il differenziale r -simo di $G \circ F$ in x è dato dalla somma di un numero finito di applicazioni r -lineari su \mathbb{R}^m del tipo

$$(h_1, h_2, \dots, h_r) \rightarrow G^k(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x) [h_1] [h_1] \dots [h_{\lambda_1}]] \dots \\ \dots [F^{(\lambda_k)}(x) [h_{r-\lambda_k+1}] \dots [h_r]]$$

dove $k = 1, \dots, r$ e $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = r$.

Procediamo per induzione su r . La nostra affermazione è banalmente vera per $r = 1$. Vediamo ora che se è vero per $r - 1$ è vero anche per r .

Questa è una ovvia conseguenza dell'osservazione che un'applicazione di \mathbb{R}^m in $\mathcal{L}((\mathbb{R}^m)^{r-1}; \mathbb{R}^m)$ del tipo

$$x \rightarrow G^{(k)}(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)]$$

dove $k = 1, \dots, r - 1$ e $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = r - 1$, ha come differenziale in x l'applicazione r -lineare su \mathbb{R}^m

$$G^{(k+1)}(F(x)) [F^{(1)}(x)] [F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)] + \\ + G^{(k)}(F(x)) [F^{(\lambda_1+1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)] + \dots + G^{(k)}(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k+1)}(x)].$$

LEMMA 2. Siano f e g in $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$ e sia $\psi = f \circ (I + g)$. Allora si ha per ogni x di \mathbb{R}^m

$$\|\psi(x)\| = \|f(x + g(x))\|$$

$$\|\psi^{(1)}(x)\| \leq \|f^{(1)}(x + g(x))\| [1 + \|g^{(1)}(x)\|]$$

$$\begin{aligned} \| \psi^{(i)}(x) \| &\leq \| f^{(1)}(x + g(x)) \| \| g^{(i)}(x) \| + \\ &+ \sum_{j=2}^i \| f^{(j)}(x + g(x)) \| a_j (\| g^{(1)}(x) \|, \dots, \| g^{(i-1)}(x) \|) \end{aligned}$$

per $i = 2, \dots, r$ dove a_j è un polinomio.

Questa affermazione è una ovvia conseguenza del Lemma 1.

TEOREMA. \mathcal{F}^r è un gruppo.

Dal lemma 2 segue immediatamente che se F e G sono in \mathcal{F}^r anche $F \circ G$ è in \mathcal{F}^r .

Vediamo che se $F = I + f \in \mathcal{F}^r$ anche $I + g = F^{-1} \in \mathcal{F}^r$. Basta vedere che $\| g(y) \|$ e $\| g^{(i)}(y) \|$ tendono a zero per $\| y \| \rightarrow +\infty$ $i = 1, \dots, r$.

Procediamo per induzione su r .

Poniamo $y = F(x)$. Dalla relazione $-f(x) = g(y)$ si ha che $\sup_{y \in \mathbb{R}^m} \| g(y) \| < +\infty$. Poiché $\| y \| - \| g(y) \| \leq \| x \|$ si ha che $\| x \| \rightarrow +\infty$ per $\| y \| \rightarrow +\infty$. Allora da $-f(x) = g(y)$ segue che $\| g(y) \| \rightarrow 0$ per $\| y \| \rightarrow +\infty$.

Dal lemma 2 si ha

$$\| g^{(1)}(y) \| \leq \| f^{(1)}(x) \| [1 + \| g^{(1)}(y) \|]$$

quindi

$$\| g^{(1)}(y) \| [1 - \| f^{(1)}(x) \|] \leq \| f^{(1)}(x) \|.$$

Per $\| y \|$ opportunamente grande si ha

$$0 \leq \| g^{(1)}(y) \| \leq \frac{\| f^{(1)}(x) \|}{1 - \| f^{(1)}(x) \|}.$$

Quindi $\| g^{(1)}(y) \| \rightarrow 0$ per $\| y \| \rightarrow +\infty$.

Allora \mathcal{F}^0 e \mathcal{F}^1 sono gruppi, inoltre se \mathcal{F}^{r-1} è un gruppo, anche \mathcal{F}^r lo è. Infatti dal lemma 2, per $\| y \|$ opportunamente grande si ha

$$0 \leq \| g^{(r)}(y) \| \leq \frac{\sum_{j=2}^r \| f^{(j)}(x) \| a_j (\| g^{(1)}(y) \|, \dots, \| g^{(r-1)}(y) \|)}{1 - \| f^{(1)}(x) \|}.$$

LEMMA 3. Per ogni $r \in \mathbb{N}$ e per ogni $s \in \mathbb{N} - \{0\}$ esiste una costante $k(r, s) \in \mathbb{R}^+$ che gode della seguente proprietà: se le applicazioni f_1, \dots, f_n di $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$ sono tali che $\sum_{i=1}^n \| f_i \|_{\mathcal{C}^r} < \alpha$ con $0 < \alpha < s$, allora $F = (I + f_n) \circ \dots \circ (I + f_1)$ è tale che $\| F - I \|_{\mathcal{C}^r} \leq \alpha k(r, s)$.

Procediamo per induzione su r . Per semplificare le notazioni poniamo

$$F_i = (I + f_i) \circ \dots \circ (I + f_1) \quad \text{quindi} \quad F_n = F.$$

Dalla definizione di F si ha

$$(1) \quad \begin{aligned} F - I &= f_1 + f_2 \circ (I + f_1) + \dots + f_n \circ (I + f_{n-1}) \circ \dots \circ (I + f_1) = \\ &= f_1 + f_2 \circ F_1 + \dots + f_n \circ F_{n-1}. \end{aligned}$$

Allora $\|F - I\|_{\mathcal{C}^0} \leq \alpha$, quindi $k(0, s) = 1$ per ogni $s \in N - \{0\}$.

Da (1) e dal lemma 2 segue che

$$\begin{aligned} \sup_x \|(F - I)^{(1)}(x)\| &\leq \|f_1\|_{\mathcal{C}^1} + \|f_2\|_{\mathcal{C}^1} [1 + \|f_1\|_{\mathcal{C}^1}] + \dots \\ &\dots + \|f_n\|_{\mathcal{C}^1} [1 + \|f_{n-1}\|_{\mathcal{C}^1}] \dots [1 + \|f_1\|_{\mathcal{C}^1}] \leq \alpha e^\alpha. \end{aligned}$$

Allora $\|F - I\|_{\mathcal{C}^1} \leq \alpha e^\alpha$, quindi $k(1, s) = e^s$ per ogni $s \in N - \{0\}$.

Dimostriamo che se la nostra proposizione vale per $r - 1$, vale anche per r . Valutiamo $\|(F_n - I)^{(r)}(x)\|$. È ovvio che

$$(2) \quad (F_n - I)^{(r)}(x) = (F_{n-1} - I)^{(r)}(x) + (f_n \circ F_{n-1})^{(r)}(x).$$

Dal lemma 2, dato che $r \geq 2$, si ha che

$$\begin{aligned} \|(f_n \circ F_{n-1})^{(r)}(x)\| &\leq \|f_n^{(1)}(F_{n-1}(x))\| \|(F_{n-1} - I)^{(r)}(x)\| + \\ &+ \sum_{j=2}^r \|f_n^{(j)}(F_{n-1}(x))\| \alpha_j (\|(F_{n-1} - I)^{(1)}(x)\|, \dots, \|(F_{n-1} - I)^{(r-1)}(x)\|). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi di induzione $\|(F_{n-1} - I)^{(i)}(x)\| \leq \|(F_{n-1} - I)\|_{\mathcal{C}^{r-1}} \leq \alpha k(r-1, s)$ ($i = 1, \dots, r-1$) per cui tenendo presente che α_j è un polinomio (dipendente da r) dove $j = 2, \dots, r$ si ha che esiste una costante $L(r, s)$ tale che

$$(3) \quad \begin{aligned} \|(f_n \circ F_{n-1})^{(r)}(x)\| &\leq \|f_n^{(1)}(F_{n-1}(x))\| \|(F_{n-1} - I)^{(r)}(x)\| + \\ &+ L(r, s) \sum_{j=2}^r \|f_n^{(j)}(F_{n-1}(x))\| \leq \|f_n\|_{\mathcal{C}^r} \|(F_{n-1} - I)^{(r)}(x)\| + \\ &+ (r-1) L(r, s) \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}. \end{aligned}$$

Poniamo $(r-1)L(r, s) = M(r, s)$. Da (2) e (3) si ha

$$\|(F_n - I)^{(r)}(x)\| \leq [1 + \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}] \|(F_{n-1} - I)^{(r)}(x)\| + M(r, s) \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}.$$

Dopo aver ripetuto $n-1$ volte questo procedimento si ha

$$\begin{aligned} \|(F_n - I)^{(r)}(x)\| &\leq [1 + \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}] \dots [1 + \|f_2\|_{\mathcal{C}^r}] \|f_1\|_{\mathcal{C}^r} + \\ &+ [1 + \|f_n\|_{\mathcal{C}^r}] \dots [1 + \|f_2\|_{\mathcal{C}^r}] M(r, s) \|f_2\|_{\mathcal{C}^r} + \dots \\ &\dots + M(r, s) \|f_n\|_{\mathcal{C}^r} \leq \max[M(r, s), 1] e^\alpha \alpha. \end{aligned}$$

Quindi $k(r, s) = \max[M(r, s), 1] e^s$.

LEMMA 4. Sia F in \mathcal{F}^r . Poniamo $f = F - I$ e $f_\tau = f \circ \tau$ dove con τ si indica la traslazione in \mathbb{R}^m individuata dal vettore τ . Allora se $\|\tau\| \rightarrow 0$ $\|f_\tau - f\|_{\mathcal{C}^r} \rightarrow 0$.

Infatti si definisce la funzione $\varrho: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} \varrho(x, \tau) = \max[\|f(x + \tau) - f(x)\|, \|f^{(1)}(x + \tau) - f^{(1)}(x)\|, \dots \\ \dots, \|f^{(r)}(x + \tau) - f^{(r)}(x)\|]. \end{aligned}$$

La nostra affermazione è una semplice conseguenza delle seguenti proprietà di ϱ :

i) $\varrho(x, \tau)$ tende a zero per $\|x\| \rightarrow +\infty$, uniformemente al variare di τ in un intorno limitato dell'origine.

ii) ϱ è continua e $\varrho(x, 0) = 0$ per ogni x di \mathbb{R}^m .

LEMMA 5. Siano G e F in \mathcal{F}^r e γ in $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)$. Se $\|\gamma\|_{\mathcal{C}^r} \rightarrow 0$ allora anche $\|G \circ (F + \gamma) - G \circ F\|_{\mathcal{C}^r} \rightarrow 0$.

Procediamo per induzione su r . Per $r=0$ la nostra affermazione è ovvia, vediamo che se vale per $r-1$, vale anche per r .

Dal lemma 1 sappiamo che la derivata r -sima di $G \circ (F + \gamma) - G \circ F$ è la somma di un numero finito di applicazioni r -lineari del tipo

$$\begin{aligned} G^k(F(x) + \gamma(x)) [F^{(\lambda_1)}(x) + \gamma^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x) + \gamma^{(\lambda_k)}(x)] - \\ - G^k(F(x)) [F^{(\lambda_1)}(x)] \dots [F^{(\lambda_k)}(x)] \quad \text{dove } k = 1, \dots, r \text{ e } \lambda_1 + \dots + \lambda_k = r. \end{aligned}$$

Tenendo presente che $\|F^{(\lambda_1)}(x)\| \|F^{(\lambda_2)}(x)\| \dots \|F^{(\lambda_k)}(x)\| \leq (\|F - I\|_{\mathcal{C}^r} + 1)^k$, si ha che la norma di un'applicazione di questo tipo si può maggiorare con la seguente espressione.

$$\sup_x \|G^{(k)}(F(x) + \gamma(x)) - G^k(F(x))\| (\|F - I\|_{\mathcal{C}^r} + 1)^k + \\ + \|\gamma\|_{\mathcal{C}^r} p(\|F - I\|_{\mathcal{C}^r}, \|G - I\|_{\mathcal{C}^r}, \|\gamma\|_{\mathcal{C}^r})$$

dove p è un polinomio. Da questa maggiorazione e dal lemma 4 segue subito la nostra affermazione.

Sia $F \in \mathcal{F}^r$ e siano rispettivamente $(I + f_n) \circ \dots \circ (I + f_1)$ e $(I + g_m) \circ \dots \circ (I + g_1)$ fattorizzazioni in \mathcal{F}^r di F ed F^{-1} .

Poniamo

$$d(I, F) = \inf. \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{\mathcal{C}^r} + \inf. \sum_{i=1}^m \|g_i\|_{\mathcal{C}^r}$$

dove gli estremi inferiori s'intendono rispettivamente in relazione alle fattorizzazioni di F ed F^{-1} in \mathcal{F}^r . Inoltre definiamo per ogni F e G di \mathcal{F}^r

$$d(F, G) = d(I, G \circ F^{-1}).$$

È ovvio che d è invariante a destra, cioè per ogni F, G, H di \mathcal{F}^r

$$d(F, G) = d(F \circ H, G \circ H).$$

Verifichiamo che d è una distanza in \mathcal{F}^r .

$$i) \quad d(F, G) = 0 \implies F = G.$$

Infatti $d(F, G) = 0$ significa che esiste una successione di fattorizzazioni di $G \circ F^{-1}$ in \mathcal{F}^r ,

$$G \circ F^{-1} = (I + g_{n, s_n}) \circ \dots \circ (I + g_{n, 1})$$

tali che

$$\mathcal{S}(n) = \sum_{i=1}^{s_n} \|g_{n, i}\|_{\mathcal{C}^r} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Dal lemma 3 si ha che per n abbastanza grande (in modo che sia $\mathcal{S}(n) < 1$) $\|G \circ F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} \leq K(r, 1) \mathcal{S}(n)$ perciò $\|G \circ F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} = 0$, quindi $F = G$.

$$ii) \quad d(F, G) = d(G, F).$$

È una ovvia conseguenza della definizione

$$\text{iii) } d(F, G) \leq d(F, H) + d(H, G).$$

Questa affermazione segue dalla relazione ;

$$d(I, M \circ N) \leq d(I, M) + d(I, N)$$

valida per ogni M e N di \mathcal{F}^r . E questa è una banale conseguenza del fatto che tra le fattorizzazioni di $M \circ N$ in \mathcal{F}^r ci sono quelle ottenute componendo una fattorizzazione di M in \mathcal{F}^r e una fattorizzazione di N in \mathcal{F}^r .

TEOREMA 2. \mathcal{F}^r è un gruppo metrico.

Vediamo ora che con la metrica precedentemente definita il gruppo \mathcal{F}^r è topologico.

Per i risultati della teoria dei gruppi topologici [3] basta che sia verificata la seguente condizione: per ogni F di \mathcal{F}^r , se $d(I, H) \rightarrow 0$ anche $d(I, F^{-1} \circ H \circ F) \rightarrow 0$.

Affinché $d(I, F^{-1} \circ H \circ F) \rightarrow 0$ è sufficiente che tenda a zero $\|F^{-1} \circ H \circ F - I\|_{\mathcal{C}^r} + \|F^{-1} \circ H^{-1} \circ F - I\|_{\mathcal{C}^r} = \|F^{-1} \circ (F + h \circ F) - I\|_{\mathcal{C}^r} + \|F^{-1} \circ (F + k \circ F) - I\|_{\mathcal{C}^r}$ dove $h = H - I$ e $k = H^{-1} - I$.

Se $d(I, H) \rightarrow 0$, dal lemma 3 segue che $\|h\|_{\mathcal{C}^r}$ e $\|k\|_{\mathcal{C}^r}$ tendono a zero, dal lemma 2 segue che anche $\|h \circ F\|_{\mathcal{C}^r}$ e $\|k \circ F\|_{\mathcal{C}^r}$ tendono a zero, e dal lemma 5 segue la nostra condizione.

COROLLARIO 1. La topologia indotta nel gruppo topologica \mathcal{F}^r dalla metrica d coincide con la topologia che ha come base d'intorni dell'identità in \mathcal{F}^r

$$E(\varepsilon) = \{F \in \mathcal{F}^r : \|F - I\|_{\mathcal{C}^r} + \|F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} < \varepsilon\}.$$

Infatti, sia

$$S(\varepsilon) = \{F \in \mathcal{F}^r : d(I, F) < \varepsilon\}$$

dalla definizione della metrica d e dal lemma 3 si ha, per $\varepsilon < 1$

$$E(\varepsilon) \subset S(\varepsilon) \subset E(2k(r, 1)\varepsilon).$$

TEOREMA 3. Il gruppo metrico \mathcal{F}^r è completo.

Sia $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in \mathcal{F}^r , allora $d(I, H_n)$ è limitato, quindi per il lemma 3 esiste L tale che per ogni n

$$\|I - H_n\|_{\mathcal{C}^r} + \|I - H_n^{-1}\|_{\mathcal{C}^r} \leq L.$$

Dal lemma 2 e dalla limitatezza di $\{\|I - H_n\|_{\mathcal{C}^r}\}_{n \in N}$ segue che esiste M tale che per ogni m e n

$$\|H_m - H_n\|_{\mathcal{C}^r} = \|(H_m \circ H_n^{-1} - I) \circ H_n\|_{\mathcal{C}^r} \leq M \|H_m \circ H_n^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r}.$$

Allora, dato che $\{H_n\}_{n \in N}$ è di Cauchy in \mathcal{F}^r , dal lemma 3 segue che $\{H_n - I\}_{n \in N}$ è di Cauchy in $\mathcal{C}^r(R^m)$, quindi converge in $\mathcal{C}^r(R^m)$ ad un elemento che indichiamo con $H - I$.

È banale che $\|H(x) - x\|$ e $\|(H - I)^{(i)}(x)\|$ tendono a zero per $\|x\| \rightarrow +\infty$ per $i = 1, \dots, r$. Infatti vale la maggiorazione

$$\|H(x) - x\| \leq \|H(x) - H_n(x)\| + \|H_n(x) - x\| \leq \|H - H_n\|_{\mathcal{C}^r} + \|H_n(x) - x\|.$$

Per le derivate si procede nello stesso modo.

Similmente si dimostra che $H_n^{-1} - I$ converge in $\mathcal{C}^r(R^m)$ ad un elemento che si indica con $G - I$. Vediamo che $G^{-1} = H$. Basta vedere che $\|G \circ H - I\|_{\mathcal{C}^r} = 0$ e $\|H \circ G - I\|_{\mathcal{C}^r} = 0$. Infatti per il lemma 2 si ha

$$\begin{aligned} \|G \circ H - I\|_{\mathcal{C}^r} &\leq \|(G - H_n^{-1}) \circ H\|_{\mathcal{C}^r} + \|H_n^{-1} \circ H - I\|_{\mathcal{C}^r} \leq \\ &\leq c \|G - H_n^{-1}\|_{\mathcal{C}^r} + \|H_n^{-1} \circ (H_n + H - H_n) - H_n^{-1} \circ H_n\|_{\mathcal{C}^r} \end{aligned}$$

dove c è una costante dipendente da $\|H - I\|_r$. Dal lemma 5 e dalla convergenza in $\mathcal{C}^r(R^m)$ di $\{H_n^{-1} - I\}_{n \in N}$ a $G - I$ e di $\{H_n - I\}_{n \in N}$ a $H - I$ segue che il secondo membro di questa maggiorazione tende a zero. Nello stesso modo si ha $\|H \circ G - I\|_{\mathcal{C}^r} = 0$. Quindi $H \in \mathcal{F}^r$.

È ovvio che $\{H_n\}_{n \in N}$ converge ad H in \mathcal{F}^r . Infatti si ha

$$\begin{aligned} d(H_n, H) &\leq \|H \circ H_n^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} + \|H_n \circ H^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^r} \leq \|(H - H_n) \circ H_n^{-1}\|_{\mathcal{C}^r} + \\ &+ \|(H_n - H) \circ H^{-1}\|_{\mathcal{C}^r}. \end{aligned}$$

Da questa maggiorazione, dal lemma 2 e dalla limitatezza di $\{\|I - H_n^{-1}\|_{\mathcal{C}^r}\}_{n \in N}$ segue la nostra affermazione.

§ 2. Fissiamo un aperto campione Ω_0 di R^m , limitato connesso, la cui frontiera è una varietà $m - 1$ dimensionale di classe 3.

Definiamo la famiglia di insiemi

$$X(\Omega_0) = \{F(\Omega_0) \quad \mathbb{R}^m : F \in \mathcal{F}^3\}.$$

È ovvio che se $\Omega \in X(\Omega_0)$, è ancora un aperto limitato connesso la cui frontiera è una varietà $m - 1$ dimensionale di classe \mathcal{C}^3 .

Si osservi che vale il seguente:

LEMMA 6. Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^m e sia

$$\mathcal{G}(\Omega) = \{F \in \mathcal{F}^r : F(\Omega) = \Omega\}.$$

Allora $\mathcal{G}(\Omega)$ è un sottogruppo chiuso di \mathcal{F}^r .

Dimostriamo che se la successione $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{G}(\Omega)$ converge ad F in \mathcal{F}^r , allora F è in $\mathcal{G}(\Omega_0)$, il resto è ovvio. Se $\{F_n\}$ converge ad F in \mathcal{F}^r , in particolare per il lemma 3 si ha che

$$\|F_n \circ F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^0} + \|F \circ F_n^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^0} \rightarrow 0.$$

Dato che $\|F \circ F_n^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^0} \rightarrow 0$, per ogni $x \in \Omega$ la successione $\{F(F_n^{-1}(x))\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F(\Omega)$ converge ad $x \in \Omega$, quindi $\Omega \subset \overline{F(\Omega)}$. Dato che $\|F_n \circ F^{-1} - I\|_{\mathcal{C}^0} \rightarrow 0$, per ogni $x \in \Omega$, la successione $\{F_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ converge ad $F(x) \in F(\Omega)$, quindi $F(\Omega) \subset \overline{\Omega}$. Poiché F è un diffeomorfismo, si ha $F(\Omega) = \Omega$.

Per abbreviare le notazioni, poniamo da ora in poi $\mathcal{G}(\Omega_0) = \mathcal{G}$ ed $X(\Omega_0) = X$.

Sia $\Omega \in X$, per come è stato definito X , esiste $F \in \mathcal{F}^3$ tale che $F(\Omega_0) = \Omega$. Indichiamo con $\chi : X \rightarrow \mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ l'applicazione che ad Ω associa $F \circ \mathcal{G}$. È ovvio che l'applicazione χ è iniettiva e surgettiva.

Questa applicazione χ ci permette di introdurre una metrica in X in modo da poter dimostrare che è di I categoria il sottoinsieme di X costituito dagli Ω , tali che lo spettro dell'operatore di Laplace $-\Delta_\Omega$ relativo ad Ω con dati di Dirichlet nulli, non ha autovalori tutti semplici. Allora conviene osservare che

LEMMA 7. Lo scarto δ in $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$

$$\delta(F \circ \mathcal{G}, H \circ \mathcal{G}) = \inf_{G, \tilde{G} \in \mathcal{G}} d(F \circ G, H \circ \tilde{G})$$

è una metrica. La topologia indotta da δ coincide con la topologia quoziente di $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ e lo spazio metrico $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ è completo.

Dimostriamo la completezza, il resto è banale.

Dobbiamo dimostrare che se $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ allora $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge in $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$. Basta dimostrare che esiste una sottosuccessione di $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in \mathbb{N}}$ che converge. Dato che $\{F_n \circ \mathcal{G}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, esiste una sua sottosuccessione $\{F_\nu \circ \mathcal{G}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\delta(F_\nu \circ \mathcal{G}, F_{\nu+1} \circ \mathcal{G}) < \frac{1}{2^\nu}.$$

Vediamo ora che esiste una successione $\{H_\nu\}_{\nu \in N}$ in \mathcal{F}^3 tale che

- i) $H_\nu \in F_\nu \circ \mathcal{G}$
- ii) $d(H_\nu, H_{\nu+1}) < \frac{1}{2^\nu}$.

Procediamo per induzione. Per la definizione di δ dato che $\delta(F_1 \circ \mathcal{G}, F_2 \circ \mathcal{G}) < \frac{1}{2}$ esistono $H_1 \in F_1 \circ \mathcal{G}$ e $H_2 \in F_2 \circ \mathcal{G}$ tali che $d(H_1, H_2) < \frac{1}{2}$. Dato $H_\nu \in F_\nu \circ \mathcal{G}$, vediamo che esiste $H_{\nu+1}$ con le proprietà richieste. Poiché $\delta(F_\nu \circ \mathcal{G}, F_{\nu+1} \circ \mathcal{G}) < \frac{1}{2^\nu}$, esistono G_1 e G_2 in \mathcal{G} tali che $d(F_\nu \circ G_1, F_{\nu+1} \circ G_2) < \frac{1}{2^\nu}$. Sia G_3 tale che $F_\nu \circ G_1 = H_\nu \circ G_3$ allora assumiamo $H_{\nu+1} = F_{\nu+1} \circ G_2 \circ G_3^{-1}$, infatti

$$d(H_\nu, F_{\nu+1} \circ G_2 \circ G_3^{-1}) = d(H_\nu \circ G_3, F_{\nu+1} \circ G_2) = d(F_\nu \circ G_1, F_{\nu+1} \circ G_2).$$

È facile vedere che $\{H_\nu\}_{\nu \in N}$ è di Cauchy in \mathcal{F}^3 . Infatti per $i < j$

$$d(H_i, H_j) \leq \sum_{n=i}^{j-1} d(H_n, H_{n+1}) \leq \frac{1}{2^i} + \dots + \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^{i+1}}.$$

Essendo \mathcal{F}^3 completo, si ha che $\{H_\nu\}_{\nu \in N}$ converge in \mathcal{F}^3 . Poiché l'applicazione canonica $\pi: \mathcal{F}^3 \rightarrow \mathcal{F}^3/\mathcal{G}$ è continua si ha che anche $\pi(H_\nu) = F_\nu \circ \mathcal{G}$ converge in $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$.

A questo punto conviene considerare nello spazio X la metrica d indotta dalla bigezione χ di X in $\mathcal{F}^3/\mathcal{G}$. Quindi

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \delta(\chi(\Omega_1), \chi(\Omega_2))$$

per mezzo di questa metrica d , che chiameremo « di Courant » X è divenuto uno spazio metrico completo.

TEOREMA 4. *Nello spazio metrico completo X con la « metrica di Courant » δ , è di I categoria il sottoinsieme costituito dagli aperti limitati Ω , tali che lo spettro dell'operatore di Laplace $-\Delta_\Omega$ relativo ad Ω con dati di Dirichlet nulli non ha autovalori tutti semplici.*

Indichiamo con A_n il sottoinsieme di X così definito $A_n = \{\Omega \in X: -\Delta_\Omega \text{ ha semplici i primi } n \text{ autovalori}\}$. Indichiamo con A l'insieme degli $\Omega \in X$ tali che $-\Delta_\Omega$ ha autovalori tutti semplici.

È banale che

$$A = \bigcap_{n \in N} A_n \quad \text{c} \quad \mathbf{C}A = \bigcup_{n \in N} \mathbf{C}A_n.$$

Se dimostriamo che gli A_n sono sottoinsiemi aperti e densi in X , allora $\mathcal{C}A_n$ sono sottoinsiemi chiusi e privi di punti interni dello spazio metrico completo $\mathcal{C}A$ e, quindi $\mathcal{C}A$ è di I categoria.

Dimostriamo che A_n è aperto. Sia $\tilde{\Omega} \in A_n$.

Per un noto risultato di Courant⁽²⁾ si ha che esiste $\varepsilon > 0$ tale che ogni Ω , immagine di $\tilde{\Omega}$ mediante un'applicazione $I + \psi$ di \mathbb{R}^m in sé con $\|\psi\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$, ha ancora semplici i primi n autovalori. Poniamo

$$B(\tilde{\Omega}, r) = \{\Omega : d(\Omega, \tilde{\Omega}) < r\}.$$

Dalla definizione di d , dalle proprietà di gruppo metrico di \mathcal{F}^3 e dal lemma 3, si ha che esiste r tale che ogni Ω di $B(\tilde{\Omega}, r)$ è immagine di $\tilde{\Omega}$ mediante un'applicazione $I + \psi$ con $\|\psi\|_{\mathcal{C}^1} < \varepsilon$.

Dimostriamo che A_n è denso in X .

Sia $\tilde{\Omega} \in X$, consideriamo $B(\tilde{\Omega}, r)$ dobbiamo dimostrare che in $B(\tilde{\Omega}, r)$ c'è almeno un elemento Ω di A_n . Da un risultato del mio precedente lavoro⁽³⁾ si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste Ω , immagine di $\tilde{\Omega}$ mediante un'applicazione $I + \psi$ di \mathbb{R}^m in sé con $\|\psi\|_{\mathcal{C}^3} < \varepsilon$ tale che Ω ha tutti gli autovalori semplici. È chiaro che se $\varepsilon < 1$ si può facilmente scegliere $I + \psi$ in modo che stia in \mathcal{F}^3 . A questo punto dalla definizione di d , e dalle proprietà di gruppo metrico di \mathcal{F}^3 segue che esiste ε tale che il nostro Ω appartenga ad $B(\tilde{\Omega}, r)$.

Pisa, Università.

⁽²⁾ [2] pag. 423.

⁽³⁾ [1] Teorema C.

BIBLIOGRAFIA

- [1] MICHELETTI A. M. « *Perturbazione dello spettro dell'operatore di Laplace, in relazione ad una variazione del campo* ». Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1972. Vol. XXVI, Fasc. I.
- [2] COURANT R., HILBERT D. « *Methods of Mathematical Physics* » vol. I Interscience New York, 1953.
- [3] KELLEY « *General Topology* » Van Nostrand New York, 1955.