ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

VINCENZO ANCONA
JEAN-PAUL SPEDER

Espaces de Banach-Stein

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 25, nº 4 (1971), p. 683-690
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1971_3_25_4_683_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ESPACES DE BANACH-STEIN

par VINCENZO ANCONA et JEAN-PAUL SPEDER

Introduction.

En 1953, Serre [8] a posé le problème de voir si l'espace total d'un fibré holomorphe dont la base et la fibre sont des espaces de Stein est aussi de Stein. Le problème a été résolu dans des cas particuliers par Serre [8] pour les fibrés vectoriels, par Stein [9] pour les revêtements non ramifiés, par Matsushima et Morimoto [7] dans le cas où le groupe structural du fibré est connexe, par G. Fischer [4] dans le cas où la fibre est un espace de Hilbert-Stein (i. e. un espace complexe séparable et convexe par rapport à un espace de Hilbert de fonctions holomorphes invariant par les automorphismes de l'espace). La démonstration de Fischer ne marche pas si on remplace l'espace de Hilbert par un espace de Banach, en effet, elle utilise le fait que le groupe linéaire d'un espace Hilbertien de dimension infinie est contractile (théorème de Kuiper [6]), ce qui n'est pas toujours le cas pour le groupe linéaire d'un Banach. Dans ce travail précisément, on donne une démonstration dans le cas d'un espace de Banach; plus exactement, on démontre le théorème suivant: « L'espace total d'un fibré holomorphe de base un espace de Stein et de fibre un espace de Banach-Stein est un espace de Stein ».

1) *Rappels et préliminaires.*

Pour les propriétés concernant les espaces de Stein, on renvoie à Gunning-Rossi [5]. Un espace complexe non réduit est par définition de Stein si sa réduction est un espace de Stein, donc dans la suite on peut se limiter à considérer des espaces réduits.

On appelle fibré holomorphe (localement trivial) la donnée (F, Π, X, Y) où F (espace total), X (base) et Y (fibre) sont des espaces complexes, et

Pervenuto alla Redazione il 10 Novembre 1970.

$\Pi : F \rightarrow X$ une application holomorphe (projection) tels que la condition suivante soit vérifiée :

Pour tout point x de X il existe un voisinage U de x et un isomorphisme analytique $\varphi : \Pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "\Pi"'] & & U \times Y \arrow[dl, "pr"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(pr première projection).

Le couple (U, φ) s'appelle carte de F en x.

Soient B un espace de Banach complexe, $L(B)$ l'algèbre de Banach des applications linéaires de B dans lui-même, $GL(B)$ le groupe des éléments inversibles de $L(B)$, X un espace complexe. Si U est un ouvert de X, on dit qu'une fonction de U dans B est analytique si en tout point de U son expression dans une carte est analytique. On note $\mathcal{O}^B$ le faisceau des germes de fonctions analytiques de X dans B ; c'est un sous-faisceau du faisceau $\mathcal{C}^B$ des germes de fonctions continues de X dans B. L'espace $\Gamma(X, \mathcal{O}^B)$ des sections globales de $\mathcal{O}^B$ est fermé dans $\Gamma(X, \mathcal{C}^B)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, donc c'est un espace de Fréchet pour cette topologie. Si X est un espace de Stein, les théorèmes B et C (théorème d'approximation d'Oka-Weil) sont vrais pour le faisceau $\mathcal{O}^B$ (cf. Bungart [1] pages 331, 332).

Un fibré banachique localement trivial $p : V \rightarrow X$ au-dessus de X de fibre B et groupe structural $GL(B)$ est dit analytique s'il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de X et des cartes $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times B$ tels que les fonctions de recollement soient analytiques (en tant qu'applications dans $L(B)$). Une section de V au-dessus de X est dite analytique si son expression à travers les φ_i est analytique. Notons $\mathcal{V}$ le faisceau des germes de sections analytiques de V au-dessus de X.

D'après Bungart [2] (théorème 4.2), pour tout compact spécial K de X il existe une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow (\mathcal{O}^B)^{n_k} \rightarrow \ldots \rightarrow (\mathcal{O}^B)^{n_0} \xrightarrow{f} \mathcal{V} \rightarrow 0$$

sur un voisinage de K et les composantes de chaque morphisme sont des fonctions analytiques à valeurs dans $L(B)$, localement dans le cas de f. Si

X est un espace de Stein, tout compact est inclus dans un compact spécial ([3] p. 99). Sous cette condition, et si K est holomorphiquement convexe, on en déduit en particulier la suite exacte:

$$(\mathcal{O}^B(K))^{n_0} \xrightarrow{f} \mathcal{V}(K) \to 0$$

d'où une topologie sur $\mathcal{V}(K)$ définie par la semi-norme quotient qu'on notera $\|\cdot\|_K$ par abus. Cette topologie est indépendante de la résolution choisie et la semi-norme $\|\cdot\|_K$ est définie à équivalence près. On munit $\Gamma(X, \mathcal{V})$ de la topologie définie à partir des $\mathcal{V}(K)$ qui en fait un espace de Fréchet séparé. Le théorème B est vrai pour $\mathcal{V}$ et si Z est un sous-espace analytique fermé de X et $\mathcal{V}^0$ le faisceau des germes de sections analytiques de V qui s'annulent sur Z il est valable encore pour $\mathcal{V}^0$. On en déduit la

PROPOSITION. *Soient X un espace de Stein, Z un sous-espace analytique fermé de X, V un fibré analytique banachique sur X. Toute section analytique de V au-dessus de Z se prolonge en une section analytique au-dessus de X.*

On utilisera la proposition précédente dans le cas où Z est réduit à un point.

Enfin, on démontre pour $\mathcal{V}$ exactement comme dans Gunning-Rossi [5] (théorème 11 page 241) le théorème C, qu'on utilisera sous cette forme:

THEOREME D'APPROXIMATION. *Soient X un espace de Stein, V un fibré analytique banachique sur X, K un compact de X holomorphiquement convexe. Pour tout nombre réel strictement positif ε, pour toute section analytique t de V au-dessus d'un voisinage de K, il existe une section analytique σ au-dessus de X telle que*:

$$\|\sigma - t\|_K \leq \varepsilon$$

2) *Le théorème*

DEFINITION. *Soit Y un espace complexe. On dit que Y est un espace de Banach-Stein* s'il existe un sous-espace vectoriel B de $\mathcal{O}(Y)$ et une structure d'espace de Banach sur B pour laquelle l'injection canonique de B dans $\mathcal{O}(Y)$ est continue tels que les conditions suivantes soient satisfaites

i) pour tout automorphisme φ de Y on a $\varphi^*(B) = B$ (ce qui entraîne que φ^*/B appartient à $L(B)$ en vertu du théorème du graphe fermé)

ii) pour tout espace analytique X et pour tout automorphisme Φ de $X \times Y$ au-dessus de X (i. e. $\Phi \in \mathrm{Aut}(X \times Y)$ et il commute avec la projection de $X \times Y$ sur X) l'application:

$$x \to (\Phi_x)^* | B \text{ de } X \text{ dans } L(B) \text{ où } \Phi_x(y) = \Phi(x, y)$$

est analytique.

iii) *a*) Y est B-séparable (i. e. B sépare les points de Y et pour tout point y de Y il existe dans B un nombre fini de fonctions qui forment un système de coordonnées locales de Y en y).

b) Y est B-convexe (i. e. pour toute suite discrète infinie de points de Y il existe dans B uue fonction non bornée sur la suite).

THEOREME. *Soit* (F, Π, X, Y) *un fibré holomorphe localement trivial de base* X, *fibre* Y, *espace total* F, *projection* Π. *Si* X *est un espace de Stein et* Y *un espace de Banach Stein, alors* F *est un espace de Stein.*

Démonstration.

Soit $B \subset \mathcal{O}(Y)$ un espace de Banach satisfaisant la définition ci-dessus. La démonstration consiste essentiellement à construire des éléments de $\mathcal{O}(F)$ è partir des sections analytiques d'un fibré analytique banachique V de base X et fibre B.

Construction de V:

Soit $x_0 \in X$; sur l'ensemble:

$$\Lambda_{x_0} = \{(\varphi, \alpha) : \varphi \text{ carte de } F \text{ en } x_0 ,\ \alpha \in B\}$$

on considère la relation d'équivalence

$$(\varphi, \alpha) \backsim (\psi, \beta) \Longleftrightarrow \varphi^*_{x_0}(\alpha) = \psi^*_{x_0}(\beta).$$

Soient $V_{x_0} = \Lambda_{x_0}/\backsim$, $V = \bigcup_{x \in X} V_x$, $p : V \to X$ la projection canonique. Si (U, φ) est une carte de F au voisinage de x on définit une bijection

$$\tilde{\varphi} : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times B$$

en posant pour $y \in U$ et $(\varphi, \alpha) \in V_y$, $\tilde{\varphi}[(\varphi, \alpha)] = (y, \alpha)$. On prend $(U, \tilde{\varphi})$ comme carte de V au voisinage de x et on voit, d'après les conditions ii) et iii) de la définition d'espace de Banach-Stein que de telles cartes se recollent de façon à faire de V un fibré analytique banachique de base X et fibre B. De plus, si $\mathcal{V}$ est le faisceau des germes de sections analytiques de V, l'application naturelle de $\Gamma(X, \mathcal{V})$ dans $\mathcal{O}(F)$ est injective continue pour les topologies de la convergence uniforme sur les compacts; dans la suite, on identifiera les éléments de $\Gamma(X, \mathcal{V})$ avec leurs images dans $\mathcal{O}(F)$.

F *est* $\Gamma(X, \mathcal{V})$*-séparable.*

1) Soient q_1 et q_2 deux points de F distincts; on peut supposer que $\Pi(q_1) = \Pi(q_2) = x$. Si φ est une carte de F au voisinage de x, il

existe un élément α de B tel que $\alpha(\varphi_x(q_1)) \neq \alpha(\varphi_x(q_2))$. Une section σ de V au-dessus de X telle que $\sigma(x) = (\varphi, \alpha)$ sépare q_1 et q_2.

2) Soient q un point de F, $x = \Pi(q)$, φ une carte de F au voisinage de x, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un système de coord onnées de Y au voisinage de $\varphi_x(q)$ formé d'éléments de B, $(f_1, \dots, f_m)$ un système de coordonnées de X au voisinage de x formé de fonctions globales. Si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont des sections de V au-dessus de X telles que $\sigma_i(x) = (\varphi, \alpha_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ il est clair que $(f_1 \circ \Pi, \dots, f_m \circ \Pi, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est un système de coordonnées de F au voisinage de q formé de fonctions globales

F est holomorphiquement convexe.

Soit $(q_i)_i$ une suite discrète infinie d'éléments de F. Pour tout i on pose $x_i = \Pi(q_i)$.

a) Si les x_i forment une suite discrète infinie dans X, il existe une fonction f holomorphe sur X non bornée sur la suite $(x_i)_i$; alors $f \circ \Pi$ est une fonction holomorphe sur F non bornée sur $(q_i)_i$.

b) Si pour tout i x_i est égal à x, on prend une carte φ de F au voisinage de x; il existe α dans B non bornée sur $(\varphi_x(q_i))_i$, suite discrète infinie de Y. Une section de V au-dessus de X prenant en x la valeur (φ, α) est non bornée sur $(q_i)_i$.

c) Supposons maintenant que les x_i forment une suite infinie convergente; soit x_0 la limite.

Pour tout entier n on considère l'ensemble:

$$\Gamma_n = \{\sigma \in \Gamma(X, \mathcal{V}) : \exists\, i, \, |\sigma(q_i)| > n\}$$

Γ_n est ouvert.

Soient $\sigma_0 \in \Gamma_n$ et i tels que $|\sigma_0(q_i)| > n$; il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|\sigma_0(q_i)| > n + \varepsilon$; il existe un compact K de X holomorphiquement convexe et $\delta > 0$ tels que:

$$\| \sigma - \sigma_0 \|_K < \delta \Longrightarrow |\sigma(q_i) - \sigma_0(q_i)| < \varepsilon$$

donc

$$\| \sigma - \sigma_0 \|_K < \delta \Longrightarrow \sigma \in \Gamma_n$$

Γ_n est partout dense.

Il suffit de montrer que la section nulle est adhérente à Γ_n. En effet, soient σ_0 un élément de $\Gamma(X, \mathcal{V})$, K un compact de X holomorphiquement convexe, ε un réel strictement positif et supposons que la section nulle est adhérente à Γ_m pour tout m et que σ_0 n'appartient pas à Γ_n. Il existe une section σ de Γ_{2n} telle que $\|\sigma\|_K < \varepsilon$; la section $\sigma_0 + \sigma$ appartient alors à Γ_n (soit i tel que $|\sigma(q_i)| > 2n$ on a $|(\sigma_0 + \sigma)(q_i)| > n$ car $\sigma_0 \notin \Gamma_n$) et de plus $\|(\sigma+\sigma_0)-\sigma_0\|_K=\|\sigma\|_K<\varepsilon$. Soient K un compact de X holomorphiquement convexe tel que x_0 appartienne à $\overset{\circ}{K}$ et $(\mathcal{O}^B)^r \xrightarrow{f} \mathcal{V} \to 0$ une suite exacte au voisinage de K. Si (U, φ) est une carte de F au voisinage de x_0 telle que U soit inclus dans K et K_1 est un voisinage compact holomorphiquement convexe, inclus dans U, de x_0, il existe une constante M strictement positive telle que pour tout $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{V})$ on ait

$$\|\sigma\|_{K_1} \leq M \sup_{x \in K_1} \|\tilde{\varphi}_x\, \sigma(x)\|$$

où $\|\cdot\|_{K_1}$ est la semi-norme induite par f sur $\mathcal{V}(K_1)$. On peut supposer que tous les x_i appartiennent à K_1. Soit alors $\varepsilon>0$. On a successivement:

$$-\ \exists\, \alpha \in B, \quad \exists\, j \ \text{t. q.}\ \|\alpha\| < \varepsilon/3M \quad \text{et} \quad |\alpha(\varphi_{x_j}(q_j)| > n+1$$

(car les $\varphi_{x_i}(q_i)$ forment une suite discrète infinie de Y, et Y est convexe par rapport à B).

$$-\ \exists\, \delta > 0 \ \text{t. q.}\ \|\beta-\alpha\| < \delta \Longrightarrow |\beta(\varphi_{x_j}(q_j))| > n$$

(car l'injection de B dans $\mathcal{O}(Y)$ est continue).

Soient $s \in \Gamma(U, \mathcal{V})$ tel que pour tout $x \in U$ $s(x)=\tilde{\varphi}_x^{-1}(\alpha)$ et $\|\cdot\|_{K, x_j}$ la semi-norme induite par f sur $\mathcal{V}_{x_j}$.

LEMME. Il existe $t \in \Gamma(K, \mathcal{V})$ tel que

$$\|t\|_K < \|s_{x_j}\|_{K, x_j} + \varepsilon/3$$

$$\|t_{x_j} - s_{x_j}\|_{K, x_j} = 0$$

où s_{x_j} et t_{x_j} sont les germes respectifs de s et t en x_j.

Démonstration du lemme. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{O}^B(K))^r & \longrightarrow & (\mathcal{O}^B_{x_j})^r \\
f \big\downarrow & & \big\downarrow f_{x_j} \\
\mathcal{V}(K) & \longrightarrow & \mathcal{V}_{x_j}
\end{array}$$

où f et f_{x_j} sont surjectives et continues. Si $c=\|s_{x_j}\|_{K, x_j}$, il existe g appartenant à $(\mathcal{O}^B_{x_j})^r$ tel que $f_{x_j}(g)=s_{x_j}$ et $\|g(x_j)\|<c+\varepsilon/3$. Soit t l'image

par f de l'élément T de $(\mathcal{O}^B(K))^r$ égal en tout point de K à $g(x_j)$. On a :

$$\| t \|_K = \inf_{T'} \{ \| T' \| : T' \in (\mathcal{O}^B(K))^r \quad \text{et} \quad f(T') = t \}$$

d'où

$$\| t \|_K \leq \| T \| = \| g(x_j) \| < c + \varepsilon/3.$$

De plus

$$\| t_{x_j} - s_{x_j} \|_{K, x_j} = \inf_{H} \{ \| H(x_j) \| : H \in (\mathcal{O}^B_{x_j})^r \quad \text{et} \quad f_{x_j}(H) = t_{x_j} - s_{x_j} \}$$

d'où

$$\| t_{x_j} - s_{x_j} \|_{K, x_j} \leq \| (T_{x_j} - g)(x_j) \| = \| g(x_j) - g(x_j) \| = 0$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

$$- \exists N > 0 \text{ t. q. } \forall \sigma \in \Gamma(U, \mathcal{V}) \, \| \tilde{\varphi}_{x_j} \sigma(x_j) \| < N \| \sigma \|_{K, x_j}$$

$$- \exists \sigma \in \Gamma(X, \mathcal{V}) \text{ t. q. } \| \sigma - t \|_K < \varepsilon'$$

avec

$$\begin{cases} \varepsilon' < \varepsilon \\ 0 < \varepsilon' < \delta/N \end{cases}$$

(d'après le théorème d'approximation).

Finalement,

$$\| \sigma \|_K < \| t \|_K + \varepsilon' < \| s_{x_j} \|_{K, x_j} + \varepsilon/3 + \varepsilon' < \| s \|_{K_1} + 2\varepsilon/3 \leq M \| \alpha \| + 2\varepsilon/3 < \varepsilon$$

et

$$\| \tilde{\varphi}_{x_j} \sigma(x_j) - \alpha \| \leq N \| \sigma_{x_j} - s_{x_j} \|_{K, x_j} \leq N (\| \sigma_{x_j} - t_{x_j} \|_{K, x_j} + \| t_{x_j} - s_{x_j} \|_{K, x_j}) =$$

$$= N \| \sigma_{x_j} - t_{x_j} \|_{K, x_j} < N \varepsilon' < \delta$$

d'où $| \sigma(q_j) | > N$. La section nulle est donc bien adhérente à Γ_n et Γ_n est partout dense.

Enfin, comme $\Gamma(X, \mathcal{V})$ est un espace de Baire, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ n'est pas vide; tout élément de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ est non borné sur $(q_i)_i$.

Cas général : On peut toujours extraire de la suite $(x_i)_i$ une suite qui se trouve soit dans le cas a), soit dans le cas c).

F est donc holomorphiquement convexe et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BUNGART (L.), *Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas.* Trans. Am. Math. Soc. 111 (1964).

[2] BUNGART (L.), *On analytic fiber bundles-I.* Topology 7 (1968).

[3] CARTAN (H.), *Espaces fibrés analytiques.* Symposium International de topologia algebraica, 1958, Universidad National Autónoma de Mexico.

[4] FISCHER (G.), *Holomorph-Vollständige Faserbündel.* Math. Ann. 180 (1969).

[5] GUNNING (R.) et ROSSI (H.), *Analytic functions of several complex variables.* Prentice Hall, N. J. 1965.

[6] KUIPER (N. H.), *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space.* Topology 3 (1965).

[7] MATSUSHIMA (Y.) et MORIMOTO (A.), *Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein.* Bull. Soc. Math. France 88 (1960).

[8] SERRE (J. P.), *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein.* Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles 1953.

[9] STEIN (K.), *Überlagerungen holomorph vollständiger Komplexer Räume.* Arch. der Math. 7 (1956).