ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

B. BIGOLIN

Osservazioni sulla coomologia del $\partial\bar{\partial}$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, no 3 (1970), p. 571-583

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_3_571_0>

OSSERVAZIONI SULLA COOMOLOGIA DEL $\partial\bar{\partial}$

B. BIGOLIN

In questa nota mi propongo di apportare alcuni miglioramenti al contenuto della mia tesi [1].

In primo luogo dimostro come la risoluzione del fascio $\mathcal{H}$ delle funzioni pluriarmoniche possa essere prolungata indefinitamente evitando il ricorso alla dualità di Serre.

Nella tesi ottenevo, per ogni scelta degli interi p e q, una risoluzione del fascio $\mathcal{H}$:

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{L}^0_{(p,q)} \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}^1_{(p,q)} \xrightarrow{h^1} \dots,$$

i cui ultimi tre termini erano di questo tipo:

$$\dots \to \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+2,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+2} \end{matrix} \quad ;$$

adesso faccio vedere che la successione si prolunga con l'operatore d nel modo seguente:

$$\mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+2,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+2} \end{matrix} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+3,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+2,q+2} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+3} \end{matrix} \xrightarrow{d} \dots .$$

Questa utile osservazione mi è stata comunicata da A. Andreotti e F. Norguet.

In secondo luogo dimostro che i gruppi $V^{p,q}$ e $\Lambda^{p,q}$, di cui è richiamata la definizione nel § 2, danno lo stesso risultato sia che si calcolino in forme a coefficienti C^∞, sia che si calcolino in forme a coefficienti distribuzioni; ciò che permette di dare al teorema di dualità un aspetto più gradevole.

Pervenuto alla Redazione il 3 Marzo 1970.

L'autore è stato sostenuto dalla Fondazione « Francesco Severi » e dal Gruppo di ricerca per la Matematica del C. N. R..

§ 1. La risoluzione del $\partial\bar{\partial}$.

a) Sia X una varietà analitica complessa (di dimensione n su $\mathbb{C}$), su cui consideriamo i seguenti fasci di forme differenziali:

$\mathcal{K}^{p,q}$ = fascio dei germi di (p, q)-correnti;

$\mathcal{A}^{p,q}$ = » » » » (p, q)-forme C^∞;

Ω^p = » » » » p-forme olomorfe;

$\overline{\Omega}^q$ = » » » » q-forme antiolomorfe;

$\mathcal{H}$ = » » » » funzioni pluriarmoniche (i. e. $\partial\bar{\partial}$-chiuse).

La tesi [1] è dedicata essenzialmente alla costruzione di certe risoluzioni del fascio $\mathcal{H}$, risoluzioni che sono del tipo:

$$(1) \quad 0 \to \mathcal{H} \to \begin{matrix}\overline{\Omega}^1\\ \oplus \\ \mathcal{A}^{0,0}\\ \oplus\\ \Omega^1\end{matrix} \to \begin{matrix}\mathcal{A}^{0,1}\\ \oplus\\ \mathcal{A}^{1,0}\end{matrix} \to \mathcal{A}^{1,1} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{22} \xrightarrow{d} \begin{matrix}\mathcal{A}^{3,2}\\ \oplus\\ \mathcal{A}^{2,3}\end{matrix};$$

$$(2) \quad 0 \to \mathcal{H} \to \begin{matrix}\overline{\Omega}^1\\ \oplus \\ \mathcal{A}^{0,0}\\ \oplus\\ \Omega^1\end{matrix} \to \begin{matrix}\overline{\Omega}^2\\ \oplus \\ \mathcal{A}^{0,1}\\ \oplus\\ \mathcal{A}^{1,0}\end{matrix} \to \begin{matrix}\mathcal{A}^{0,2}\\ \oplus\\ \mathcal{A}^{1,1}\end{matrix} \to \mathcal{A}^{1,2} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{2,3} \xrightarrow{d} \begin{matrix}\mathcal{A}^{3,3}\\ \oplus\\ \mathcal{A}^{2,4}\end{matrix}$$

$$(3) \quad 0 \to \mathcal{H} \to \begin{matrix}\overline{\Omega}^1\\ \oplus \\ \mathcal{A}^{0,0}\\ \oplus\\ \Omega^1\end{matrix} \to \begin{matrix}\overline{\Omega}^2\\ \oplus \\ \mathcal{A}^{0,1}\\ \oplus\\ \mathcal{A}^{1,0}\\ \oplus\\ \Omega^2\end{matrix} \to \begin{matrix}\mathcal{A}^{0,2}\\ \oplus\\ \mathcal{A}^{1,1}\\ \oplus\\ \mathcal{A}^{2,0}\end{matrix} \to \begin{matrix}\mathcal{A}^{1,2}\\ \oplus\\ \mathcal{A}^{2,1}\end{matrix} \to \mathcal{A}^{2,2} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{3,3} \xrightarrow{d}$$

In generale, fissata una coppia (p, q) di interi non negativi ed entrambi $\leq n = \dim_{\mathbb{C}} X$, si trova una risoluzione:

$$0 \to \mathcal{H} \xrightarrow{i} \mathcal{L}^0_{(p,q)} \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}^1_{(p,q)} \xrightarrow{h^1} \dots \to \mathcal{L}^{p+q}_{(p,q)} = \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{L}^{p+q+1}_{(p,q)} =$$

(4)

$$= \mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \mathcal{L}^{p+q+2}_{(p,q)} = \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+2,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+2} \end{matrix},$$

dove $\mathcal{L}^i_{(p,q)}$ è:

1) somma diretta di un fascio fine, di un $\mathcal{O}$-modulo localmente libero, e da un $\bar{\mathcal{O}}$-modulo localmente libero, per i compreso tra 0 e $\sup(p, q)$,

2) fine, per $i \geq \sup(p, q)$,

e dove gli omomorfismi h^i sono indotti (come in (1), (2), (3)) da ∂, $\bar{\partial}$ e dalla iniezione, compatibilmente con le esigenze della bigraduazione. (Per una descrizione dettagliata della (4), si può vedere il Teor. (2.1) del § 2 di [1]).

b) La possibilità di completare a destra la risoluzione (4) in modo «naturale», e precisamente per mezzo dell'ordinario operatore di differenziazione esterna d:

$$\dots \to \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+2,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+2} \end{matrix} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+3,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+2,q+2} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+3} \end{matrix} \xrightarrow{d} \dots$$

(5)

$$\dots \to \begin{matrix} \mathcal{A}^{n-1,n} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{n,n-1} \end{matrix} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{n,n} \to 0,$$

poggia sul seguente:

LEMMA (1.1). Siano p e q degli interi ≥ 0, j un intero > 0. In $\mathbb{C}^n$, sia $\varphi = \sum_{\substack{\alpha>0,\, \beta>0 \\ \alpha+\beta=j}} \varphi_{\alpha\beta}$ una forma differenziale, con $\varphi_{\alpha,\beta}$ forma di tipo $(p + \alpha, q + \beta)$.

Allora la condizione $d\varphi = 0$ equivale all'esistenza di forme $\psi_{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = j$, $\psi_{\alpha\beta}$ di tipo $(p + \alpha, q + \beta)$) tali che, posto $\psi = \sum_{\substack{\alpha>0,\, \beta>0 \\ \alpha+\beta=j}} \psi_{\alpha\beta}$, si abbia:

$$d\psi = \varphi.$$

DIMOSTRAZIONE.

$$d\varphi = \sum_{\substack{\alpha>0,\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=j+1}} (\partial\varphi_{\alpha,\beta} + \bar\partial\varphi_{\alpha,\beta}) = \sum_{\substack{\alpha>0,\ \beta\geq 0 \\ \alpha+\beta=j}} \partial\varphi_{\alpha,\beta+1} + \sum_{\substack{\alpha\geq 0,\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=j}} \bar\partial\varphi_{\alpha+1,\beta} =$$

$$= \bar\partial\varphi_{1,j} + \sum_{\substack{\alpha>0,\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=j}} (\partial\varphi_{\alpha,\beta+1} + \bar\partial\varphi_{\alpha+1,\beta}) + \partial\varphi_{j,1}\,.$$

Tenuto conto dei tipi di forme con cui operiamo, la condizione $d\varphi = 0$ equivale all'insieme di condizioni:

$$\begin{cases} \bar\partial\varphi_{1,j} = 0 & (*_1) \\ \partial\varphi_{\alpha,\beta+1} + \bar\partial\varphi_{\alpha+1,\beta} = 0, \quad \text{per} \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha+\beta=j & (*_2) \\ \partial\varphi_{j,1} = 0. & (*_3) \end{cases}$$

La condizione $(*_1)$ implica $\varphi_{1,j} = \bar\partial\psi_{1,j-1}$; di conseguenza, la prima delle condizioni $(*_2)$ (ottenuta per $\alpha = 1$) si scrive:

$$\bar\partial(\varphi_{2,j-1} - \partial\psi_{1,j-1}) = 0,$$

da cui:

$$\varphi_{2,j-1} = \partial\psi_{1,j-1} + \bar\partial\psi_{2,j-2}\,.$$

La seconda delle condizioni $(*_2)$ (ottenuta per $\alpha = 2$) diviene allora:

$$\bar\partial(\varphi_{3,j-2} - \partial\psi_{2,j-2}) = 0,$$

da cui:

$$\varphi_{3,j-2} = \partial\psi_{2,j-2} + \bar\partial\psi_{3,j-3} \ldots$$

Così proseguendo, si ricavano forme differenziali:

$$\psi_{\alpha,\beta}\,, \qquad\qquad 1 \leq \alpha \leq j, \quad \alpha+\beta=j$$

verificanti:

$$\begin{cases} \varphi_{1,j} = \bar\partial\psi_{1,j-1} & (*_4) \\ \varphi_{\alpha,\beta+1} = \partial\psi_{\alpha-1,\beta+1} + \bar\partial\psi_{\alpha,\beta}\,, \quad 1 < \alpha \leq j,\ \alpha+\beta=j. & (*_5) \end{cases}$$

L'ultima delle $(*_5)$ (ottenuta per $\alpha = j$) dà, in particolare:

$$\varphi_{j,1} = \partial\psi_{j-1,1} + \bar\partial\psi_{j,0}\,,$$

onde, sostituendo in $(*_3)$, si ottiene:

$$\partial\bar\partial\psi_{j,0} = 0.$$

Da quest'ultima relazione risulta:

$$\bar\partial\psi_{j,0} = \partial\theta_{j-1,1}, \quad \text{con} \quad \bar\partial\theta_{j-1,1} = 0\,;$$

e di conseguenza

$$(*_6) \qquad \varphi_{j,1} = \partial(\psi_{j-1,1} + \theta_{j-1,1}).$$

Se conveniamo di indicare $\psi_{j-1,1} + \theta_{j-1,1}$ senz'altro con $\psi_{j-1,1}$ (la « nuova » $\psi_{j-1,1}$ è ottenuta alterando la « vecchia » $\psi_{j-1,1}$ con un $\bar\partial$-cociclo), le $(*_4)$, $(*_5)$, $(*_6)$ messe insieme dicono che:

$$\begin{cases} \varphi_{1,j} = \bar\partial\psi_{1,j-1} \\ \varphi_{\alpha,\beta+1} = \partial\psi_{\alpha-1,\beta+1} + \bar\partial\psi_{\alpha,\beta}\,, & 1 < \alpha < j,\ \alpha+\beta = j \\ \varphi_{j,1} = \partial\psi_{j-1,1}\,. \end{cases}$$

Di qui viene finalmente:

$$\varphi = \sum_{\substack{\alpha>0,\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=j+1}} \varphi_{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{\alpha>0,\ \beta\geq 0 \\ \alpha+\beta=j}} \varphi_{\alpha,\beta+1} =$$

$$= \bar\partial\psi_{1,j-1} + \sum_{\substack{1<\alpha<j \\ \alpha+\beta=j}} \partial\psi_{\alpha-1,\beta-1} + \sum_{\substack{1<\alpha<j \\ \alpha+\beta=j}} \bar\partial\psi_{\alpha,\beta} + \partial\psi_{j-1,1} =$$

$$= \partial\left(\sum_{\substack{1<\alpha\leq j \\ \alpha+\beta=j}} \psi_{\alpha-1,\beta+1}\right) + \bar\partial\left(\sum_{\substack{0<\alpha<j \\ \alpha+\beta=j}} \psi_{\alpha,\beta}\right) = d\left(\sum_{\substack{0<\alpha<j \\ \alpha+\beta=j}} \psi_{\alpha,\beta}\right).$$

c. v. d..

Osservazione. Per j abbastanza grande $(j \geq n - \inf(p,q))$, ciò non è altro che il lemma di Poincaré per l'operatore d.

c) Riprendiamo la risoluzione (5), di cui vogliamo dimostrare l'esattezza; posto $\mathcal{L}^i_{(p,q)} = \bigoplus\limits_{\substack{\alpha>0,\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=i-(p+q-1)}} \mathcal{A}^{p+\alpha,\,q+\beta}$, essa si scrive:

$$\ldots \to \mathcal{L}^{p+q}_{(p,q)} = \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar\partial} \mathcal{L}^{p+q+1}_{(p,q)} \xrightarrow{d} \mathcal{L}^{p+q+2}_{(p,q)} \xrightarrow{d} \ldots \to \mathcal{L}^{2n-1}_{(p,q)} = \mathcal{A}^{n,n} \to 0.$$

L'inclusione $\mathrm{Im}\,(\mathcal{L}^{p+q+j}_{(p,q)} \xrightarrow{d} \mathcal{L}^{p+q+j+1}_{(p,q)}) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathcal{L}^{p+q+j+1}_{(p,q)} \xrightarrow{d} \mathcal{L}^{p+q+j+2}_{(p,q)})$ è evidente; l'inclusione inversa è il Lemma (1.1), applicato alle sezioni locali su un aperto coordinato (che possiamo supporre di Stein) della varietà-base X.

A questo punto non rimane che saldare le due risoluzioni (4) e (5), per ottenere (senza più le eccezioni di [1]) il:

TEOREMA (1.2). Su ogni varietà analitica complessa di dimensione n (su $\mathbb{C}$), e per ogni (fissata) coppia di interi non negativi (p, q), con p e $q \leq n$, si ha la seguente successione esatta di fasci:

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{L}^0_{(p,q)} \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}^1_{(p,q)} \xrightarrow{h^1} \dots \to \mathcal{L}^{p+q}_{(p,q)} = \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{L}^{p+q+1}_{(p,q)} =$$

$$= \mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \mathcal{L}^{p+q+2}_{(p,q)} \xrightarrow{d} \dots \to \mathcal{L}^{2n-1}_{(p,q)} = \mathcal{A}^{n,n} \to 0,$$

dove $\mathcal{L}^i_{(p,q)}$ è fornito dalla tabella qui accanto (Tab. 1), e dove gli omomorfismi h^i sono indotti da ∂, $\bar{\partial}$ e dall'iniezione, compatibilmente con le esigenze della bigraduazione.

Sostituendo ovunque, nelle nostre considerazioni, le forme C^∞ con le forme a coefficienti distribuzioni, si ha:

TEOREMA (1.3). Su ogni varietà analitica complessa e per ogni coppia (p, q) di interi non negativi, sussiste la risoluzione scritta nel Teorema (1.2), salvo ad avere ovunque $\mathcal{K}^{i,j}$ al posto di $\mathcal{A}^{i,j}$.

§ 2. Dualità tra i gruppi di Aeppli.

a) Introduciamo le notazioni seguenti:

$$K^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{K}^{p,q}), \quad K^{p,q}_c = \Gamma_c(X, \mathcal{K}^{p,q})$$

$$A^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}), \quad D^{p,q} = \Gamma_c(X, \mathcal{A}^{p,q})$$

$$\Omega^p = \Gamma(X, \Omega^p), \qquad \bar{\Omega}^q = \Gamma(X, \bar{\Omega}^q),$$

TAB. 1

	$0 \leq i \leq \inf(p, q) - 1$	$\inf(p, q) \leq i \leq \sup(p, q) - 1$	$\sup(p, q) \leq i \leq p + q$	$p + q + 1 \leq i \leq 2n - 1$
$p = 0$ $q = 0$			$\mathcal{L}^0_{(0,0)} = \mathcal{A}^{0,0}$	$\mathcal{L}^i_{(0,0)} = \bigoplus\limits_{\substack{\alpha>0,\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=i+1}} \mathcal{A}^{\alpha,\beta}$
$p = 0$ $q \geq 1$		$\mathcal{L}^i_{(0,q)} = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{i+1} \oplus \mathcal{A}^{0,i}$	$\mathcal{L}^q_{(0,q)} = \mathcal{A}^{0,q}$	$\mathcal{L}^i_{(0,q)} = \bigoplus\limits_{\substack{\alpha>0\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=i-q+1}} \mathcal{A}^{\alpha,q+\beta}$
$p \geq 1$ $q = 0$		$\mathcal{L}^i_{(p,0)} = \mathcal{A}^{i,0} \oplus \boldsymbol{\Omega}^{i+1}$	$\mathcal{L}^p_{(0,p)} = \mathcal{A}^{p,0}$	$\mathcal{L}^i_{(p,0)} = \bigoplus\limits_{\substack{\alpha>0,\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=i-p+1}} \mathcal{A}^{p+\alpha,\beta}$
$p, q \geq 1$ $p \leq q$	$\mathcal{L}^i_{(p,q)} = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{i+1} \oplus \left(\bigoplus\limits_{\alpha=0}^{i} \mathcal{A}^{\alpha,i-\alpha}\right) \oplus$ $\oplus\ \boldsymbol{\Omega}^{i+1}$	$\mathcal{L}^i_{(p,q)} = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{i+1} \oplus \left(\bigoplus\limits_{\alpha=0}^{p} \mathcal{A}^{\alpha,i-\alpha}\right)$	$\mathcal{L}^i_{(q,q)} = \bigoplus\limits_{\substack{\alpha\geq0,\ \beta\geq0 \\ \alpha+\beta=p+q-i}} \mathcal{A}^{p-\alpha,q-\beta}$	$\mathcal{L}^i_{(p,q)} = \bigoplus\limits_{\substack{\alpha>0,\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=i-(p+q-1)}} \mathcal{A}^{p+\alpha,q+\beta}$
$p, q \geq 1$ $p \geq q$	$\mathcal{L}^i_{(p,q)} = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{i+1} \oplus \left(\bigoplus\limits_{\alpha=0}^{i} \mathcal{A}^{\alpha,i-\alpha}\right)$ $\oplus\ \boldsymbol{\Omega}^{i+1}$	$\mathcal{L}^i_{(p,q)} = \left(\bigoplus\limits_{\alpha=0}^{q} \mathcal{A}^{i-\alpha,\alpha}\right) \oplus \boldsymbol{\Omega}^{i+1}$	$\mathcal{L}^i_{(p,q)} = \bigoplus\limits_{\substack{\alpha\geq0,\ \beta\geq0 \\ \alpha+\beta=p+q-i}} \mathcal{A}^{p-\alpha,q-\beta}$	$\mathcal{L}^i_{(p,q)} = \bigoplus\limits_{\substack{\alpha>\beta,\ \beta>0 \\ \alpha+\beta=i-(p+q-1)}} \mathcal{A}^{p+\alpha,q+\beta}$

e ricordiamo, da [1], le definizioni dei gruppi di Aeppli:

$$
(6)\qquad
\begin{cases}
V^{p,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}\left(A^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{p+1,q+1}\right)}{\partial A^{p-1,q} + \bar\partial A^{p,q-1}} & [p, q \geq 1] \\[2ex]
V^{0,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}\left(A^{0,q} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{1,q+1}\right)}{\bar\Omega^{q} + \bar\partial A^{0,q-1}} & [q \geq 1] \\[2ex]
V^{p,0} = \dfrac{\operatorname{Ker}\left(A^{p,0} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{p+1,1}\right)}{\partial A^{p-1,0} + \Omega^{p}} & [p \geq 1] \\[2ex]
V^{0,0} = \dfrac{\operatorname{Ker}\left(A^{0,0} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{1,1}\right)}{\bar\Omega^{0} + \Omega^{0}}
\end{cases}
$$

$$
(7)\qquad
\begin{cases}
\Lambda^{p,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}\left(A^{p,q} \xrightarrow{d} A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1}\right)}{\partial\bar\partial A^{p-1,q-1}} & [p, q \geq 1] \\[2ex]
\Lambda^{0,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}\left(A^{0,q} \xrightarrow{d} A^{1,q} \oplus A^{0,q+1}\right)}{\bar\partial\, \bar\Omega^{q-1}} & [q \geq 1] \\[2ex]
\Lambda^{p,0} = \dfrac{\operatorname{Ker}\left(A^{p,0} \xrightarrow{d} A^{p+1,0} \oplus A^{p,1}\right)}{\partial \Omega^{p-1}} & [p \geq 1] \\[2ex]
\Lambda^{0,0} = \operatorname{Ker}\left(A^{0,0} \xrightarrow{d} A^{1,0} \oplus A^{0,1}\right).
\end{cases}
$$

Sostituendo ovunque, nelle (6) e nelle (7), $A^{p,q}$ con $D^{p,q}$ e Ω^{p}, $\bar\Omega^{q}$ con $\{0\}$, si ottengono le analoghe definizioni per i gruppi a supporti compatti:

$$
(8)\qquad V_c^{p,q},\ \Lambda_c^{p,q} \qquad\qquad [p, q \geq 0].
$$

Sostituendo ovunque, nelle (6), (7), (8), gli spazi di forme C^{∞} $A^{p,q}$ e $D^{p,q}$ con gli spazi di correnti $K^{p,q}$ e $K_c^{p,q}$, si ottengono i gruppi di Aeppli a coefficienti distribuzioni, che indicheremo con:

$$
\tilde V^{p,q},\ \tilde\Lambda^{p,q},\ \tilde V_c^{p,q},\ \tilde\Lambda_c^{p,q}.
$$

b) Nel suo articolo [2], J. P. Serre dimostra un lemma, che qui riportiamo:

Lemma (2.1). Siano L, M, N tre spazi di Fréchet, e $u: L \to M$, $v: M \to N$ due omomorfismi lineari tali che $v \circ u = 0$. Siano L', M', N' i duali topologici di L, M, N, e ${}^t u$, ${}^t v$ le applicazioni trasposte di u, v.

Poniamo $C = v^{-1}(0)$, $B = u(L)$, $H = C/B$, e $C' = {}^t u^{-1}(0)$, $B' = {}^t v(N')$, $H' = C'/B'$.

Allora H è uno spazio di Fréchet, il cui duale topologico è isomorfo ad H'.

Consideriamo allora il complesso:

$$\begin{matrix} A^{p-1,q} \\ \oplus \\ A^{p,q-1} \end{matrix} \xrightarrow{{}^t d} A^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} A^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \begin{matrix} A^{p+2,q+1} \\ \oplus \\ A^{p+1,q+2} \end{matrix}, \tag{9}$$

dove gli spazi $A^{i,j}$ si intendono muniti della topologia della convergenza uniforme sui compatti con tutte le derivate; ad esso corrisponde, per dualità, il complesso:

$$\begin{matrix} K_c^{n-p+1,n-q} \\ \oplus \\ K_c^{n-p,n-q+1} \end{matrix} \xleftarrow{d} K_c^{n-p,n-q} \xleftarrow{\partial\bar{\partial}} K_c^{n-p-1,n-q-1} \xleftarrow{{}^t d} \begin{matrix} K_c^{n-p-2,n-q-1} \\ \oplus \\ K_c^{n-p-1,n-q-2} \end{matrix}$$

essendo n la dimensione (su $\mathbb{C}$) della varietà-base X.

Se, nella successione (9), gli operatori ${}^t d$, $\partial\bar{\partial}$, d sono omomorfismi [1], il Lemma (2.1) applicato ponendo, la prima volta $L = A^{p-1,q} \oplus A^{p,q-1}$, $M = A^{p,q}$, $N = A^{p+1,q+1}$, $u = {}^t d$, $v = \partial\bar{\partial}$, la seconda volta $L = A^{p,q}$, $M = A^{p+1,q+1}$, $N = A^{p+2,q+1} \oplus A^{p+1,q+2}$, $u = \partial\bar{\partial}$, $v = d$, assicura che $V^{p,q}$ e $\Lambda^{p+1,q+1}$ sono spazi di Fréchet, e che i loro duali topologici sono isomorfi, rispettivamente, a $\tilde{\Lambda}_c^{n-p,n-q}$ e $\tilde{V}_c^{n-p-1,n-q-1}$.

c) Dimostriamo adesso la seguente:

Proposizione (2.2). Per ogni scelta degli interi p e q, sussistono gli isomorfismi algebrici:

$$\begin{cases} V^{p,q} \simeq \tilde{V}^{p,q}, & \Lambda^{p,q} \simeq \tilde{\Lambda}^{p,q} \\ V_c^{p,q} \simeq \tilde{V}_c^{p,q}, & \Lambda_c^{p,q} \simeq \tilde{\Lambda}_c^{p,q}. \end{cases}$$

---

[1] Nella Prop. (1.2) del § 4 della tesi [1], l'ipotesi che d sia un omomorfismo topologico è implicitamente ammessa (ma purtroppo non esplicitamente enunciata, come sarebbe necessario...).

E invero, per p e q fissati, riprendiamo la risoluzione del Teor. (1.2):

$$0 \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \mathscr{L}^{0}_{(p,\,q)} \longrightarrow \mathscr{L}^{1}_{(p,\,q)} \longrightarrow \ldots \tag{10}$$

e l'analoga (di cui al Teor. (1.3)), che si ottiene dalla (10) mettendo $\mathcal{K}^{i,\,j}$ al posto di $\mathscr{A}^{i,\,j}$ e che denoteremo con:

$$0 \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{L}}^{0}_{(p,\,q)} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{L}}^{1}_{(p,\,q)} \longrightarrow \ldots\,. \tag{11}$$

Posto:

$$\mathscr{Z}_{(p,\,q)} = \mathrm{Ker}\,(\mathscr{L}^{\sup(p,\,q)}_{(p,\,q)} \longrightarrow \mathscr{L}^{\sup(p,\,q)+1}_{(p,\,q)}),$$

$$\widetilde{\mathscr{Z}}_{(p,\,q)} = \mathrm{Ker}\,(\widetilde{\mathscr{L}}^{\sup(p,\,q)}_{(p,\,q)} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{L}}^{\sup(p,\,q)+1}_{(p,\,q)}),$$

le (10) e (11) forniscono delle successioni esatte:

$$\begin{cases} 0 \longrightarrow \mathscr{Z}_{(p,\,q)} \longrightarrow \mathscr{L}^{\sup(p,\,q)}_{(p,\,q)} \longrightarrow \mathscr{L}^{\sup(p,\,q)+1}_{(p,\,q)} \longrightarrow \ldots \\ 0 \longrightarrow \widetilde{\mathscr{Z}}_{(p,\,q)} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{L}}^{\sup(p,\,q)}_{(p,\,q)} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{L}}^{\sup(p,\,q)+1}_{(p,\,q)} \longrightarrow \ldots \end{cases} \tag{12}$$

formate evidentemente di fasci fini.

Ad esempio, nel caso semplice della risoluzione (3), si ha:

$$\mathscr{Z}_{(2,\,2)} = \mathbf{Ker}\left(\begin{tikzcd} \mathscr{A}^{0,\,2} \arrow[rrd, "\partial"] & & \\ \oplus & & \mathscr{A}^{1,\,2} \\ \mathscr{A}^{1,\,1} \arrow[rru, "\bar\partial"] \arrow[rrd, "\partial"] & & \oplus \\ \oplus & & \mathscr{A}^{2,\,1} \\ \mathscr{A}^{2,\,0} \arrow[rru, "\bar\partial"] & & \end{tikzcd}\right)$$

$$\widetilde{\mathscr{Z}}_{(2,\,2)} = \mathbf{Ker}\left(\begin{tikzcd} \mathcal{K}^{0,\,2} \arrow[rrd, "\partial"] & & \\ \oplus & & \mathcal{K}^{1,\,2} \\ \mathcal{K}^{1,\,1} \arrow[rru, "\bar\partial"] \arrow[rrd, "\partial"] & & \oplus \\ \oplus & & \mathcal{K}^{2,\,1} \\ \mathcal{K}^{2,\,0} \arrow[rru, "\bar\partial"] & & \end{tikzcd}\right)$$

e le (12) diventano:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A}^{0,2} \arrow[dr, "\partial"] & & & & \\
 & & \oplus & \mathcal{A}^{1,2} \arrow[dr, "\partial"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Z}_{(2,2)} \arrow[r] & \mathcal{A}^{1,1} \arrow[ur, "\bar\partial"] \arrow[dr, "\partial"'] & \oplus & \mathcal{A}^{2,2} \arrow[r, "\partial\bar\partial"] & \mathcal{A}^{3,3} \arrow[r, "d"] & {} \\
 & & \oplus & \mathcal{A}^{2,1} \arrow[ur, "\bar\partial"'] & & & \\
 & & \mathcal{A}^{2,0} \arrow[ur, "\bar\partial"] & & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{K}^{0,2} \arrow[dr, "\partial"] & & & & \\
 & & \oplus & \mathcal{K}^{1,2} \arrow[dr, "\partial"] & & & \\
0 \arrow[r] & \tilde{\mathcal{Z}}_{(2,2)} \arrow[r] & \mathcal{K}^{1,1} \arrow[ur, "\bar\partial"] \arrow[dr, "\partial"'] & \oplus & \mathcal{K}^{2,2} \arrow[r, "\partial\bar\partial"] & \mathcal{K}^{3,3} \arrow[r, "d"] & \cdots \\
 & & \oplus & \mathcal{K}^{2,1} \arrow[ur, "\bar\partial"'] & & & \\
 & & \mathcal{K}^{2,0} \arrow[ur, "\bar\partial"] & & & &
\end{tikzcd}$$

Tornando al caso generale, discende subito dal Teorema di De Rham sulle risoluzioni acicliche che i gruppi di Aeppli a coefficienti C^∞ e a supporti arbitrari (rispett. compatti) sono alcuni tra i gruppi di coomologia $H^k(X, \mathcal{Z}_{(p,q)})$ (rispett. $H_c^k(X, \mathcal{Z}_{(p,q)})$), mentre i gruppi di Aeppli a coefficienti distribuzioni e a supporti arbitrari (rispett. compatti) sono gli analoghi tra i gruppi di coomologia $H^k(X, \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,q)})$ (rispett. $H_c^k(H, \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,q)})$.

Pertanto la nostra tesi sarà provata, se dimostreremo questa più generale:

Proposizione (2.3). Per ogni coppia (p, q) di interi non negativi e per ogni intero $k \geq 1$, si hanno gli isomorfismi:

$$\begin{cases} H^k(X, \mathcal{Z}_{(p,q)}) \simeq H^k(X, \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,q)}) \\ H_c^k(X, \mathcal{Z}_{(p,q)}) \simeq H_c^k(X, \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,q)}). \end{cases}$$

Dimostrazione. Si fa per induzione su $p + q$. Siccome $\mathcal{Z}_{(0,0)} \simeq \tilde{\mathcal{Z}}_{(0,0)} \simeq \mathcal{H}$ (ogni distribuzione $\partial\bar\partial$-chiusa è una funzione (C^∞) pluriarmonica), l'asserto è certamente vero per $p + q = 0$.

Supponiamolo dimostrato per tutte le coppie (i, j) tali che $i + j = p + q - 1$, e dimostriamolo per (p, q). Si abbia, per fissare le idee, $0 \geq p \leq q$.

Dalle risoluzioni (10) e (11) si ricavano le successioni esatte « brevi »:

$$(*_1) \qquad 0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\left(\mathcal{L}^{q-1}_{(p,\,q)} \longrightarrow \mathcal{L}^{q}_{(p,\,q)}\right) \longrightarrow \mathcal{L}^{q-1}_{(p,\,q)} \longrightarrow \mathcal{Z}_{(p,\,q)} \longrightarrow 0$$

$$(*_2) \qquad 0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\left(\tilde{\mathcal{L}}^{q-1}_{(p,\,q)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{q}_{(p,\,q)}\right) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{q-1}_{(p,\,q} \longrightarrow \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,\,q)} \longrightarrow 0.$$

Ora osserviamo che:

$$\begin{cases} \operatorname{Ker}\left(\mathcal{L}^{q-1}_{(p,\,q)} \longrightarrow \mathcal{L}^{q}_{(p,\,q)}\right) \simeq \mathcal{Z}_{(p,\,q-1)} \\ \operatorname{Ker}\left(\tilde{\mathcal{L}}^{q-1}_{(p,\,q)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{q}_{(p,\,q)}\right) \simeq \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,\,q-1)}\,, \end{cases}$$

e ricordiamo esplicitamente che:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{q-1}_{(p,\,q)} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}^q \oplus \left(\bigoplus_{\alpha=0}^{p} \mathcal{A}^{\alpha,\,q-1-\alpha}\right) \\ \tilde{\mathcal{L}}^{q-1}_{(p,\,q)} = \bar{\boldsymbol{\Omega}}^q \oplus \left(\bigoplus_{\alpha=0}^{p} \mathcal{K}^{\alpha,\,q-1-\alpha}\right), \end{cases}$$

di modo che le successioni $(*_1)$ e $(*_2)$ diventano:

$$(*_3) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{Z}_{(p,\,q-1)} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{\Omega}}^q \oplus \left(\bigoplus_{\alpha=0}^{p} \mathcal{A}^{\alpha,\,q-1-\alpha}\right) \longrightarrow \mathcal{Z}_{(p,\,q)} \longrightarrow 0$$

$$(*_4) \qquad 0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,\,q-1)} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{\Omega}}^q \oplus \left(\bigoplus_{\alpha=0}^{p} \mathcal{K}^{\alpha,\,q-1-\alpha}\right) \longrightarrow \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,\,q)} \longrightarrow 0.$$

Passando alle corrispondenti successioni esatte di coomologia a supporti arbitrari, si ottiene il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^k(X, \mathcal{Z}_{(p,\,q-1)}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_k"'] & H^k(X, \bar{\boldsymbol{\Omega}}^q) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_k"'] & H^k(X, \mathcal{Z}_{(p,\,q)}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_k"'] & H^{k+1}(X, \mathcal{Z}_{(p,\,q-1)}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{k+1}"'] & H^{k+1}(X, \bar{\boldsymbol{\Omega}}^q) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{k+1}"'] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H^k(X, \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,\,q-1)}) \arrow[r] & H^k(X, \bar{\boldsymbol{\Omega}}^q) \arrow[r] & H^k(X, \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,\,q)}) \arrow[r] & H^{k+1}(X, \tilde{\mathcal{Z}}_{(p,\,q-1)}) \arrow[r] & H^{k+1}(X, \bar{\boldsymbol{\Omega}}^q) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

dove: 1) gli omomorfismi β sono tutti (evidentemente!) isomorfismi,

2) gli α sono pure degli isomorfismi, per l'induzione ammessa.

Ma allora, mediante applicazione iterata del Lemma dei 5, si conclude che anche i γ_k sono isomorfismi, per $k \geq 1$.

Analoga conclusione ragionando sulle successioni esatte di coomologia a supporti compatti. c. v. d.

d) Grazie al risultato precedente, e in particolare agli isomorfismi algebrici della Prop. (2.2), siamo in grado di enunciare il teorema di dualità:

TEOREMA (2.4). *A*) Supponiamo che le due applicazioni lineari:

$$\begin{matrix} A^{p-1,q} \\ \oplus \\ A^{p,q-1} \end{matrix} \xrightarrow{{}^t d} A^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} A^{p+1,q+1}$$

siano omomorfismi topologici. Allora $V^{p,q}$ è dotato di una struttura di spazio di Fréchet, e il suo duale topologico è $\Lambda_c^{n-p,n-q}$ ($n = \dim_{\mathbb{C}} X$).

B) Analogamente, supponiamo che siano omomorfismi le due applicazioni lineari:

$$A^{p-1,q-1} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} A^{p,q} \xrightarrow{d} \begin{matrix} A^{p+1,q} \\ \oplus \\ A^{p,q+1} \end{matrix};$$

allora $\Lambda^{p,q}$ è uno spazio di Fréchet, e il suo duale topologico è $V_c^{n-p,n-q}$.

Istituto Matematico « L. Tonelli »
Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] B. BIGOLIN: *Gruppi di Aeppli.* Ann. Sc. Norm. Sup. Vol. XXIII (1969).

[2] J. P. SERRE: *Un théorème de dualité.* Comm. Math. Helv. Vol. 29 (1955).