Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

FULVIO LAZZERI

Rivestimenti di curve algebriche affini

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 24, nº 1 (1970), p. 91-101

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_1_91_0>

RIVESTIMENTI DI CURVE ALGEBRICHE AFFINI

FULVIO LAZZERI (*)

Per le definizioni e risultati principali di geometria algebrica ed analitica ci riferiamo, se non esplicitamente detto, alle memorie di J. P. Serre [8], [9].

Ad esempio (vedi [9]) ad ogni varietà algebrica su $\mathbb{C}$ si associa in modo naturale uno spazio analitico complesso avente lo stesso insieme di punti.

Per brevità di linguaggio, diremo che uno spazio analitico complesso X è una varietà algebrica verificante una certa proprietà, se esiste una varietà algebrica varificante tale proprietà e che abbia X come spazio analitico associato.

Così uno spazio analitico complesso X sarà detto una varietà algebrica affine se esiste una immersione analitica $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ tale che $\pi(X)$ sia chiuso nella topologia di Zariski di $\mathbb{C}^n$.

Diremo superficie di Riemann, uno spazio analitico complesso irriducibile non singolare di dimensione uno. Questa definizione coincide con quella data in [1].

Il termine curva algebrica indicherà una varietà algebrica su $\mathbb{C}$ irriducibile, non singolare, di dimensione uno.

§ 1. Sia X una superficie di Riemann. Chiameremo funzione divergente su X ogni funzione olomorfa su X tale che per ogni successione (x_n) priva di punti aderenti su X, si abbia $\lim_{n \to \infty} |f(x_n)| = +\infty$.

TEOREMA 1. Sia X una superficie di Riemann non compatta. Allora X è algebrica affine se e solo se le due condizioni seguenti sono verificate:

1) $H_1(X, \mathbb{Z})$ è finitamente generato;
2) esiste una funzione divergente su X.

Pervenuto alla Redazione il 18 Marzo 1969

(*) Eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 35 del CNR.

DIMOSTRAZIONE. La condizione è necessaria. Sia X algebrica affine. Esistono una curva algebrica completa $\widetilde{X}$ ed un numero finito di punti $p_1, \dots, p_n \in \widetilde{X}$ tali che X è isomorfa a $\widetilde{X} - \{p_1, \dots, p_n\}$.

È ben noto che se $\widetilde{X}$ è algebrica compatta, $H_1(\widetilde{X} - \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z})$ è finitamente generato (vedi [5]); inoltre se f è una funzione razionale su $\widetilde{X}$ con poli effettivi in $p_1, \dots, p_n$ e olomorfa altrove, è ovvio che f è divergente su $\widetilde{X} - \{p_1, \dots, p_n\}$; l'esistenza di questa f è assicurata dal teorema di Riemann Roch (vedi [1])

La condizione è sufficiente. Sia f una funzione divergente su X. Allora l'applicazione $f: X \to \mathbb{C}$ è propria. Occorre far vedere che per ogni compatto $K \subset \mathbb{C}$, $f^{-1}(K)$ e compatto. Se così non fosse, esisterebbe una successione di punti (x_n) in $f^{-1}(K)$ priva di punti aderenti in $f^{-1}(K)$, e quindi in X poichè $f^{-1}(K)$ è chiuso. Poichè f è divergente, la successione $(f(x_n))$ è illimitata, e ciò è in contraddizione con la compattezza di K.

Poichè f è una applicazione olomorfa, determina un rivestimento di $\mathbb{C}$. Essendo propria, tale rivestimento è completo (vedi [1] pag. 42). Indicando per $x_0 \in X$ con $\nu(x_0)$ l'ordine dello zero di $f(x) - f(x_0)$ in x_0, esiste n intero tale che $\sum_{x \in f^{-1}(x)} \nu(x) = n$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Poichè f è olomorfa, l'insieme dei suoi punti di diramazione, cioè gli $x \in X$ con $\nu(x) \geq 2$ è discreto.

Proveremo ora che f ha al più un numero finito di punto di diramazione.

Siano infatti $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, F una varietà topologica di dimensione due orientabile connessa compatta con bordo, $\pi: F \to E$ un rivestimento completo di grado n, regolare sul bordo di F. Siano $p_1, \dots, p_r \in F$ i punti di diramazione di π, $\nu(p_1), \dots, \nu(p_r)$ gli indici di diramazione relativi; quindi $\nu(p_i) \geq 2$ per $i = 1, \dots, r$.

Il primo numero di Betti di F vale per la formula di Hurwitz (1):

$$B_1(F) = 1 - n + \sum_{i=1}^{r} (\nu(p_i) - 1). \text{ Da qui } B_1(F) \geq r - n + 1.$$

Sia $\varrho > 0$ tale che $|f(x)| \neq \varrho$ per ogni $x \in X$ di diramazione per f. Associamo a tale ϱ un $\varrho' > \varrho$ tale che se $x \in X$ è di diramazione per f

(1) Ciò può essere visto facilmente mediante una triangolare di E in cui i $\pi(p_i)$ siano vertici. Rimontando questa su F per mezzo di π e calcolando la caratteristica di Eulero-Poincaré di F ed E mediante il numero dei simplessi della triangolazione, si ottiene $\chi(F) = n\,\chi(E) - \sum_{i=0}^{r} (\nu(p_i) - 1)$. Basta allora osservare che $\chi(E) = 1$, $B_0(F) = 1$, $B_2(F) = 0$.

avviene che $|f(x)| < \varrho$ oppure $|f(x)| > \varrho'$; un tale ϱ' esiste perché l'insieme dei punti di diramazione è discreto.

Indicheremo con D_R il disco $|z| < R, z \in \mathbb{C}$; applicando l'osservazione precedente, il primo numero di Betti di $f^{-1}(\bar{D}_\varrho)$ è maggiore o eguale a $r - n + 1$ ove r è il numero dei punti di diramazione di f in $f^{-1}(D_\varrho)$.

Essendo $f^{-1}(\bar{D}_\varrho)$ retratto di deformazione di $f^{-1}(D_{\varrho'})$, otteniamo che anche il primo numero di Betti di $f^{-1}(D_{\varrho'})$ è $\geq n - r + 1$.

Osserviamo ora che $(X, f^{-1}(D_{\varrho'}))$ è una coppia di Runge. Infatti se K è compatto in $f^{-1}(D_{\varrho'})$, l'inviluppo $\widetilde{K}$ di K rispetto all'insieme $\{f\}$; è ancora compatto in $f^{-1}(D_{\varrho'})$ ed a fortiori lo è quindi l'inviluppo $\widetilde{K}$ di K rispetto all'insieme di tutte le funzioni olomorfe su X.

Allora (vedi [3] Corollario 1, pag. 507) l'omomorfismo naturale $H_1(f^{-1}(D_{\varrho'}), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ è iniettivo.

In particolare il primo numero di Betti di X è maggiore o eguale a quello di $f^{-1}(D_{\varrho'})$ e per quanto sopra di $r - n + 1$. Per ipotesi $B_1(X) < < +\infty$ e quindi non possono osservi infiniti punti di diramazione per f su X.

Esiste quindi $R > 0$ tale che $f^{-1}(D_R)$ contiene tutti i punti di diramazione di f.

Posto $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ siano $Y_1, \dots, Y_s$ le componenti connesse di $f^{-1}(Z)$. Allora $f_i = f|_{Y_i}: Y_i \longrightarrow Z$ è un rivestimento completo non diramato di grado n_i per $i = 1, \dots, \mathbb{Z}$ è isomorfo a $Z' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$; sia $\tau: Z \longrightarrow Z'$ un tale isomorfismo. Sia per h intero positivo, $\sigma_h: Z' \longrightarrow Z'$ definita da $\sigma_h(z) = z^h$. Ricordando che $\pi_1(Z') = \mathbb{Z}$, segue dal teorema di unicità dei rivestimenti che esiste un omeomorfismo $\lambda_i: Y_i \longrightarrow Z'$ tale che:

$$\sigma_{n_i} \circ \lambda_i = \tau \circ f_i \qquad \text{per } i = 1, \dots, s.$$

È ovvio poi che λ_i è un isomorfismo analitico. Ne segue che si può dare a $\widetilde{Y}_i = Y_i \cup \{\infty_i\}$ una struttura analitica che induce in Y_i quella preesistente, di modo che $\widetilde{Y}_i$ sia isomosfo a $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Si ottiene così una struttura di superficie di Riemann su $\widetilde{X} = X \cup \cup \{\infty_1, \dots, \infty_s\}$ che induce in X la struttura preesistente. Ora $\widetilde{X}$ è compatta, quindi è una curva algebrica (vedi ad esempio [4] teorema 27 pag. 238).

Resta da mostrare che X è algebrica affine con la struttura indotta da quella di $\widetilde{X}$. Ciò è mostrato nell'osservazione seguente.

OSSERVAZIONE 1. Sia $\widetilde{X}$ una curva algebrica non singolare completa irriducibile su un corpo algebricamente chiuso k, $\Delta \subset \widetilde{X}$ un sottoinsieme finito non vuoto. Allora $X = \widetilde{X} - \Delta$ è algebrica affine.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Delta = \{p_1, \ldots, p_r\}$, $r > 0$. Per n intero poniamo $D_n = np_1 + \ldots + np_r$. Sia $\varphi_n : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}_m(k)$ l'applicazione proiettiva associata al sistema lineare completo $|D_n|$ individuato da D_n. Essendo grado $D_n = n \cdot r$, se $n \geq \frac{2g+1}{r}$, ove g è il genere di $\widetilde{X}$, φ_n è una immersione (vedi [7] pag. 60).

φ_n trasforma gli elementi di D_n nelle sezioni iperpiane di $\varphi_n(\widetilde{X})$ in $\mathbb{P}_m(k)$. In particolare $\varphi_n(\Delta) = \varphi_n(\widetilde{X}) \cap \pi$ ove π è un iperpiano in $\mathbb{P}_m(k)$. Considerando π come l'iperpiano «all'infinito», si viene ad avere che $\varphi_n|_X$ è una immerzione razionale di X in k^n.

OSSERVAZIONE 2. Si vede facilmente che se X è algebrica affine, una f divergente su X è razionale su X. Basta ricordare (vedi [2]) che ogni funzione meromorfa su una varietà algebrica completa è razionale. Che f è meromorfa su $\widetilde{X}$ discende dal fatto che è olomorfa su X ed ha poli nei punti $\infty_1, \ldots, \infty_s$, avendo ivi limite infinito.

§. 2 D'ora in poi rivestimento significherà rivestimento completo.

Diremo quasi algebrici affini i rivestimenti analitici di grado finito di curve algebriche affini. Più precisamente una superficie di Riemann X sarà detta quasi algebrica affine se esistono una curva algebrica affine Y ed un morfismo analitico $\pi : X \longrightarrow Y$ che sia nn rivestimento di grado finito, eventualmente diramato.

Equivalentemente (vedi § 1) una superficie di Riemann è quasi algebrica affine se è non compatta e possiede una funzione divergente.

PROPOSIZIONE 1. Sia $\pi : X \longrightarrow Y$ un rivestimento analitico di grado finito, con U algebrica affine. Allora X è algebrica affine se e solo se π ha un numero finito di punti di diramazione. Se questo è il caso π è un morfismo tra varietà algebriche.

DIMOSTRAZIONE. Detto $\sigma : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ un rivestimento razionale qualsiasi, $\sigma \circ \pi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ è un rivestimento finito, avente un numero finito di pnnti di diramazione se e solo se π ne ha un numero finito. Come si è visto nella dimostrazione del teorema 1, $H_1(X, \mathbb{Z})$ è finitamente generato se e solo se $\sigma \circ \pi$ ha un numero finito di punti di diramazione. Basta allora applicare il teorema 1.

Sia $\pi : X \longrightarrow Y$ un rivestimento analitico di grado finito, con Y algebrica affine. Sia $\mathbb{C}(Y)$ il corpo delle funzioni razionali su Y, $M(X)$ il corpo delle funzioni meromorfe su X. Si ha una identificazione π^* di $\mathbb{C}(Y)$ in $M(X)$. Indichiamo con $M(X, \pi)$ la chiusura algebrica di $\mathbb{C}(Y)$ in $M(X)$.

LEMMA 1. Sia $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}$ un rivestimento analitico di grado finito d. Allora $M(X, \pi)$ è un prolungamento finito di grado $\leq d$ di $\mathbb{C}(\mathbb{P}_1(\mathbb{C}))$. In particolare è un corpo di funzioni algebriche in una variabile.

DIMOSTRAZIONE. Basterà mostrare che se $f \in M(X, \pi)$, f soddisfa una equazione di grado $\leq d$ a coefficienti in $\mathbb{C}(\mathbb{P}_1 \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}(z)$.

Sia

$$a_0 f^n + a_1 f^{n-1} + \dots + a^n = 0 \tag{1}$$

un'equazione di dipendenza algebrica di f su $\mathbb{C}(z)$.

Si può evidentemente supporre che sia $a_i(z) \in \mathbb{C}[z]$, $i = 0, \dots, n$.

Sia p un polo di f. Allora $1/f$ è olomorfa in un intorno di p. Da (1) si ottiene

$$a_0 f = a_1 - a_2 / f - \dots - a_n / f^{n-1}$$

per cui $a_0 f$ è olomorfa su X.

Moltiplicando la (1) per a_0^{n-1}, si ottiene un'equazione di dipendenza algebrica di $a_0 f$ su $\mathbb{C}(z)$. Si può quindi supporre, sostituendo $a_0 f$ a f, f olomorfa su X, $a_0 = 1$.

Sia quindi

$$P(w, z) = w^n + a_1(z) w^{n-1} + \dots + a_n(z)$$

l'equazione minima di f su $\mathbb{C}(z)$. $P(w, z)$ è irriducibile in $\mathbb{C}(z)[w]$ e quindi anche in $\mathbb{C}[w, z]$. Consideriamo la curva algebrica affine $Y = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid P(w, z) = 0\}$ e l'applicazione $\sigma : X \longrightarrow \mathbb{C}^2$ definita da $\sigma(p) = (f(p), \pi(p))$. σ è un morfismo analitico proprio di X in Y e quindi (vedi ad esempio [6]), $\sigma(X)$ è un sottospazio analitico irriducibile di Y. Ma una varietà algebrica irriducibile è anche analiticamente irriducibile, e quindi $\sigma(X) = Y$. Mostriama ora che $n \leq d$. Siccome $P(w, z)$ è irriducibile il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial w}(w, z) = 0 \\ \\ P(w, z) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

ha un numero finito di soluzioni. Sia allora $z_0 \in \mathbb{C}$, tale che (w, z_0) risolva (2). Allora $P(w, z_0)$ ha n soluzioni distinte: $w_1, \dots, w_n$. Essendo $\sigma : X \longrightarrow Y$ surgettiva, dovranno esistere $p_1, \dots, p_n \in X$ tali che

$$\sigma(p_i) = (f(p_i), \pi(p_i)) = (w_i, z_0) \; i = 1, \dots, n.$$

Allora $\pi^{-1}(z_0)$ contiene n punti distinti $p_1, .., p_n$, ed essendo π di grado d si ha $n \leq d$.

TEOREMA 2. Sia $\pi : X \longrightarrow Y$ un rivestimento di grado finito, con Y algebrica affine. Allora il corpo $M(X, \pi)$ non dipende da π nè da Y ma solo da X. Esso verrà indicato con $A(X)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma : X \longrightarrow Y'$ un altro rivestimento di grado finito, con Y' algebrica affine Componendo π e σ con rivestimenti finiti di Y, Y' rispettivamente su $\mathbb{C}$, si ottengono due rivestimenti $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tali che $M(X, f) = M(X, \pi)$, $M(X, g) = M(X, \sigma)$.

Allora g soddisfa un'equazione del tipo:

$$Y^d + a_1(f)\, Y^{d-1} + \dots + a_d(f) = 0$$

ove $a_1(x), \dots, a_d(x)$ sono intere su $\mathbb{C}$, essendo d il grado di f.

Ciò può essere visto nel modo usuale, scegliendo funzioni $\sigma_1, \dots, \sigma_d : \mathbb{C} \longrightarrow X$ che invertano f, e formando il prodotto $P(X, Y) = \prod_{i=1}^{d} (Y - g(\sigma_i(X)))$. Allora i coefficienti del polinomio $P(X, Y)$ in Y, sono funzioni simmetriche delle $g(\sigma_i(x))$ e quindi ben definite fuori dei punti sopra i quali è qualche diramazione, ed ivi olomorfe. Nei punti rimanenti sono poi limitate, onde sono intere su $\mathbb{C}$.

Dimostriamo che a_d è un polinomio. Sia (p_n) una successione in $\mathbb{C}$ priva di punti aderenti, e siano $q_n^1, \dots, q_n^d$ i punti di X che si proiettano in p_n mediante f, presente ognuno tante volte quanto è la molteplicità di diramazione di f in essi. Allora

$$a_d(p_n) = \prod_{i=1}^{d} g(q_n^i).$$

Sia $M \in \mathbb{R}$ per ipotesi

$$M_M = \{q \in X \mid |g(x)| \leq M\} \text{ è compatto in } X.$$

Sia $K_M = f(M_M)$. Se $p_n \notin K_m$, $q_n^i \notin M_M$, $i = 1, \dots, d$, ed è quindi

$$|a_d(p_n)| = \prod_{i=1}^{d} |g(q_n^i)| \geq M^d.$$

Ciò dimostra che $\lim_{n \to \infty} |a_d(p_n)| = +\infty$. Per l'arbitrarietà di (p_n) si ha quindi $\lim_{x \to \infty} |a_d(x)| = +\infty$ e di conseguenza $a_d(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Osserviamo ora che se $d \geq 1$, il sistema

$$\begin{cases} A_i > 1 \quad i = 1, \dots, d \\ \sum_{i=1}^{d} A_i > d \prod_{i=1}^{d} A_i \end{cases}$$

non ha soluzioni.

Ciò è evidente per $d = 1$. In generale si poi che da

$$\sum_{i=1}^{d} A_i > d \prod_{i=1}^{d} A_i, \quad A_j > 1, \quad j = 1, \dots, d$$

segue

$$\sum_{i=1}^{d-1} A_i > d \prod_{i=1}^{d} A_i - A_d = \left(d \prod_{i=1}^{d-1} A_i - 1\right) \cdot A_d > d \prod_{i=1}^{d-1} A_i - 1 > (d-1) \cdot \prod_{i=1}^{i-1} A_i$$

che dimostra l'asserto per induzione su d.

Sia ora $1 \leq r \leq d$. Sia $p \in \mathbb{C}$, $q_1, \dots, q_d$ i punti di X che si applicano in p mediante f, presenti ognuno tante volte quanto è l'indice di diramazione di f in essi. Allora:

$$a_r(p) = (-1)^r \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq d} \prod_{j=1}^{d} g(q_{i_j}).$$

Sia $I = \{(i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{Z}^r \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq d\}$. Poniamo per $i \in I$:

$$A_i = A_{i_1 \dots i_r} = \prod_{j=1}^{r} (g(q_{i_j}).$$

Si ha allora

$$\prod_{i \in I} A_i = (g(q_1) \cdot \dots \cdot g(q_d))^N = a_d(p)^N \text{ ove } N = \binom{d-1}{r-1}.$$

Supponiamo per assurdo che $a_r(X)$ non sia un polinomio.
Allora essendo $a_d(x)$ un polinomio, $a_r(X) \cdot a_d^{-N}(x)$ ha una singolarità essenziale all'infinito. Per ogni compatto K in $\mathbb{C}$, esiste quindi $p \notin K$, tale che

$$|a_r(p) \cdot a_d^{-N}(p)| > \binom{d}{r},$$

ossia

$$|a_r(p)| > \binom{d}{r} \cdot |a_d(p)|^N.$$

Se K è tale che $\{q \in X \mid |g(q)| \leq 1\} \subset f^{-1}(K)$, si ha che i $\binom{d}{r}$ numeri $|A_i|$ $i \in I$, sono maggiori di 1 e

$$\sum_{i \in I} |A_i| \geq \left|\sum_{i \in I} A_i\right| = |a_r(p)| > \binom{d}{r} \cdot |a_d(p)|^N = \binom{d}{r} \cdot \prod_{i \in I} |A_i|$$

contro quanto provato sopra.

Allora $a_1(x), \ldots, a_d(x)$ sono polinomi, ed f, g sono algebricamente dipendenti. Quindi $M(X, f) = \overline{\mathbb{C}(f)} = \overline{\mathbb{C}(g)} = M(X, g)$.

TEOREMA 3. Sia X una superficie di Riemann. Allora o non esiste alcun rivestimento finito $\sigma : X \to Y$ con Y curva algebrica affine, oppure ne esiste uno $\pi : X \to \widetilde{X}$ tale che per ogni altro $\sigma : X \to Y$, esiste un rivestimento finito, razionale, τ da $\widetilde{X}$ su Y che rende commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & \widetilde{X} \arrow[dl, "\tau"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\sigma : X \to Y$ un rivestimento finito con Y algebrica affine. Componendo σ con un rivestimento finito $\lambda : X \to \mathbb{C}$ si ottiene un rivestimento finito $f = \lambda \circ \sigma : X \to \mathbb{C}$.

Il corpo $A(X)$ è per il lemma 1 un corpo di funzioni algebriche in una variabile. Esiste quindi $g \in A(X)$ tale che $A(X) = \mathbb{C}(f, g)$ (vedi ad esempio [10]).

Siano $a_0(x), \ldots, a_d(x) \in \mathbb{C}[x]$ tali che

$$a_0(f)\, g^d + a_1(f)\, g^{d-1} + \ldots + a_d(f) = 0$$

dividendo per $a_0(f)\, g^{d-1}$ si ottiene $g = -a_1(f)/a_0(f) - \ldots - a_d(f)/a_0(f) \cdot g^{d-1}$ da cui $|g| \leq |a_1(f)/a_0(f)| + \ldots + |a_d(f)/a_0(f)| \cdot |1/g^{d-1}|$. Allora o $|g| \leq 1$, oppure $|g| \leq \sum_{i=1}^{d} |a_i(f)/a_0(f)|$. In ogni caso $|g| \leq 1 + \sum_{i=1}^{d} |a_i(f)/a_0(f)|$.

Se r è maggiore del massimo dei gradi degli $a_1, \ldots, a_d$, si ha quindi che $\lim_{n \to \infty} |g/f^r(p^n)| = 0$ per ogni successione (p_n) priva di punti aderenti in X.

Consideriamo $\pi_0 : X \to \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ definita da $x \to (1, f(x), g(x), f^r(x))$.

Se g ha un polo in $p \in X$, si avrà $\pi_0(p) = (0, 0, 1, 0)$.

Se (P_n) è una successione priva di punti aderenti in X, si avrà $\lim_{n \to \infty} \pi_0(P_n) = (0, 0, 0, 1)$, se r è scelto maggiore di 1.

Evidentemente $X^* = \overline{\pi_0(X)}$ è una curva algebrica irriducibile, eventualmente singolare, il cui corpo delle funzioni razionali è $A(X)$.

Detta $\nu : X^{**} \longrightarrow X^*$ la normalizzazione di X^*, poniamo $\widetilde{X} = X^{**} - \nu^{-1}(0, 0, 0, 1)$. Definiamo $\pi : X \longrightarrow \widetilde{X}$ nel seguente modo: se $p \in X$ tale che $\pi_0(p)$ è non singolare per X^* poniamo $\pi(p) = \nu^{-1}(\pi_0(p))$.

Mostriamo che π si estende per continuità a tutto X.

Sia $p_0 \in X$ tale che $\pi_0(p_0)$ sia singolare per X^*. Allora se U è un intorno abbastanza piccolo di p_0 in X, $\pi_0(U)$ ha una sola singolarità in $\pi_0(p_0)$ ove definisce un germe di insieme analitico irriducibile. Esiste allora un unico punto p_1 in X^{**}, certamente non in $\nu^{-1}((0, 0, 0, 1))$, che possiede un intorno V, tale che $\nu(V)$ definisca in $\pi_0(p_0)$ lo stesso germe di $\pi_0(U)$. Allora, eventualmente rimpicciolendo U, V, π è definita: $U - \{p_0\} \longrightarrow V - \{p_1\}$ ed è un rivestimento analitico, prolungabile quindi ponendo $\pi(p_0) = p_1$.

Mostriamo che $\pi : X \longrightarrow \widetilde{X}$ è propria. Per come costruita si ha $\pi_0 = \nu_0 \pi$. Se $K \subset \widetilde{X}$ si ha quindi $\pi^{-1}(K) \subset \pi_0^{-1}(\nu(k))$.

Se K è compatto, $\nu(K)$ pure lo è. Assumiamo che, π_0 sia propria; allora $\pi_0^{-1}(\nu(K))$ è compatto, ed essendo $\pi^{-1}(K)$ un chiuso contenuto in un compatto, è anche esso compatto.

Resta da mostrare quindi che π_0 è propria, considerata come applicazione di X in $X' = X^* - ((0, 0, 0, 1))$.

Sia K compatto in X'. Se $\pi_0^{-1}(K)$ non fosse compatto in X, esso conterrebbe una successione (x_n) priva di punti aderenti in $\pi_0^{-1}(K)$, e quindi in X perchè $\pi_0^{-1}(K)$ è chiuso.

Per come è scelto r si avrebbe $\lim_{n \to \infty} |g/f^r(x_n)| = 0$, quindi $\lim_{n \to \infty} \pi_0(x_n) = (0, 0, 0, 1)$, il che è assurdo perchè $(0, 0, 0, 1)$ non può essere aderente a K.

Quindi $\pi : X \longrightarrow \widetilde{X}$ è un rivestimento finito.

Sia $\sigma : X \longrightarrow Y$ un rivestimento finito con Y algebrica affine. Se $\widetilde{X} \subset \mathbb{C}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$, $Y \subset \mathbb{C}^m = \{(y_1, \dots, y_m\}$ siano $x_i = f_i$, $i = 1, \dots, n$; $y_j = g_j$, $j = 1, \dots, m$ le componenti di π, σ rispettivamente

Essendo $A(X) = \mathbb{C}(X^*) = \mathbb{C}(X^{**})$ si avrà che ogni elemento di $A(X)$ è funzione razionale di $f_1, \dots, f_n$ perchè $x_1, \dots, x_n$ generano razionalmente $\mathbb{C}(X^{**})$. Esistono quindi polinomi

$$P_j(X_1, \dots, X_n), \; Q_j(X_1, \dots, X_n)$$

tali che

$$g_j = \frac{P_j(f_1, \dots, f_n)}{Q_j(f_1, \dots, f_n)} \; j = 1, \dots, m.$$

Sia $\lambda : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definita da

$$\lambda(p) = \lambda(X_1, \dots, X_n) = \left(\frac{P_1(X_1, \dots, X_n)}{Q_1(X_1, \dots, X_n)}, \dots, \frac{P_m(X_1, \dots, X_n)}{Q_m(X_1, \dots, X_n)}\right).$$

Proviamo che λ è regolare. Se $(x_1, \dots, x_n) \in \widetilde{X}$, sia $p \in \pi^{-1}(x_1, \dots x_n)$. Allora

$$\frac{P_j(x_1, \dots, x_n)}{Q_j(x_1, \dots, x_n)} = \frac{P_j(f_1(p), \dots, f_n(p))}{Q_j(f_1(p), \dots, f_n(p))} g_j(p) \tag{3}$$

onde P_j/Q_j è olomorfa all'intorno di $(x_1, \dots, x_n)$.

La (3) mostra anche che λ applica $\widetilde{X}$ in Y e che $\sigma = \lambda \circ \pi$.

Di più essendo σ propria e π surgettiva, si ha che λ è propria.

Infatti se $K \subset Y$, si ha $\lambda^{-1}(K) \subset \pi(\sigma^{-1}(K))$. Infatti se $p \in \lambda^{-1}(k)$, sia $q \in \widetilde{X}$ tale che $\pi(q) = p$. Allora $\sigma(q) = \lambda(\pi(q)) = \lambda(p) \in K$, per cui $q \in \sigma^{-1}(K)$ e $p = \pi(q) \in \pi(\sigma^{-1}(K))$. Essendo σ propria, $\sigma^{-1}(K))$ è compatto e quindi anche $\pi(\sigma^{-1}(K))$ lo è.

Ciò conclude la dimostrazione.

COROLLARIO. Sia X una superficie di Riemann quasi algebrica affine. Allora l'algebra delle $f \in A(X)$ olomorfe su X è finitamente generata.

DIMOSTRAZIONE. Se $\pi : X \longrightarrow \widetilde{X}$ è il rivestimento costruito precedentemente, ed $f_1, \dots, f_n$ sono le componenti di π, $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ è l'algebra delle $f \in A(X)$ olomorfe su X.

Istituto Matematico
Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] L. AHLFORS and L. SARIO, *Riemann Surfaces,* Princeton University Press 1960.

[2] A. ANDREOTTI, *Théorèmes de dépendance algébrique sur les espaces complexes pseudo-concaves,* Bull. Soc. Math. France 1963.

[3] A. ANDREOTTI e R. NARASIMHAN, *A topological property of Runge pairs,* Ann. of Math. v. 76, 1962.

[4] R. C. GUNNING, *Lectures on Riemann Surfaces,* Princeton, N. J., 1966.

[5] W. MASSEY, *Algebraic Topology* : Harbrace College Mathematics Series.

[6] R. REMMERT, *Holomorphe und meromophe Abbildungen komplexer Räume,* Math. Ann. 133 1957.

[7] P. SAMUEL, *On old and new results on algebraic curves,* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1966.

[8] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents,* Ann. of Math. 61 1955.

[9] J. P. SERRE, *Géométrie algébrique et géométrie analytique,* Ann. Inst. Fourier 6 1955-1956.