

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MARIO POLETTI

Q-algebre p -adiche e loro rappresentazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 26,
n° 1 (1972), p. 269-280

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1972_3_26_1_269_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

\mathbb{Q} -ALGEBRE p -ADICHE E LORO RAPPRESENTAZIONI

MARIO POLETTI⁽⁴⁾

La tecnica dei bivettori di Witt (cfr. [1], cap. 2) si centra sulla immersione dei vettori di Witt a componenti in un anello perfetto k di caratteristica prima p nell'insieme delle applicazioni $(\dots, b_{-1}; b_0, \dots)$ di \mathbb{Z} in k definitivamente nulle a sinistra, strutturato tramite funzioni razionali (in senso opportuno) in modo che p vi sia unità (cfr. [1], cap. 2, n° 9) e che il passaggio a quoziente su k del sottoanello identificato ai vettori sia espresso da una funzione razionale.

Si tratta in altri termini di costruire un funtore \mathcal{R} dalla categoria degli anelli perfetti di caratteristica p nella categoria delle \mathbb{Q} -algebre p -adiche (cfr. 1.) tale che per ogni anello perfetto k di caratteristica p l'insieme soggiacente a $\mathcal{R}k$ sia l'insieme delle dette applicazioni di \mathbb{Z} in k , che $\mathcal{R}k$ sia isomorfa all'estensione su \mathbb{Q} di un anello p -adico di residuo k (cfr. [2], teor. 7.1), e che il passaggio a quoziente degli anelli p -adici associati agli $\mathcal{R}k$ (cfr. 1.) sia un morfismo functoriale.

La costruzione di un tale funtore si trova in [1]; non si tratta comunque del funtore naturale che verifica le dette proprietà.

Utilizzando risultati e tecniche messi a punto in [2], nella situazione analoga relativa ai vettori di Witt, diamo in queste note la costruzione di quello naturale tra i funtori del tipo detto (cfr. 4.1), la caratterizzazione di tutti gli altri tali funtori (cfr. 5.4), e infine la caratterizzazione degli isomorfismi tra di essi (cfr. 5.6).

In quanto segue, p è un primo positivo, \mathbb{F}_p è il corpo fondamentale di caratteristica p , \mathbb{Z} è l'anello degli interi, \mathbb{Q} è il corpo razionale.

Se k è un anello di caratteristica p , il suo endomorfismo di Frobenius si indicherà con π .

Pervenuto alla Redazione il 17 Novembre 1970 ed in forma definitiva il 31 Marzo 1971.

⁽⁴⁾ Lavoro eseguito nell'ambito dei raggruppamenti di ricerca del C. N. R.

1. Sia D una \mathbb{Q} -algebra topologica; diremo che D è una \mathbb{Q} -algebra p -adica se esiste un sottoanello R di D verificante le proprietà seguenti:

1.1 R è un anello p -adico (cfr. 2. di [2]),

1.2 $D = \mathbb{Q}R$,

1.3 le potenze dell'ideale (p) di R sono un sistema fondamentale di intorno di 0 per la topologia di D .

In tale situazione si ha:

1.4 LEMMA. La \mathbb{Q} -algebra topologica D è completa. Inoltre ogni suo elemento a può porsi in una ed una sola maniera nella forma $a = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i p^i$, ove gli a_i sono elementi di $\text{molt } R$ (cfr. 2. di [2]) per i quali esiste r tale che $a_i = 0$ ogniqualevolta $i \leq r$.

DIM. Sia $i \rightarrow x_i$ una successione di Cauchy in D . Esiste n tale che per ogni $i \geq n$ si abbia $y_i = x_i - x_n \in R$. La successione $i \rightarrow y_i$, essendo di Cauchy, ed avendo gli elementi definitivamente in R , ha in R , un limite y . È subito visto che $x_n + y$ è il limite della $i \rightarrow x_i$.

Il secondo asserto è conseguenza del fatto che, dato $a \in D$, esiste un intero non negativo n tale che $p^n a \in R$, e delle considerazioni contenute in 2. di [2], C. V. D..

1.5 LEMMA. $\text{molt } R = \bigcap_{n=0}^{\infty} D^{p^n}$.

DIM. Essendo $R \subseteq D$, si ha $\text{molt } R = \bigcap_{n=0}^{\infty} R^{p^n} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} D^{p^n}$.

Viceversa: sia $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} D^{p^n}$. Poniamo $a = \sum_{i=r}^{\infty} a_i p^i$, ove ogni $a_i \in \text{molt } R$, e $a_r \neq 0$. Per ogni intero non negativo n esiste b_n tale che $b_n^{p^n} = a$. Poniamo $b_n = \sum_{i=r_n}^{\infty} b_{ni} p^i$, ove ogni $b_{ni} \in \text{molt } R$, e $b_{nr_n} \neq 0$.

Per ogni n si deve avere $b_{nr_n}^{p^n} p^{r_n p^n} = a_r p^r$; da 1.4 segue allora che $r_n = r = 0$. Quindi $a, b_1, b_2, \dots \in R$, onde $a \in \text{molt } R$, C. V. D..

1.6 LEMMA. La \mathbb{Q} -algebra topologica D è dotata di un solo sottoanello verificante le proprietà 1.1, 1.2, 1.3.

DIM. Sia S un sottoanello di D verificante le dette condizioni. Da 1.4 applicato ad S , segue che $S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i / a_i \in \text{molt } S \right\}$.

Da 1.5 applicato ad S segue che $\text{molt } S = \bigcap_{n=0}^{\infty} D^{p^n}$, e quindi che $\text{molt } S = \text{molt } R$; onde $\left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i / a_i \in \text{molt } S \right\} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i / a_i \in \text{molt } R \right\}$, cioè $S=R$, C. V. D..

Tenuto conto di 1.6, R si dirà l'anello p -adico associato a D , e si indicherà con R_D . Se $a \in D$, gli elementi $\dots, a_{-1}; a_0, \dots$ di $\text{molt } R_D$ di cui in 1.4, si diranno le componenti moltiplicative di a .

La categoria delle \mathbf{Q} -algebre p -adiche, con i morfismi dati dagli omomorfismi continui, si indicherà con \mathfrak{D} .

1.7 LEMMA. Siano B, D \mathbf{Q} -algebre p -adiche; un omomorfismo f di B in D è continuo se e solo se $fR_B \subseteq R_D$.

DIM. La condizione è ovviamente sufficiente. Quanto all'essere necessaria: sia $a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$, ove ciascun $a_i \in \text{molt } R_B$, un elemento di R_B . Per la continuità di f si ha $fa = \sum_{i=0}^{\infty} fa_i p^i$; per 1.5, ciascun $fa_i \in \text{molt } R_D$, onde $fa \in R_D$, C. V. D..

Indichiamo con W il funtore della categoria \mathfrak{P} degli anelli perfetti di caratteristica p nella categoria degli insiemi, che ad ogni oggetto k di \mathfrak{P} associa l'insieme Wk delle applicazioni $(\dots, x_{-1}; x_0, \dots)$ di \mathbf{Z} in k per ciascuna delle quali esiste r tale che $x_i = 0$ ogniqualvolta $i \leq r$, con la definizione ovvia sui morfismi.

Se D è una \mathbf{Q} -algebra p -adica, indichiamo con $w: D \rightarrow W_{\mathcal{Q}}R_D$ (cfr. 2. di [2]) l'applicazione che ad ogni elemento a di D associa l'elemento $(\dots, \varrho a_{-1}; \varrho a_0, \dots)$ di $W_{\mathcal{Q}}R_D$, ove $\dots, a_{-1}; a_0, \dots$ sono le componenti moltiplicative di a . Tale applicazione risulta bigettiva.

2. Detto S il funtore naturale di \mathfrak{P} nella categoria degli insiemi, e J un insieme qualsiasi di indici, interessa conoscere la struttura dell'anello perfetto costituito dai morfismi functoriali di W^J in S .

Indichiamo con F l'anello $\mathbf{F}_p[X_{j_i}^{p^{-\infty}} / j \in J, i \in \mathbf{Z}]$ (cfr. 1. di [2]), ove le X_{j_i} sono indeterminate su \mathbf{F}_p .

Per ogni applicazione $r: j \rightarrow r_j$ di J in \mathbf{Z} , indichiamo con X_r l'elemento $(X_{r, j_i} / j \in J, i \in \mathbf{Z})$ di $W^J F$ definito da: $X_{r, j_i} = 0$ se $i \leq r_j$, $X_{r, j_i} = X_{j_i}$ se $r_j < i$.

Ciò posto, se f è un morfismo functoriale di W^J in S , la famiglia (fX_r) di elementi di F verifica le seguenti proprietà:

2.1 fX_r è elemento del sottoanello $F_r = \mathbf{F}_p[X_{r,j}^{-\infty} / j \in J, i \in \mathbf{Z}]$ di F . F_r si identifica in modo naturale a F/K_r , ove K_r è il nucleo dell'endomorfismo di F definito da $X_{ji} \rightarrow X_{r,ji}$;

2.2 se $r \leq s$ nel senso che $s_j \leq r_j$ per ogni j , ossia che $K_s \subseteq K_r$, allora, nei termini dell'identificazione detta, fX_r è l'immagine di fX_s tramite l'omomorfismo naturale di F/K_s in F/K_r .

In altri termini la famiglia (fX_r) è elemento del limite del sistema inverso costituito dagli anelli F/K_r con i loro morfismi naturali, ossia del completamento \widehat{F} di F rispetto alla topologia (separata) avente i K_r per sistema fondamentale di intorni di 0.

È poi subito visto che dato un elemento (g_r) di $\widehat{F} = \varprojlim F/K_r$, esiste uno ed un solo morfismo functoriale g di W^J in S tale che $gX_r = g_r$, nei termini delle dette identificazioni.

Ciò posto, l'applicazione $f \rightarrow (fX_r) = \lim fX_r$ identifica l'anello dei morfismi functoriali di W^J in S , con \widehat{F} .

Il ruolo della struttura topologica di \widehat{F} è espresso dalle seguenti considerazioni, nelle quali ω_r indica l'omomorfismo canonico di \widehat{F} su tutto F/K_r , e quindi, tenuto conto delle identificazioni fatte, su tutto F_r . Si noti che ω_r induce l'applicazione identica su F_r .

2.3 Se $f \in \widehat{F}$, si ha $fX_r = \omega_r f$;

2.4 $\ker \omega_r$ è l'ideale costituito da tutti i morfismi functoriali di W^J in S che si annullano su tutti i $(b_{ji} / j \in J, i \in \mathbf{Z})$ per i quali $b_{ji} = 0$ ogniqualevolta $i \leq r_j$, o, il che è equivalente, che si annullano su X_r ;

2.5 la famiglia dei $\ker \omega_r$ è un sistema fondamentale di intorni di 0 per la topologia di \widehat{F} ;

2.6 se J è finito, dato $f \in \widehat{F}$, esiste una successione M_{-1}, M_{-2}, \dots di p monomi nelle X_{ji} (ossia di monomi nelle X_{ji} con esponenti del tipo mp^n con m intero non negativo ed n intero) tale che $\lim_{i \rightarrow -\infty} M_i = 0$ e che $f = \sum_{i=-\infty}^{-1} M_i$ (DIM. Per la finitezza di J , dall'essere $f = \lim_{i \rightarrow -\infty} fX_{(i)}$,

ove (i) indica l'applicazione di J in \mathbf{Z} di valore costante i . L'asserto segue quindi osservando che $f = \dots + (fX_{(-2)} - fX_{(-1)}) + fX_{(-1)}$, e che $fX_{(-1)}$ e gli $fX_{(i-1)} - fX_{(i)}$ sono somme di p -monomi nelle X_{ji} ;

2.7 dato un elemento (b_{ji}) di $W^J k$, con k anello perfetto di caratteristica p , esiste uno ed un solo omomorfismo λ di \widehat{F} in k , continuo rispetto alla topologia detta di \widehat{F} e a quella discreta di k , tale che $\lambda X_{ji} = b_{ji}$.

Se $f \in \widehat{F}$ si ha $f(b_{ji}/j \in J, i \in \mathbf{Z}) = \lambda f$. Tenuto conto di ciò, l'elemento f si indicherà impropriamente con $f(X_{ji}/j \in J, i \in \mathbf{Z})$; con tale posizione si ha $\lambda f(X_{ji}) = f(\lambda X_{ji})$.

3. Interessa in questo numero caratterizzare i morfismi functoriali di W e di $W \times W$ in W . Cominciamo ad osservare che la composizione di un tale morfismo con la proiezione di W sul proprio n -esimo fattore è un morfismo functoriale di W o di $W \times W$ in S .

Sia quindi K l'anello dei morfismi functoriali di W in S , ossia il completamento di $\mathbf{F}_p[X_i^{p^{-\infty}}/i \in \mathbf{Z}]$ rispetto alla topologia descritta nel n° precedente.

L'anello $(\mathbf{F}_p[X_i^{p^{-\infty}}; Y_i^{p^{-\infty}}])^\wedge$ dei morfismi functoriali di $W \times W$ in S , si identifica in modo naturale al completamento $K \overline{\times} K$ di $K \otimes K$ rispetto alla topologia un cui sistema fondamentale di intorni di 0 è dato dagli ideali $K_r \otimes K + K \otimes K_s$, ove K_r e K_s variano nel sistema fondamentale di intorni di 0 per K descritto nel n° precedente.

Dato un endomorfismo continuo u di K , e posto $uX_n = u_n(X_i)$, indichiamo con u^* l'endomorfismo functoriale di W definito da $u^*(b_i) = (\dots, u_{-1}(b_i); u_0(b_i), \dots)$.

Dato inoltre un omomorfismo continuo t di K in $K \overline{\times} K$, e posto $tX_n = = t_n(1 \overline{\times} X_i; X_i \overline{\times} 1)$, indichiamo con t^* il morfismo functoriale di $W \times W$ in W definito da $t^*((b_i), (b'_i)) = (\dots, t_{-1}(b_i; ; b'_i); t_0(b_i; ; b'_i), \dots)$.

Ciò posto è quasi immediato verificare che:

3.1 la corrispondenza $u \longleftrightarrow u^*$ identifica gli endomorfismi continui di K agli endomorfismi functoriali di W ;

3.2 la corrispondenza $t \longleftrightarrow t^*$ identifica gli omomorfismi continui di K in $K \overline{\times} K$ ai morfismi functoriali di $W \times W$ in W .

4. La costruzione delle operazioni e della topologia naturali che rendono ciascun $W_{\mathcal{Q}}R_D$ (con D \mathcal{Q} -algebra p -adica) una \mathcal{Q} -algebra p -adica isomorfa e omeomorfa a D , ossia delle operazioni e della topologia indotte in $W_{\mathcal{Q}}R_D$ da $w : D \rightarrow W_{\mathcal{Q}}R_D$, è data dal seguente:

4.1 TEOREMA. *Esiste uno ed un solo funtore \mathcal{R} di \mathbf{P} in \mathbf{D} verificante le proprietà:*

a) $S\mathcal{R} = W$, ove S denota il funtore canonico di \mathbf{D} nella categoria degli insiemi,

b) per ogni \mathbf{Q} -algebra p -adica D , l'applicazione $w: D \rightarrow W_0R_D$ è un isomorfismo bicontinuo di D su tutta $\mathcal{R}R_D$.

Siano $\mathbf{s}_0, \mathbf{p}_0$ gli elementi di $K \overline{\times} K$ definiti da:

$$\begin{aligned} & \mathbf{s}_0(\dots, 1 \overline{\times} X_{-1}; 1 \overline{\times} X_0, \dots; \dots, X_{-1} \overline{\times} 1; X_0 \overline{\times} 1, \dots) = \\ & = S_0(1 \overline{\times} X_0; X_0 \overline{\times} 1) + \sum_{r=1}^{\infty} \left(S_r(1 \overline{\times} X_{-r}, \dots, 1 \overline{\times} X_0; X_{-r} \overline{\times} 1, \dots, X_0 \overline{\times} 1) - \right. \\ & \left. - S_{r-1}(1 \overline{\times} X_{-r+1}, \dots, 1 \overline{\times} X_0; X_{-r+1} \overline{\times} 1, \dots, X_0 \overline{\times} 1) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}_0(\dots, 1 \overline{\times} X_{-1}; 1 \overline{\times} X_0, \dots; \dots, X_{-1} \overline{\times} 1; X_0 \overline{\times} 1, \dots) = \\ & = P_0(1 \overline{\times} X_0; X_0 \overline{\times} 1) + \sum_{r=1}^{\infty} \left(P_{2r}(1 \overline{\times} X_{-r}, \dots, 1 \overline{\times} X_r; X_{-r} \overline{\times} 1, \dots, X_r \overline{\times} 1) - \right. \\ & \left. - P_{2r-2}(1 \overline{\times} X_{-r+1}, \dots, 1 \overline{\times} X_{r-1}; X_{-r+1} \overline{\times} 1, \dots, X_{r-1} \overline{\times} 1) \right), \end{aligned}$$

ove $S_0, S_1, \dots, P_0, P_1, \dots$ sono gli elementi definiti in 6.1 di [2].

Esistono (e sono ovviamente unici) omomorfismi continui \mathbf{s}, \mathbf{p} di K in $K \overline{\times} K$ definiti da:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}X_n &= \mathbf{s}_n(\dots, 1 \overline{\times} X_{-1}; 1 \overline{\times} X_0, \dots; \dots, X_{-1} \overline{\times} 1; X_0 \overline{\times} 1, \dots) = \\ &= \mathbf{s}_0(\dots, 1 \overline{\times} X_{n-1}; 1 \overline{\times} X_n, \dots; \dots, X_{n-1} \overline{\times} 1; X_n \overline{\times} 1, \dots), \\ \mathbf{p}X_n &= \mathbf{p}_n(\dots, 1 \overline{\times} X_{-1}; 1 \overline{\times} X_0, \dots; \dots, X_{-1} \overline{\times} 1; X_0 \overline{\times} 1, \dots) = \\ &= \mathbf{p}_0(\dots, 1 \overline{\times} X_{n-1}; 1 \overline{\times} X_n, \dots; \dots, X_{-1} \overline{\times} 1; X_0 \overline{\times} 1, \dots). \end{aligned}$$

Sia infine W_0k , con k anello perfetto di caratteristica p , il sottinsieme di Wk costituito dagli elementi aventi nulle le componenti di indice negativo.

Ciò posto, dato un anello perfetto k di caratteristica p , la struttura algebrica e la struttura topologica di $\mathcal{R}k$ sono date dall'essere

$$\mathcal{R}k = (Wk; \mathbf{s}^*, \mathbf{p}^*; W_0k),$$

ove \mathbf{s}^* dà la struttura additiva, \mathbf{p}^* la struttura moltiplicativa di $\mathcal{R}k$, e W_0k è l'insieme soggiacente all'anello p -adico associato ad $\mathcal{R}k$.

DIM. Cominciamo col supporre l'esistenza di un tale funtore \mathcal{R} .

Sia k un anello perfetto di caratteristica p ; sia D una \mathbf{Q} -algebra p -adica tale che ${}_{\rho}R_D \cong k$ (una tale D esiste; ad esempio, nella terminologia del 7.1 di [2], si può prendere $D = \mathbf{Q} \otimes (Vk; \mathbf{S}^*, \mathbf{P}^*)$, con la topologia determinata dall'essere $R_D = (Vk; \mathbf{S}^*, \mathbf{P}^*)$); sia poi $l: {}_{\rho}R_D \rightarrow k$ un isomorfismo surgettivo.

In tale situazione l'applicazione $Wl: W{}_{\rho}R_D \rightarrow Wk$ determina un isomorfismo bicontinuo di $\mathcal{R}{}_{\rho}R_D$ su tutto $\mathcal{R}k$.

Se indichiamo con ϱ' l'omomorfismo l_{ρ} di R_D su k , e con w' la bigezione di D su Wk definita da $w' a = (\dots, \varrho' a_{-1}; \varrho' a_0, \dots)$, ove $\dots, a_{-1}; a_0, \dots$ sono le componenti moltiplicative di a , allora è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 & & W{}_{\rho}R_D \\
 & \nearrow w & \downarrow Wl \\
 D & & Wk \\
 & \searrow w' &
 \end{array}$$

onde w' è un isomorfismo bicontinuo di D su tutto $\mathcal{R}k$.

Come prima conseguenza di ciò, si ha che l'insieme soggiacente all'anello p -adico associato a $\mathcal{R}k$ deve essere $W_0 k$.

Siano poi $(\dots, \varrho' x_{-1}; \varrho' x_0, \dots)$, $(\dots, \varrho' y_{-1}; \varrho' y_0, \dots)$, con $x_i, y_i \in \text{molt } R_D$, due qualsiasi elementi di Wk , e sia $-r$ un intero non positivo tale che $x_i = y_i = 0$ per ogni $i \leq -r - 1$. Nella terminologia di 6.1 di [2], in $\mathcal{R}k$ si deve avere:

$$\begin{aligned}
 (\dots, \varrho' x_{-1}; \varrho' x_0, \dots) + (\dots, \varrho' y_{-1}; \varrho' y_0, \dots) &= w' \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} x_i p^i + \right. \\
 &+ \left. \sum_{-\infty}^{+\infty} y_i p^i \right) = w' \left(p^{-r} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_{-r+i} p^i + \sum_{i=0}^{\infty} y_{-r+i} p^i \right) \right) = \\
 &= w' \left(p^{-r} \sum_{i=0}^{\infty} p^i \text{ molt } S'_i(x_{-r}, \dots, x_{-r+i}; y_{-r}, \dots, y_{-r+i}) \right) = \\
 &= w' \left(\sum_{i=-r}^{\infty} p^i \text{ molt } S'_{r+i}(x_{-r}, \dots, x_i; y_{-r}, \dots, y_i) \right); \\
 (\dots, \varrho' x_{-1}; \varrho' x_0, \dots) \cdot (\dots, \varrho' y_{-1}; \varrho' y_0, \dots) &= \\
 &= w' \left(\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} x_i p^i \right) \cdot \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} y_i p^i \right) \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= w' \left(p^{-2r} \left(\sum_{i=0}^{\infty} x_{-r+i} p^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} y_{-r+i} p^i \right) \right) = \\
&= w' \left(p^{-2r} \sum_{i=0}^{\infty} p^i \text{ molt } P'_i(x_{-r}, \dots, x_{-r+i}; y_{-r}, \dots, y_{-r+i}) \right) = \\
&= w' \left(\sum_{i=-2r}^{\infty} p^i \text{ molt } P'_{2r+1}(x_{-r}, \dots, x_{r+i}; y_{-r}, \dots, y_{r+i}) \right).
\end{aligned}$$

Come conseguenza di ciò, ancora nella terminologia di 6.1 di [2], dati elementi qualsiasi $(\dots, \mathbf{0}, \sigma_{-r}, \dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots)$, $(\dots, \mathbf{0}, \omega_{-r}, \dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots)$ di Wk , in $\mathcal{R}k$ si deve avere :

$$\begin{aligned}
&(\dots, \mathbf{0}, \sigma_{-r}, \dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots) \dagger (\dots, \mathbf{0}, \omega_{-r}, \dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots) = \\
&= (\dots, \mathbf{0}, S_0(\sigma_{-r}; \omega_{-r}), \dots, S_{r-1}(\sigma_{-r}, \dots, \sigma_{-1}; \omega_{-r}, \dots, \omega_{-1}); \\
&S_r(\sigma_{-r}, \dots, \sigma_0; \omega_{-r}, \dots, \omega_0), \dots), \\
&(\dots, \mathbf{0}, \sigma_{-r}, \dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots) \cdot (\dots, \mathbf{0}, \omega_{-r}, \dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots) = \\
&= (\dots, \mathbf{0}, P_0(\sigma_{-r}; \omega_{-r}), \dots, P_{2r-1}(\sigma_{-r}, \dots, \sigma_{r-1}; \omega_{-r}, \dots, \omega_{r-1}); \\
&P_{2r}(\sigma_{-r}, \dots, \sigma_r; \omega_{-r}, \dots, \omega_r), \dots).
\end{aligned}$$

Le precedenti considerazioni provano, sotto l'ipotesi dell'esistenza, l'unicità di \mathcal{R} . Siccome inoltre, dato un anello perfetto k di caratteristica p , comunque si scelga una \mathbb{Q} -algebra p -adica D avente ${}_Q R_D$ isomorfo a k , e comunque si scelga un isomorfismo l di ${}_Q R_D$ su tutto k , la struttura di \mathbb{Q} -algebra p -adica che di conseguenza risulta indotta in Wk non risulta dipendere, come si è visto, dalla particolare scelta di D e di l ; l'esistenza di \mathcal{R} è pressoché immediata.

Sia quindi \mathcal{R} il funtore detto. L'asserto riguardante la struttura topologica degli $\mathcal{R}k$ è già stato provato.

La struttura additiva e quella moltiplicativa degli $\mathcal{R}k$ inducono morfismi functoriali \mathcal{R}_+ , \mathcal{R} . di $W \times W$ in W . Indichiamo con λ_n, μ_n i morfismi functoriali di $W \times W$ nel funtore canonico S di \mathbb{P} nella categoria degli insiemi, che si ottengono dalla composizione di \mathcal{R}_+ e di \mathcal{R} . con la proiezione di W sulla sua n -esima componente. Tenuto conto di 2. e di 3. e delle precedenti considerazioni si ha:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_0((\dots, \mathbf{0}, 1 \overline{\times} X_{-r}, \dots, 1 \overline{\times} X_{-1}; 1 \overline{\times} X_0, \dots), \\
&(\dots, \mathbf{0}, X_{-r} \overline{\times} 1, \dots, X_{-1} \overline{\times} 1; X_0 \overline{\times} 1, \dots)) =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} S_r (1 \overline{\times} X_{-r}, \dots, 1 \overline{\times} X_0; X_{-r} \overline{\times} 1, \dots, X_0 \overline{\times} 1) = \mathbf{s}_0;$$

e analogamente: $\mu_0 = \mathbf{p}_0$.

Sia poi k un qualsiasi anello perfetto di caratteristica p ; in $\mathcal{R}k$ si ha $p^{-n} (\dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots) = (\dots, \sigma_{n-1}; \sigma_n, \dots)$. Dati quindi elementi $(\dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots)$, $(\dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots)$ di $\mathcal{R}k$, e posto $(\dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots) + (\dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots) = (\dots, x_{-1}; x_0, \dots)$, $(\dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots) \cdot (\dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots) = (\dots, y_{-1}; y_0, \dots)$; dall'essere $(\dots, \sigma_{n-1}; \sigma_n, \dots) + (\dots, \omega_{n-1}; \omega_n, \dots) = (\dots, x_{n-1}; x_n, \dots)$, segue che $x_n = \lambda_n ((\dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots), (\dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots)) = \lambda_0 ((\dots, \sigma_{n-1}; \sigma_n, \dots), (\dots, \omega_{n-1}; \omega_n, \dots)) = \mathbf{s}_0 (\dots, \sigma_{n-1}; \sigma_n, \dots; \dots, \omega_{n-1}; \omega_n, \dots) = \mathbf{s}_n (\dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots; \dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots)$, ossia che $\lambda_n = \mathbf{s}_n$; e dall'essere $(\dots, \sigma_{n-1}; \sigma_n, \dots) \cdot (\dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots) = (\dots, y_{n-1}; y_n, \dots)$, segue che $y_n = \mu_n ((\dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots), (\dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots)) = \mu_0 ((\dots, \sigma_{n-1}; \sigma_n, \dots), (\dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots)) = \mathbf{p}_0 (\dots, \sigma_{n-1}; \sigma_n, \dots; \dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots) = \mathbf{p}_n (\dots, \sigma_{-1}; \sigma_0, \dots; \dots, \omega_{-1}; \omega_0, \dots)$ ossia che $\mu_n = \mathbf{p}_n$.

Essendo le \mathbf{s}_n le componenti di un morfismo functoriale di $W \times W$ in W , l'esistenza di \mathbf{s} e l'essere $\mathcal{R}_+ = \mathbf{s}^*$, è conseguenza di **3**. Analogamente si ottiene l'esistenza di \mathbf{p} e l'essere $\mathcal{R}_- = \mathbf{p}^*$, C. V. D..

5. Nel numero precedente è stato studiato un particolare funtore \mathcal{R} di \mathbb{P} in \mathfrak{D} verificante le proprietà:

5.1 $S\mathcal{R} = W$, ove S è il funtore canonico di \mathfrak{D} nella categoria degli insiemi;

5.2 per ogni anello perfetto k di caratteristica p , la \mathbb{Q} -algebra p -adica $\mathcal{R}k$ ha anello p -adico associato di residuo isomorfo a k ;

5.3 esiste un elemento h di K , tale che per ogni anello perfetto k di caratteristica p , l'applicazione h ristretta all'anello p -adico associato a $\mathcal{R}k$ sia un omomorfismo su tutto k , avente per nucleo (p) (nel caso considerato si ha $h = X_0$).

Le considerazioni seguenti danno la caratterizzazione di tutti i funtori di \mathbb{P} in \mathfrak{D} verificanti le proprietà 5.1, 5.2, 5.3, e la caratterizzazione di tutti gli isomorfismi (il termine, improprio, tenuto conto di 5.1, è usato nel senso ovvio) tra tali funtori.

Sia u un automorfismo bicontinuo di K ; tenuto conto di **3**., u^* risulta un automorfismo del funtore W . Ciò posto è subito visto che esiste uno ed un solo funtore \mathcal{R}_u di \mathbb{P} in \mathfrak{D} tale che u^* induca un isomorfismo di \mathcal{R} in \mathcal{R}_u .

Siano s_u, p_u gli omomorfismi continui di K in $K \overline{\otimes} K$ che rendono commutativi i diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \overline{\otimes} K \\ \uparrow u & \mathbf{s} & \uparrow u \overline{\otimes} u \\ K & \xrightarrow{s_u} & K \overline{\otimes} K \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \overline{\otimes} K \\ \uparrow u & \mathbf{p} & \uparrow u \overline{\otimes} u \\ K & \xrightarrow{p_u} & K \overline{\otimes} K \end{array}.$$

Dato un anello perfetto k di caratteristica p , si ha pressoché immediatamente (cfr. la dim. di 7.1 di [2]):

$$\mathcal{R}_u k = (Wk; ; s_u^*, p_u^*; u^* W_0 k),$$

ove s_u^* dà la struttura additiva, p_u^* dà la struttura moltiplicativa di $\mathcal{R}_u k$, e l'immagine $u^* W_0 k$ di $W_0 k$ tramite u^* , dà l'insieme soggiacente all'anello p -adico associato ad $\mathcal{R}_u k$.

È poi subito visto che l'elemento $(u^{-1})_0$ di K dà un omomorfismo dell'anello p adico associato a $\mathcal{R}_u k$ su tutto k , di nucleo (p) .

Quanto precede prova che \mathcal{R}_u verifica le condizioni 5.1, 5.2, 5.3; sussiste inoltre il seguente:

5.4 TEOREMA. *Al variare di u tra gli automorfismi bicontinui di K , gli \mathcal{R}_u sono i soli funtori di \mathbb{P} in \mathfrak{D} verificanti le condizioni 5.1, 5.2, 5.3.*

DIM. Sia \mathcal{R}' un funtore di \mathbb{P} in \mathfrak{D} verificante le proprietà 5.1, 5.2, 5.3, e sia $h \in K$ verificante 5.3 rispetto ad \mathcal{R}' . Indichiamo poi con $\mathcal{R}'_0 k$ l'anello p adico associato a $\mathcal{R}' k$.

Sia $(\dots, y_{-1}(X); y_0(X), \dots)$ l'elemento di $\text{molt } \mathcal{R}'_0 \mathbf{F}_p[X^{p^{-\infty}}]$ tale che $h(\dots, y_{-1}(X); y_0(X), \dots) = X$.

Dato comunque un anello perfetto k di caratteristica p , ed un elemento b di k , è detto f l'omomorfismo di $\mathbf{F}_p[X^{p^{-\infty}}]$ in k tale che $fX = b$; la continuità di $\mathcal{R}' f$ assicura che $\mathcal{R}' f(\mathcal{R}'_0 \mathbf{F}_p[X^{p^{-\infty}}]) \subseteq \mathcal{R}'_0 k$ (cfr. 1.7); di conseguenza dal sussistere del seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}'_0 \mathbf{F}_p[X^{p^{-\infty}}] & \xrightarrow{\mathcal{R}' f} & \mathcal{R}'_0 k \\ h \downarrow & & \downarrow h, \\ \mathbf{F}_p[X^{p^{-\infty}}] & \xrightarrow{f} & k \end{array}$$

si ottiene che $(\dots, y_{-1}(b); y_0(b), \dots) \in \text{molt } \mathcal{R}'_0 k$, e che $h(\dots, y_{-1}(b); y_0(b), \dots) = b$. In particolare $(\dots, y_{-1}(0); y_0(0), \dots)$ è l'elemento neutro rispetto alla somma in $\mathcal{R}' k$.

Tenuto conto di quanto precede, per ogni anello perfetto k di caratteristica p , possiamo considerare l'applicazione $T_k: \mathcal{R}k \rightarrow \mathcal{R}' k$ definita da

$$T_k(\dots, b_{-1}; b_0, \dots) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (\dots, y_{-1}(b_i); y_0(b_i), \dots) p^i.$$

Dalla dimostrazione di 4.1 segue che l'applicazione di $\mathcal{R}' k$ in $\mathcal{R}k$ definita da $\sum_{-\infty}^{+\infty} (\dots, y_{-1}(b_i); y_0(b_i), \dots) \cdot p^i \rightarrow (\dots, b_{-1}; b_0, \dots)$ è un isomorfismo bicontinuo. Allora anche T_k , come inversa dell'applicazione detta è un isomorfismo bicontinuo.

Si verifica direttamente che il complesso delle T_k definisce un morfismo functoriale T di \mathcal{R} in \mathcal{R}' che risulta essere un isomorfismo. Esiste quindi un automorfismo bicontinuo u di K tale che $u^* = T$ (cfr. 3.) onde $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_u$.

Che viceversa ogni \mathcal{R}_u , con u automorfismo bicontinuo di K , verifichi le dette proprietà è già stato provato, C.V.D..

5.5 COROLLARIO. *Siano u, v automorfismi bicontinui di K . Si ha $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_v$, se e solo se esiste $n \in \mathbf{Z}$ tale che $uv^{-1} = \pi^n$.*

DIM. Supponiamo che $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_v$; in tale caso, essendo u^* un isomorfismo di \mathcal{R} su \mathcal{R}_u , e $(v^{-1})^*$ un isomorfismo di \mathcal{R}_v e quindi di \mathcal{R}_u su \mathcal{R} , si ha che $(uv^{-1})^*$ è un automorfismo di \mathcal{R} . Poniamo $z = uv^{-1}$.

Se k è un qualsiasi anello perfetto di caratteristica p , siccome z^* è un automorfismo di $\mathcal{R}_0 k$ (qui $\mathcal{R}_0 k$, come al solito, indica l'anello p -adico associato a $\mathcal{R}k$), e l'applicazione definita da $(\dots, 0; b_0, b_1, \dots) \rightarrow b_0$ è un omomorfismo di $\mathcal{R}_0 k$ su tutto k di nucleo (p) , si ha che l'applicazione di k in \mathcal{R} definita da $c \rightarrow z_0(\dots, 0; c, b_1, \dots)$ è un automorfismo di k indipendente dalla scelta di b_1, b_2, \dots . Esiste allora un elemento $y(X)$ di $\mathbf{F}_p[X^{p^{-\infty}}]$ tale che $z_0(\dots, 0; c, b_1, \dots) = y(c)$.

Come nella dimostrazione del 7.2 di [2], si ha allora che esiste $n \in \mathbf{Z}$ tale che $y(X) = \pi^n X$, che $z^*(\dots, 0; c, 0, \dots) = (\dots, 0; \pi^n c, 0, \dots)$, e infine che $z^*(\dots, b_{-1}; b_0, \dots) = (\dots, \pi^n b_{-1}; \pi^n b_0, \dots)$. In altri termini risulta $z^* = (\pi^n)^*$, e quindi $uv^{-1} = \pi^n$.

Come nella dimostrazione del 7.2 di [2], si verifica infine che se $uv^{-1} = \pi^n$, allora $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_v$, C.V.D..

In modo pressoché identico alla dimostrazione del 7.3 di [2], si prova infine il seguente:

5.6 TEOREMA. *Siano u, v automorfismi bicontinui di K . Al variare di n in \mathbf{Z} , gli $(u^{-1} \pi^n v)^*$ sono i soli isomorfismi di \mathcal{R}_u su \mathcal{R}_v .*

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARSOTTI I., *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva*. Cap. 1, 2; Ann. Sc. Norm. Sup., v. XIV, 1964, pag. 1.
- [2] POLETTI M., *Anelli p-adici e loro rappresentazioni*; Ann. Sc. Norm. Sup., v. XXV, 1971, pag. 1.