

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FRANCO GORI

**Sulle deformazioni delle varietà algebriche intersezioni
complete non singolari di codimensione 2**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 24,
n° 1 (1970), p. 103-110*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_1_103_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE DEFORMAZIONI DELLE VARIETA ALGEBRICHE INTERSEZIONI COMPLETE NON SINGOLARI DI CODIMENSIONE 2

di FRANCO GORI

RIASSUNTO - Utilizzando una caratterizzazione delle varietà algebriche intersezioni complete non singolari di due ipersuperficie dovuta essenzialmente a J. P. Serre [5], si trovano delle condizioni sufficienti perchè tali varietà restino intersezioni complete per deformazioni nel senso di K. Kodaira e D. C. Spencer [3].

1. Sia X una varietà algebrica non singolare di dimensione d , contenuta nello spazio proiettivo complesso P^{d+2} . Indichiamo con E tanto il sistema lineare delle sezioni iperpiane di X quanto il fibrato lineare ad esso associato. Indichiamo poi con $\mathcal{O}(E)$ il fascio dei germi delle sezioni del fibrato E e con E^{ν} ($\nu \in \mathbb{Z}$) il multiplo secondo ν di E .

Supponiamo che X sia intersezione completa non singolare di due ipersuperficie Y_1 e Y_2 .

In questa nota si dimostra che se $d+2$ è maggiore di 4 ogni deformazione « sufficientemente piccola » di X è ancora algebrica e intersezione completa.

Precisamente proveremo il

TEOREMA 1. Le varietà algebriche di P^{d+2} intersezioni complete non singolari di due ipersuperficie Y_1 e Y_2 di dati ordini formano una famiglia algebrica completa (nel senso di Kodaira e Specer) nei casi seguenti:

- I) $d+2 > 4$
- II) $d+2 = 4$ quando $\text{grado } Y_1 + \text{grado } Y_2 \leq 4$
- III) $d+2 = 3$ quando $\text{grado } Y_1 + \text{grado } Y_2 \leq 3$.

OSSERVAZIONE. Le limitazioni II) e III) del Teor. 1 sono essenziali come mostrano i seguenti esempi: i) famiglia analitica complessa delle

curve piane di ordine maggiore di 3; ii) famiglia analitica complessa di tutte le ipersuperficie non singolari di ordine 4 in P^3 . ([3], Teor. 14.1 pag. 404 e Teor. 14.2 pag. 407).

La dimostrazione del Teorema 1 si basa sulla caratterizzazione delle varietà intersezioni complete di due ipersuperficie ([5], [2] [1]) data dal seguente

TEOREMA 2. Perchè la varietà algebrica non singolare X sia intersezione completa di due ipersuperficie Y_1 e Y_2 di uno spazio proiettivo è necessario e basta che:

a) X sia una varietà normale;

b) il sistema canonico K_X di X sia multiplo secondo un intero $\nu \geq 0$ del sistema E delle sezioni iperpiane: $E^\nu \simeq K_X$;

c) se $\nu > 0$ allora siano nulli i gruppi di coomologia di X a valori nel fascio definito dal fibrato E^l : $H^i(X, E^l) = 0$ per $i > 0$ e $0 \leq l \leq \nu$.

Per provare il Teorema 1 basta quindi verificare che le condizioni a), b) e c) del Teorema 2 sono stabili per deformazioni quando: $d + 2 > 4$; $d + 2 = 4$ e grado $Y_1 + \text{grado } Y_2 \leq 4$; $d + 2 = 3$ e grado $Y_1 + \text{grado } Y_2 \leq 3$.

2. Cominciamo a provare che la condizione c) del Teorema 2 è stabile per deformazioni.

Sia $\mathcal{I}_X$ il fascio di ideali definito da X , sottofascio del fascio $\mathcal{O}$ dei germi delle funzioni olomorfe in P^{d+2} , e sia $\mathcal{O}_X$ il fascio dei germi delle funzioni olomorfe su X . In altre parole consideriamo la successione esatta

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{I}_X \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

Poichè X è intersezione completa di Y_1 e Y_2 è esatta la successione (delle sizigie)

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1}) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(Y_1^{-1}) \oplus \mathcal{O}(Y_2^{-1}) \xrightarrow{j} \mathcal{I}_X \rightarrow 0$$

ove Y_1 e Y_2 sono i fibrati definiti dalle ipersuperficie Y_1 e Y_2 e se $s_1 = 0$ ed $s_2 = 0$ sono equazioni locali di Y_1 e Y_2 l'omomorfismo i è dato da

$$i: f \rightarrow (s_1 f, s_2 f)$$

e l'omomorfismo j da

$$j: (v, w) \rightarrow v s_2 - w s_1.$$

Le (1) e (2) si conglobano nella

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1}) \rightarrow \mathcal{O}(Y_1^{-1}) \oplus \mathcal{O}(Y_2^{-1}) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

ancora esatta.

Dalla (1) si ha la successione esatta di coomologia

$$(1') \quad 0 = H^2(P^{d+2}, \mathcal{O}) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^3(P^{d+2}, \mathcal{I}_X) \rightarrow H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}) = 0$$

e quindi l'isomorfismo $H^2(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^3(P^{d+2}, \mathcal{I}_X)$.

Dalla (2) analogamente

$$(2') \quad H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_1^{-1})) \oplus H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_2^{-1})) \rightarrow \\ \rightarrow H^3(P^{d+2}, \mathcal{I}_X) \rightarrow H^4(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1})).$$

Per un teorema noto dovuto a R. Bott ([3], pag. 405) si ha

$$(4) \quad H^4(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1})) = 0 \quad \text{se } d+2 \geq 4 \\ \text{se } d+2 = 4 \text{ e grado } Y_1 + \text{grado } Y_2 \leq 4;$$

ed in queste condizioni sono sicuramente nulli anche i gruppi

$$H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_1^{-1})) \text{ e } H^3(P^{d+2}, \mathcal{O}(Y_2^{-1})).$$

Se vale la (4) è quindi $H^3(P^{d+2}, \mathcal{I}_X) = 0$, cioè per la (1') si ottiene la

$$(5) \quad H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

Tensorizzando su $\mathcal{O}$ col fibrato sezione iperpiana, dalle (1), (2), (3) si ottengono le successioni ancora esatte

$$(1'') \quad 0 \rightarrow \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(E)_X \rightarrow 0$$

$$(2'') \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1} \otimes E) \rightarrow \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes E) \oplus \\ \oplus \mathcal{O}(Y_2^{-1} \otimes E) \rightarrow \mathcal{I}_X \otimes \mathcal{O}(E) \rightarrow 0$$

$$(3'') \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes Y_2^{-1} \otimes E) \rightarrow \mathcal{O}(Y_1^{-1} \otimes E) \oplus \\ \oplus \mathcal{O}(Y_2^{-1} \otimes E) \rightarrow \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}(E)_X \rightarrow 0.$$

Dalle successioni esatte di coomologia associate, sempre tenendo conto del teorema di R. Bott citato sopra, con facili passaggi si ottiene

$$(6) \quad H^1(X, \mathcal{O}(E)_X) = 0$$

che vale nelle stesse condizioni per cui sono vere la (4) e la (5).

Sia ora $\mathcal{V} \xrightarrow{\tilde{\omega}} M$ una qualunque famiglia di deformazioni della varietà X nel senso di Kodaira e Spencer.

Poichè siamo interessati a piccole deformazioni di X possiamo supporre che M sia un polidisco $M = (|t_1| < R, |t_2| < R, \dots, |t_r| < R) \subset \mathbb{C}^r$; e che $X = \tilde{\omega}^{-1}(0)$ con $0 \in M$.

Per un teorema di Kodaira e Spencer ([3], Teor. 13.2 pag. 400) le (5) e (6) implicano l'esistenza di un intorno $\mathcal{U}$ dello zero in M e di una applicazione olomorfa sulle fibre

$$\Phi: \mathcal{V}|_{\mathcal{U}} \rightarrow P^{d+2}.$$

Si vede poi con argomentazioni analoghe a quelle di [3], (Teor. 13.4 pag. 400) che l'intorno $\mathcal{U}$ si può scegliere così piccolo che l'applicazione Φ sia biolomorfa sulle fibre $X_t = \tilde{\omega}^{-1}(t)$, $t \in \mathcal{U}$. Basta infatti applicare il teorema citato tenendo presente che la varietà X è algebrica e che pertanto la dimensione l di $H^0(X_t, \mathcal{O}(E)_{X_t})$, costante per la (6) e per [3] (Teor. 2.1 e Teor. 2.3 pag. 350), è proprio uguale a $d+2$.

Ma X è intersezione completa onde $H^i(X, E^l) = 0$ per ogni $i > 0$ e $0 \leq l \leq r$. Segue quindi per il teorema di semicontinuità superiore ([3], Teor. 2.1 pag. 350) che per qualunque $t \in \mathcal{U}$, intorno dello zero in M tale che l'applicazione Φ sia biolomorfa sulle fibre, è vera la

$$(7) \quad H^i(X_t, E_t^l) = 0$$

cioè vale la stabilità della condizione c) del Teorema 2.

3. Proviamo ora la stabilità della condizione a) del Teorema 2.

Per un teorema di Muhly-Zariski [4] è noto che una varietà algebrica X è normale se e soltanto se l'omomorfismo

$$j: H^0(P^{d+2}, \mathcal{O}(E^l)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(E^l))$$

è surgettivo per ogni $l \geq 0$.

A noi basta quindi provare che esiste un intorno dello zero in M tale che per ogni t appartenente ad esso sia esatta la successione

$$(8) \quad 0 \rightarrow N_t^l \rightarrow H^0(P^{d+2}, \mathcal{O}(E^l)) \xrightarrow{j_t} H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(E^l)) \rightarrow 0 \text{ per ogni } l \geq 0$$

che è sicuramente esatta per $t = 0$.

Un teorema classico dovuto essenzialmente al Castelnuovo afferma che la (8) è esatta per ogni varietà algebrica non singolare appena che sia l

maggiore di un certo l_0 abbastanza grande. Quindi la (8) è vera per $l > l_0$ opportuno per tutte le X_t tali che $t \in \mathcal{U}$; essendo $\mathcal{U}$ un intorno dello zero in M per cui l'applicazione Φ è biolomorfa sulle fibre.

Resta da provare che la (8) vale anche quando è $1 \leq l \leq l_0$ per tutte le X_t con t appartenente ad un intorno dello zero in M opportunamente determinato.

In base al già citato teorema di semicontinuità essendo

$$\dim H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(E^l)) \leq \dim H^0(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(E^l))$$

ed essendo esatta, come già si è detto, la (8) per $t = 0$, si ottiene che

$$(9) \quad \dim N_t^l \geq \dim N_0^l \quad \text{per ogni } l \geq 1 \text{ e per ogni } t \in \mathcal{U}.$$

Dimostrando perciò l'esistenza, per ogni $l \leq l_0$ e positivo, di un intorno dello zero in M : $\mathcal{U}^l \subset \mathcal{U}$ in cui.

$$\dim N_t^l \leq \dim N_0^l$$

sarà provata la uguaglianza

$$\dim \text{Im } j_t = \dim H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(E^l)),$$

vera per ogni $l > 0$ nell'intorno $\tilde{\mathcal{U}}$ definito dalla

$$\tilde{\mathcal{U}} = \bigcap_{1 \leq l \leq l_0} \mathcal{U}^l,$$

che è quanto vogliamo.

Sia dapprima $l = 1$ cioè $E^l = E$.

Si può supporre che X non appartenga a nessun iperpiano di P^{d+2} , (se X appartiene ad un iperpiano si procede analogamente ma questo caso presenta per noi poco interesse), allora ciò vale anche per tutte le X_t con $t \in \mathcal{U}^1$ opportuno e per tali valori di t è dunque: $\dim N_t^1 = \dim N_0^1$.

Infatti l'immersione $\Phi_0: X \rightarrow P^{d+2}$, biolomorfa sull'immagine, può essere scritta localmente mediante $d+2$ funzioni olomorfe $\Phi_{0,i} (i = 1, 2, \dots, d+2)$; e per l'ipotesi fatta le $\Phi_{0,i}$ sono linearmente indipendenti. Scrivendo in componenti anche l'espressione $\Phi: \mathcal{V}|_{\mathcal{U}} \rightarrow P^{d+2}$ si hanno delle funzioni olomorfe

$$\Phi_i(z, t) \quad (i = 1, 2, \dots, d+2)$$

tali che

$$\Phi_i(z, 0) = \Phi_{0,i}.$$

Giacchè si è detto

$$\sum_0^{d+2} \lambda_i \Phi_{0,i} = \sum_0^{d+2} \lambda_i \Phi_i(z, 0) \neq 0,$$

(dove è per definizione $\Phi_0(z, t) = 1$), essendo $\sum_0^{d+2} \lambda_i \Phi_i(z, t)$ una funzione olomorfa, esiste sicuramente un intorno $\mathcal{U}^l$ dello zero in M in cui le $\Phi_i(z, t)$ sono linearmente indipendenti.

Sia ora $l > 1$.

Poniamo

$$h_l = \dim \{H^0(P^{d+2}, \mathcal{O}(E^l))/N_0^l\};$$

ciò significa che esistono h_l polinomi omogenei $\varphi_k(\xi)$ di grado l che godono le proprietà di essere linearmente indipendenti, di non annullarsi su X , e tali che nessuna loro combinazione lineare si annulla su X .

Poichè come è ormai noto le applicazioni $\Phi_i(z, t)$ sono olomorfe, le h_l funzioni $\varphi_k(\Phi(z, t))$, che sono linearmente indipendenti, non annullandosi per $t = 0$ non si annulleranno qualunque sia $t \in \mathcal{U}_1^l$, con $\mathcal{U}_1^l$ intorno opportuno dello zero.

Infine, poichè $\sum_k \lambda_k \varphi_k(\Phi(z, t))$ è una funzione olomorfa diversa da zero per $t = 0$, esiste sicuramente anche l'intorno $\mathcal{U}_{11}^l$ tale che per ogni $t \in \mathcal{U}_{11}^l$ sia

$$\sum_1^{h_l} \lambda_k \varphi_k(\Phi(z, t)) \neq 0.$$

Concludendo, per ogni $t \in \mathcal{U}^l = \mathcal{U}_1^l \cap \mathcal{U}_{11}^l$, è

$$\dim \{H^0(P^{d+2}, \mathcal{O}(E^l))/N_t^l\} \geq h_l$$

cioè

$$\dim N_t^l \leq \dim N_0^l.$$

4. Verifichiamo ora la stabilità della condizione b) del teorema 2.

Indichiamo con $K_{\mathcal{U}}$ il fibrato canonico definito su $\mathcal{V}_{|\mathcal{U}}$, e con K_{X_t} il fibrato canonico su $\tilde{\omega}^{-1}(t)$. Per la definizione di fibrato canonico si ha

$$(10) \quad K_{\mathcal{U}}|_{X_t} = K_{X_t} \quad \text{qualunque sia } t \in \mathcal{U}.$$

È d'altra parte possibile ([3], Prop. 13.2 pag. 398) costruire l'estensione $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ del fibrato $E^r|_{X_0}$, definito su $X = X_0 = \tilde{\omega}^{-1}(0)$, a $\mathcal{V}_{|\mathcal{U}}$ con $\mathcal{U}$ abbastanza piccolo.

Sarà allora

$$(11) \quad \mathcal{E}_{\mathcal{U}|_t} = E_{X_t}^{\nu} \text{ qualunque sia } t \in \mathcal{U}.$$

Basterà quindi trovare un intorno $\widehat{\mathcal{U}}$ dello zero in M in cui sia $K_{\widehat{\mathcal{U}}} = \mathcal{E}_{\widehat{\mathcal{U}}}$ perchè in base alla (10) e alla (11) sia provata la stabilità della b)

I fibrati lineari $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}$ e $K_{\mathcal{U}}$ definiscono due elementi del gruppo $H^1(\mathcal{V}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{O}^*)$, dove $\mathcal{O}^*$ è il fascio dei germi delle funzioni ologorfe $\neq 0$ su $\mathcal{V}|_{\mathcal{U}}$. Tenendo allora presente il diagramma a righe esatte e commutativo ([3], 13.5 pag. 398).

$$(a) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow H^1(\mathcal{V}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\varepsilon^*} & H^1(\mathcal{V}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau^*} & H^2(\mathcal{V}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{O}) \rightarrow \dots \\ & \downarrow r_t^* & \downarrow r_t^* & & \parallel & & \downarrow r_t^* \\ \dots \rightarrow H^1(X_t, \mathcal{O}_t) & \xrightarrow{\varepsilon_t^*} & H^1(X_t, \mathcal{O}_t^*) & \xrightarrow{\delta_t^*} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\tau_t^*} & H^2(X_t, \mathcal{O}) \rightarrow \dots \end{array}$$

l'ipotesi $E|_{X_0} = \mathcal{E}_{\mathcal{U}|X_0} = K_{\mathcal{U}|X_0}$, cioè $\mathcal{E}_{\mathcal{U}|X_0} \otimes K_{\mathcal{U}|X_0}^{-1} \in 1 \in H^1(X, \mathcal{O}_0^*)$, ci dice che

$$r_0^*(\mathcal{E}_{\mathcal{U}} \otimes K_{\mathcal{U}}^{-1}) = 1 \in H^1(X_0, \mathcal{O}_0^*)$$

e quindi

$$\delta^*(\mathcal{E}_{\mathcal{U}} \otimes K_{\mathcal{U}}^{-1}) = 0 \in H^2(X, \mathbb{Z})$$

cioè

$$(12) \quad \mathcal{E}_{\mathcal{U}} \otimes K_{\mathcal{U}}^{-1} \in \ker \delta^*.$$

Essendo X intersezione completa essa è regolare ovvero

$$(13) \quad H^1(X_0, \mathcal{O}_0) = 0 \text{ per } d+2 \geq 4, \text{ per } d+2=3 \text{ se grado } Y_1 + \text{grado } Y_2 \leq 3.$$

La (13) per semicontinuità implica l'esistenza di un intorno dello zero $\mathcal{U}' \subset M$ tale che in esso sia

$$(14) \quad H^1(X_t, \mathcal{O}_t) = 0,$$

e pertanto posto $\widehat{\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ dalla (14) e da [3] (Teor. 2.2 pag. 350) segue

$$(15) \quad H^1(\mathcal{V}|_{\widehat{\mathcal{U}}}, \mathcal{O}) = 0,$$

da cui segue che nel diagramma (a) l'omomorfismo δ^* è iniettivo.

La (12) si riscrive allora

$$\mathcal{E}_{\widehat{\mathcal{U}}} \otimes K_{\widehat{\mathcal{U}}}^{-1} = 1$$

che è quanto si voleva, e il teorema 1 è completamente dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] U. GASAPINA: *Sulle sezioni spaziali delle varietà aritmeticamente normali e aritmeticamente regolari*; Bollettino dell'Un. Mat. Italiana 1961, serie III, vol. 16, pag. 476-483.
- [2] G. GHERARDELLI: *Sulle curve sghembe algebriche intersezioni complete di due superficie*, Atti R. Acc. d'Italia, vol. IV (1942).
- [3] K. KODAIRA e D. C. SPENCER: *On deformations of complex analytic structures*; Annals of Mathematics 1958, vol. 67, pag. 328-466.
- [4] H. T. MUHLY: *A remark on normal varieties*; Annals of Mathematics 1941, vol. 42, pag. 921-925.
- [5] J. P. SERRE: Seminario Dubreil, 1960/1961, fascicolo 1.