ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GENEVIÈVE POURCIN

Théorème de Douady au-dessus de S

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 3 (1969), p. 451-459
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_3_451_0>

THÉORÈME DE DOUADY AU-DESSUS DE S

par GENEVIÈVE POURCIN

§ 1. Introduction.

Le espaces analytiques considérés sont séparés de dimension finie et ne sont pas nécéssairement réduits.

Soient $X \longrightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques et $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Pour tout morphisme d'espaces analytiques $Z \longrightarrow S$, on pose $X_Z = Z \times_S X$ et $\mathcal{E}_Z = pr_2^* \mathcal{E}$, faisceau analytique image réciproque de $\mathcal{E}$ sur X_Z ; de même, étant donnée une section g de $\mathcal{E}$, on note g_Z la section correspondante de $\mathcal{E}_Z$.

Le but de cet article est de généraliser le théorème suivant dû à Douady ([1], § 9 théorème 1):

THÉORÈME 1. *Soient X un espace analytique et $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Il existe un espace analytique $H(\mathcal{E})$ et un faisceau quotient $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ du faisceau $\mathcal{E}_{H(\mathcal{E})}$ sur $H(\mathcal{E}) \times X$ jouissant de la propriété universelle suivante :*

(i) *$\mathcal{R}(\mathcal{E})$ est $H(\mathcal{E})$-propre et $H(\mathcal{E})$-plat*

(ii) *Pour tout espace analytique Z et tout faisceau quotient Z-plat et Z-propre $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_Z$, il existe un morphisme et un seul $f : Z \longrightarrow H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{F} = (f \times I_X)^* \mathcal{R}(\mathcal{E})$.*

Sous le nom de « Platitude et Privilège » on réfère au scholie ([1], § 8):

SCHOLIE. *Soient S un espace analytique, U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{E}$ un faisceau S-plat sur $S \times U$ et $K \subset U$ un polycylindre. L'ensemble S' des points $s \in S$ tels que K soit $\mathcal{E}_{\{s\}}$-privilégié est ouvert dans S et les espaces de Banach $B(K, \mathcal{E}_{\{s\}})$ sont les fibres d'un fibré analytique localement trivial $B(K, \mathcal{E})$ sur S'.*

De plus si $\mathcal{H}_{S'}(B(K, \mathcal{E}))$ désigne le faisceau des sections de ce fibré et

---

Pervenuto alla Redazione il 14 Marzo 1969.

$p : S' \times K \longrightarrow S'$ (resp. $q : S' \times \overset{\circ}{K} \longrightarrow S'$) la première projection, on a un diagramme commutatif de morphismes de faisceaux sur S', ϱ désignant le morphisme de restriction :

(1)
$$\begin{tikzcd} p_* \mathcal{E}|_{S' \times K} \arrow[d, "\varrho"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ q_* \mathcal{E}|_{S' \times \overset{\circ}{K}} & \mathcal{H}_{S'}(B(K, \mathcal{E})) \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

Pour tout changement de base $Z \xrightarrow{\psi} S'$, K est $(\mathcal{E}_{Z})_{\{z\}}$-privilégié pour tout $z \in Z$, le fibré $B(K, \mathcal{E}_Z)$ est l'image réciproque du fibré $B(K, \mathcal{E})$ et le diagramme suivant :

(2)
$$\begin{tikzcd} p_* \mathcal{E}|_{S' \times K} \arrow[dd, "\varrho"'] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[rr, "h"] & & p_* \mathcal{E}_Z|_{Z \times K} \arrow[dd, "\varrho"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & \mathcal{H}_{S'}(B(K, \mathcal{E})) \arrow[dl, "\beta"] \arrow[rr, "k"] & & \mathcal{H}_Z(B(K, \mathcal{E}_Z)) \arrow[dl, "\beta"] \\ q_* \mathcal{E}|_{S' \times \overset{\circ}{K}} \arrow[rr, "l"] & & q_* \mathcal{E}_Z|_{Z \times \overset{\circ}{K}} & \end{tikzcd}$$

où h, k et l sont des ψ comorphismes, est commutatif.

A l'aide de ces résultats, on démontre au § 3 du présent article le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *Soient S un espace analytique, X un espace analytique au-dessus de S et $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur X.*

Il existe un espace analytique $H_S(\mathcal{E})$ au-dessus de S et un faisceau quotient $\mathcal{R}_S(\mathcal{E})$ de $\mathcal{E}_{H_S(\mathcal{E})}$ jouissant de la propriété universelle suivante :

(i) *$\mathcal{R}_S(\mathcal{E})$ est $H_S(\mathcal{E})$-propre et $H_S(\mathcal{E})$-plat*

(ii) *Pour tout espace analytique Z au dessus de S et tout faisceau quotient Z propre et Z-plat $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_Z$, il existe un S-morphisme et un seul $f : Z \longrightarrow H_S(\mathcal{E})$ tel que :*

$$(f \times_S I_X)^* \mathcal{R}_S(\mathcal{E} = \mathcal{F}$$

§ 2. Construction pour tout quotient $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ d'un sous-espace T de S universel.

Proposition 1. *Soient $\varphi : X \longrightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques et $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur X, S-propre et S-plat.*

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, quotient de $\mathcal{E}$. Il existe un sous-espace T de S tel que :

(i) $\mathcal{E}_T = \mathcal{F}_T$

(ii) *Tout morphisme d'espaces analytiques $\psi : Z \longrightarrow S$, tel que $\mathcal{E}_Z = \mathcal{F}_Z$, se factorise de manière unique à travers T.*

Remarque 1. L'ensemble sous-jacent à T est l'ensemble des points $s \in S$ tels que $\mathcal{E}_{\{s\}} = \mathcal{F}_{\{s\}}$.

La démonstration de la proposition 1 se fait en trois pas :

Premier pas. Soient S un espace analytique, U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et (s_0, x_0) un point de $S \times U$. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux faisceaux analytiques cohérents sur $S \times U$ tels que $\mathcal{E}$ soit S-plat et que $\mathcal{F}$ soit un quotient de $\mathcal{E}$.

En restreignant au besoin $S \times U$, on se donne un nombre fini de sections $(g_i)_{i \in \{1, \dots, r\}}$ de $\mathcal{E}$ au dessus de $S \times U$ de sorte que $\mathcal{F}$ soit le quotient de $\mathcal{E}$ par le sous-$\mathcal{O}_{S \times U}$-module de $\mathcal{E}$ engendré par ces sections.

Soit $K \subset U$ un polycylindre $\mathcal{E}_{\{s_0\}}$-privilégié tel que $x_0 \in \mathring{K}$. D'après « Platitude et Privilège » on peut supposer, quitte à rétrécir S, que K est $\mathcal{E}_{\{s\}}$-privilégié pour tout $s \in S$.

Lemme 1. *Soit T le sous-espace analytique de S défini par les équations:*

$$\alpha(g_i) = 0 \qquad i = 1, \dots, r.$$

Alors :

(i) $$\mathcal{E}_T = \mathcal{F}_T \text{ au-dessus de } T \times \mathring{K}$$

(ii) *Tout morphisme d'espaces analytiques $\psi : Z \longrightarrow S$ tel que $\mathcal{E}_Z = \mathcal{F}_Z$ se factorise de manière unique à travers T.*

Démonstration :

(i) Il suffit de montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots r\}$ g_{iT} est nulle sur $T \times \mathring{K}$; or $\alpha(g_i)_{|T} = 0$, $i = 1, \dots, r$, par définition de T, d'où l'assertion d'après le diagramme (1) du § 1.

(ii) On doit montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $\alpha(g_i) \circ \psi = 0$, ce qui résulte de la commutativité du diagramme (2) du § 1 et du fait que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, g_{i_Z} étant nulle sur $Z \times U$, $\alpha(g_{i_Z}) = 0$.

L'unicité de la factorisation est évidente du fait que $T \longrightarrow S$ est un monomorphisme.

2ème pas. Soiet $\varphi : X \longrightarrow S$ un morphisme propre d'espaces analytiques et $\mathcal{E}$ un faisceau analytique cohérent sur X. On appelle armure $\mathcal{E}$-privilégiée de φ la donnée

(i) d'un ouvert Ω de S

(ii) d'un ensemble fini d'indices I

(iii) Pour tout $i \in I$, d'un morphisme $\alpha_i : V_i \longrightarrow \Omega \times U_i$ (où V_i est un ouvert de X au-dessus de Ω et U_i un ouvert de $\mathbb{C}^{n_i}$, α_i identifiant V_i à un sous-espace fermé de $\Omega \times U_i$) tel que :

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[rr, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\varphi|V_i"'] & & \Omega \times U_i \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \Omega & \end{tikzcd} \qquad \text{commute.}$$

(iv) Pour tout $i \in I$, un polycylindre $K_i \subset U_i$ tel que :

$$\varphi^{-1}(\Omega) = \bigcup_{i \in I} \alpha_i^{-1}(\Omega \times \mathring{K}_i)$$

et

$$\forall\, s \in \Omega \quad K_i \text{ est } \mathcal{E}_{i,s}\text{-privilégié} \qquad (\mathcal{E}_i = \alpha_{i*}\, \mathcal{E}_{|V_i}).$$

On déduit de Platitude et Privilège que, pour tout $s \in S$, il existe une armure $\mathcal{E}$-privilégiée $(\Omega, I, (\alpha_i)_{i \in I}, (K_i)_{i \in I})$ de φ telle que $s \in \Omega$.

LEMME 2. *Soit $\varphi : X \longrightarrow S$ un morphisme d'espaces analytiques. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux faisceaux analytiques cohérents sur X tels que $\mathcal{E}$ soit S-propre et S-plat et que $\mathcal{F}$ soit un quotient de $\mathcal{E}$. Soit s un point de S.*

Il existe un voisinage ouvert Ω de s dans S et un sous-espace fermé T de Ω tel que :

(i) $\mathcal{E}_T = \mathcal{F}_T$

(ii) *Tout morphisme d'espaces analytiques $Z \longrightarrow \Omega$ tel que $\mathcal{E}_Z = \mathcal{F}_Z$ se factorise de manière unique à travers T.*

On peut supposer $X = \operatorname{supp} \mathcal{E}$. Soit $(\Omega, I, (\alpha_i)_{i \in I}, (K_i)_{i \in I})$ une armure $\mathcal{E}$-privilégiée de φ. Quitte à restreindre Ω, pour tout $i \in I$, il existe d'après le lemme 1, un sous espace fermé T_i de Ω passant par s et tel que :

(i) $\forall\, i \in I \quad \mathcal{E}_i|_{T_i} = \mathcal{F}_i|_{T_i}$ au-dessus de $T_i \times \mathring{K}_i$

(ii) Tout morphisme $Z \longrightarrow \Omega$ tel que $\mathcal{E}_{i_Z} = \mathcal{F}_{i_Z}$ se factorise de manière unique à travers T_i.

Soit $T = \bigcap_{i \in I} T_i$, c'est le sous-espace cherché.

3ème pas. Démonstration de la proposition 1 :

Pour tout $s \in S$, on a montré l'existence d'un voisinage ouvert Ω_s de s dans S et d'un sous-espace analytique fermé T_s de Ω_s, solution au-dessus de Ω_s du problème universel énoncé dans la proposition 1. D'après l'unicité d'une telle solution, les sous-espaces $(T_s)_{s \in S}$ de S se recollent en un sous-espace fermé T de S, solution du même problème universel au-dessus de S.

§ 3. L'espace $H(\mathcal{F})$ quand $\mathcal{F}$ est un quotient de $\mathcal{E}$ (1).

Proposition 2. *Soient X un espace analytique, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux faisceaux analytiques cohérents sur X tels que $\mathcal{F}$ soit quotient de $\mathcal{E}$. Le morphisme canonique $H(\mathcal{F}) \longrightarrow H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \mathcal{R}(\mathcal{E})_{H(\mathcal{F})}$ est un plongement fermé.*

Notons $p : H(\mathcal{E}) \times X \longrightarrow X$ la 2ème projection. Soit $\mathcal{G}$ le faisceau analytique cohérent sur $H(\mathcal{E}) \times X$, somme amalgamée de $p^*\mathcal{F}$ et $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ au-dessus de $p^*\mathcal{E}$, relativement aux deux épimorphismes de $\mathcal{O}_{H(\mathcal{E})\times X}$-modules $p^*\mathcal{E} \longrightarrow p^*\mathcal{F}$ et $p^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{E})$; $\mathcal{G}$ est un quotient de $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
p^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
p^*\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Le faisceau $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ étant propre et plat sur $H(\mathcal{E})$, il existe d'après la proposition 1, un sous-espace fermé T de $H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{E})_T = \mathcal{G}_T$ et universel pour cette propriété. Montrons que $(T, \mathcal{R}(\mathcal{E})_T) \approx (H(\mathcal{F}), \mathcal{R}(\mathcal{F}))$.

Soit Z un espace analytique, $q : Z \times X \longrightarrow X$ la 2ème projection et $\mathcal{G}'$ un faisceau analytique cohérent sur $Z \times X$, quotient de $q^*\mathcal{F}$, Z-propre et

(1) Les résultats de ce § ne sont pas utilisés dans la suite.

Z-plat. Puisque $\mathcal{F}$ est quotient de $\mathcal{E}$, le faisceau $\mathcal{G}'$ est quotient de $q^*\mathcal{E}$ et il existe un morphisme unique $\psi : Z \to H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{E})_Z = \mathcal{G}'$. Montrons que $\mathcal{G}_Z = \mathcal{G}'$.

Le diagramme (3) donne par changement de base le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
q^*\mathcal{E} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j'"'] & \mathcal{G}' \arrow[r] \arrow[d, "k"] & 0 \\
q^*\mathcal{F} \arrow[r, "k'"] \arrow[d] & \mathcal{G}_Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme canonique $h : q^*\mathcal{F} \to \mathcal{G}'$ vérifiant $h \circ j' = j$, il existe un morphisme unique $l : \mathcal{G}_Z \to \mathcal{G}'$ tel que $l \circ k = I_{\mathcal{G}'}$ et $l \circ k' = h$; donc k est un isomorphisme.

Puisque $\mathcal{R}(\mathcal{E})_Z = \mathcal{G}_Z$, ψ se factorise de manière unique à travers T et par construction $(\mathcal{R}(\mathcal{E})_T)_Z = \mathcal{R}(\mathcal{E})_Z = \mathcal{G}'$.

— Le corollaire suivant donne une forme explicite de l'espace T de la proposition 1 et montre l'équivalence entre les proposition 1 et 2.

Avec les notations et hypothèses de la proposition 1, on remarque tout d'abord l'existence d'un morphisme unique $\varrho : S \to H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{E})_S = \mathcal{E}$ (après identification de X à un sous-espace fermé de $S \times X$ à l'aide de $(\varphi, I_X) : X \to S \times X$). On peut donc former $S \times_{H(\mathcal{E})} H(\mathcal{F})$, lequel s'identifie par la 1ère projection à un sous-espace fermé de S.

Corollaire. *Les notations étant celles de la proposition* 1 :

$$T \approx S \times_{H(\mathcal{E})} H(\mathcal{F}).$$

Il suffit de vérifier que $S \times_{H(\mathcal{E})} H(\mathcal{F})$ possède la propriété universelle de T.

§ 4. Démonstration du Théorème 2.

Notons φ le morphisme $X \to S$ et considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
& S \times H(\mathcal{E}) \times X \arrow[dr, "pr_{23}"] & & \\
H(\mathcal{E}) \times X \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "I_{H(\mathcal{E})} \times X"] & & H(\mathcal{E}) \times X \arrow[r, "\mathcal{R}(\mathcal{E})"] & {}
\end{tikzcd}$$

où ι désigne le plongement fermé déduit de $(\varphi, I_X) : X \longrightarrow S \times X$. Le faisceau $pr_{23}^{*} \mathcal{R}(\mathcal{E})$ est propre et plat sur $S \times H(\mathcal{E})$ et $\iota_{*} \mathcal{R}(\mathcal{E})$ est un quotient de $pr_{23}^{*} \mathcal{R}(\mathcal{E})$. D'après la proposition 1, il existe donc un sous-espace T de $S \times H(\mathcal{E})$ tel que $(pr_{23}^{*} \mathcal{R}(\mathcal{E}))_T = (\iota_{*} \mathcal{R}(\mathcal{E}))_T$ et universel pour cette propriété. Le $\mathcal{O}_{T \times X}$-module $(\iota_{*} \mathcal{R}(\mathcal{E}))_T$ a son support dans $T \times_S X$ et est propre et plat sur T. Montrons que $(T, \iota_{*}(\mathcal{R}(\mathcal{E}))_T)$ est solution du problème universel énoncé dans le théorème.

Soit $\psi : Z \longrightarrow S$ un morphisme et $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $Z \times_S X$, quotient de $\mathcal{E}_Z$, propre et plat sur Z. Montrons qu'il existe un S-morphisme unique $f : Z \longrightarrow T$ tel que $(f \times_S I_X)^{*} (\iota_{*} \mathcal{R}(\mathcal{E}))_T = \mathcal{F}$.

Du plongement canonique $Z \times_S X \longrightarrow Z \times X$, on déduit l'existence d'un morphisme unique : $\theta : Z \longrightarrow H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{E})_Z = \mathcal{F}$, d'où un S-morphisme $g = (\psi, \theta) : Z \longrightarrow S \times H(\mathcal{E})$. Il nous suffit de montrer que :

$$(g \times I_X)^{*} (\iota_{*} \mathcal{R}(\mathcal{E})) = (g \times I_X)^{*} (pr_{23}^{*} \mathcal{R}(\mathcal{E})) = \mathcal{F}.$$

On déduit du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z \times X \arrow[r, "g \times I_X"] \arrow[dr, "\theta \times I_X"'] & S \times H(\mathcal{E}) \times X \arrow[d, "pr_{23}"] \\
& H(\mathcal{E}) \times X
\end{tikzcd}$$

que $((g \times I_X)^{*} (pr_{23}^{*} \mathcal{R}(\mathcal{E})) = (\theta \times I_X)^{*} \mathcal{R}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$.

Le faisceau $\iota_{*} \mathcal{R}(\mathcal{E})$ ayant son support dans $\iota(H(\mathcal{E}) \times X)$, on en déduit que $(g \times I_X)^{*} (\iota_{*} \mathcal{R}(\mathcal{E}))$ a son support dans $Z \times_S X$, en effet :

$$\begin{aligned} Z \times X \times_{S \times H(\mathcal{E}) \times X} H(\mathcal{E}) \times X &\approx Z \times_{S \times H(\mathcal{E})} S \times H(\mathcal{E}) \times X \times_{S \times H(\mathcal{E}) \times X} H(\mathcal{E}) \times X \\ &\approx Z \times_{S \times H(\mathcal{E})} H(\mathcal{E}) \times X \approx Z \times_S X. \end{aligned}$$

On déduit alors du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z \times_S X \arrow[r, "\theta \times I_X"] \arrow[d, "g \times I_X"'] & H(\mathcal{E}) \times X \arrow[dl, "\iota"] \\
S \times H(\mathcal{E}) \times X &
\end{tikzcd}$$

que $(g \times I_X)^{*} (\iota_{*} \mathcal{R}(\mathcal{E})) = (\theta \times I_X)^{*} \mathcal{R}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}$. Le théorème est démontré.

§ 5. Complements.

REMARQUE.

1. La fibre de $H_S(\mathcal{E})$ au point $s \in S$ s'identifie à l'espace $H(\mathcal{E}_{\{s\}})$.

En particulier l'ensemble sous-jacent à $H_S(\mathcal{E})$ est la somme disjointe des ensembles sous-jacents aux $H(\mathcal{E}_{\{s\}})$;

$$| H_S(\mathcal{E}) | = \coprod_{s \in S} | H(\mathcal{E}_{\{s\}}) |$$

2. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent quotient de $\mathcal{E}$, on démontre, comme dans § 2 proposition 2, que l'on a un plongement fermé $H_S(\mathcal{F}) \to H_S(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}_S(\mathcal{F}) = \mathcal{R}_S(\mathcal{E})_{H_S(\mathcal{F})}$. En fait :

$$H_S(\mathcal{F}) = S \times H(\mathcal{F}) \times_{S \times H(\mathcal{E})} H_S(\mathcal{E}).$$

3. Soit $S' \to S$ un morphisme d'espaces analytiques ;

$$H_{S'}(\mathcal{E}_{S'}) = S' \times_S H_S(\mathcal{E}).$$

Au faisceau nul sur X, considéré comme quotient de $\mathcal{E}$, est associé un point simple isolé, de $H(\mathcal{E})$; c'est le point $0 \in H(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}(\mathcal{E})(0) = 0$. En effet, il résulte de la proposition 1 (§ 2) et du fait que $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ est $H(\mathcal{E})$-propre, que 0 est un point isolé. C'est un point simple car pour tout espace analytique Z, il y a un seul morphisme $Z \to \{0\}$, celui associé au faisceau nul sur $Z \times X$.

Notons

$$H^*(\mathcal{E}) = H(\mathcal{E}) - \{0\}, \quad \mathcal{R}^*(\mathcal{E}) = \mathcal{R}(\mathcal{E})_{H^*(\mathcal{E})}$$

et

$$H_S^*(\mathcal{E}) = H_S(\mathcal{E})_\cap S \times H^*(\mathcal{E}).$$

On a :

$$H(\mathcal{E}) = H^*(\mathcal{E}) \coprod \{0\} \quad \text{et} \quad H_S(\mathcal{E}) = H_S^*(\mathcal{E}) \coprod S \times \{0\}.$$

PROPOSITION. *Le morphisme $j : H_S^*(\mathcal{E}) \to H^*(\mathcal{E})$ obtenu en composant :*

$$H_S^*(\mathcal{E}) \to S \times H^*(\mathcal{E}) \xrightarrow{pr_2} H^*(\mathcal{E})$$

est un plongement fermé.

Posons $T = H_S^*(\mathcal{E})$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_S(\mathcal{E})_T$. On a $T \times_{S \times H^*(\mathcal{E})} H^*(\mathcal{E}) \times X = T \times_S X$, donc $T \times_S X \xrightarrow{\iota} H^*(\mathcal{E}) \times X$ est un plongement fermé et $\iota_* \mathcal{R}$ est un quotient de $\mathcal{R}^*(\mathcal{E})$. D'après la proposition 1, il existe un sous-espace, fermé T' de $H^*(\mathcal{E})$ tel que $\mathcal{R}^*(\mathcal{E})_{T'} = \mathcal{R}_{T'}$ et universel pour cette propriété.

Comme $\mathcal{R}^*(\mathcal{E})_T = \mathcal{R}_T = \mathcal{R}$, le morphisme j se factorise de manière unique à travers T' ; soit $j = i \circ h : T \xrightarrow{h} T' \xrightarrow{i} H^*(\mathcal{E})$. Montrons que h est un isomorphisme.

L'application continue h_0 sous-jacente à h est bijective d'après la remarque 1 ci-dessus. Montrons que h_0 est propre ; cela résulte du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{supp} \mathcal{R} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\text{surjection}"'] & \operatorname{supp} \mathcal{R}^*(\mathcal{E}) \arrow[d, "pr_1"] \\
T \arrow[r, "h_0"] & H^*(\mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

et du fait que $\mathcal{R}^*(\mathcal{E})$ est $H^*(\mathcal{E})$ - propre. L'application h_0 est donc un homéomorphisme.

Il reste à montrer que le morphisme de faisceaux $h_1 : \mathcal{O}_{T'} \longrightarrow h_{0*} \mathcal{O}_T$, défini par h est un isomorphime de faisceaux d'algèbres.

De la suite de morphismes d'espaces analytiques :

$$T \times X \xrightarrow{h \times I_X} T' \times X \xrightarrow{i \times I_X} H^*(\mathcal{E}) \times X$$

on déduit la suite d'homomorphismes de $\mathcal{O}_{H^*(\mathcal{E})}$-modules :

$$\iota_* \mathcal{R} \xrightarrow{\widetilde{i}} (i \times I_X)_* \mathcal{R}^*(\mathcal{E})_{T'} \xrightarrow{\widetilde{h}} \iota_* \mathcal{R}.$$

Comme $i \times I_X$ est un plongement fermé, l'homomorphisme $\widetilde{i}$ est un épimorphisme ; de plus $\widetilde{h} \circ \widetilde{i} = I_{\mathcal{R}}$, par définition de h ; Donc $\widetilde{h}$ et $\widetilde{i}$ sont deux isomorphismes réciproques de $\mathcal{O}_{H^*(\mathcal{E})}$-modules. On déduit alors du fait que T' (resp. T) est un sous espace de $H^*(\mathcal{E})$ (resp. $S \times H^*(\mathcal{E})$) que h_1 est un isomorphisme de faisceaux d'algèbres.

[1] A. Douady. *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donne.* Ann. Inst. Fourier Grenoble, 16, 1 (1966), 1-95.