ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JINDŘICH NEČAS

Sur l'alternative de Fredholm pour les opérateurs non-linéaires avec applications aux problèmes aux limites

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 2 (1969), p. 331-345

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_2_331_0>

SUR L'ALTERNATIVE DE FREDHOLM POUR LES OPÉRATEURS NON-LINÉAIRES AVEC APPLICATIONS AUX PROBLÈMES AUX LIMITES

JINDŘICH NEČAS

§ 1. Introduction.

La théorie des opérateurs monotons s'est montrée une base pour la solution des problèmes aux limites pour les équations non-linéaires aux dérivées partielles du type elliptique.

On considère un opérateur T d'un espace de Banach B, complex, réfléxif, dans son antidual B^*, en désignant par (Tu, v) la dualité entre B^* et B. Le problème fondamental: sous quelles hypothèses $T(B) = B^*$. Deux hypothèses suivantes sont importantes:

(1.1) monotonie: $\quad \operatorname{Re}\,(Tv - Tu, v - u) \geq 0,$

(1.2) coercitivité: $\quad \lim\limits_{\|u\| \to \infty} |(Tu, u)| \cdot \|u\|^{-1} = \infty\,.$

Si encore T est continu de chaque sous-espace de dimension finie dans B^* faible, on a $T(B) = B^*$, cf. le théorème 1 de ce travail; si B est réel et séparable et $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} (Tu, u) . \|u\|^{-1} = \infty$, cf. J. Leray, J. L. Lions [1]; sans séparabilité cf. F. E. Browder [2] et J. Nečas [6].

Si B est un espace de Hilbert et T un opérateur linéaire, continu et (v, u) le produit scalaire, on peut se donner encore un opérateur S de H dans H, complètement continu, et de considérer la question sur la surjectivité de l'opérateur $A_\lambda = T - \lambda S$, $\lambda \in C_1$. L'alternative de Fredholm a

Pervenuto alla Redazione il 31 Agosto 1968.

lieu : ou bien λ est une valeur propre, ou bien il existe un opérateur inverse. La structure des valeurs propres est bien connue et on connaît aussi l'image de $T - \lambda S$ pour λ, une valeur propre. La condition (1.2) est remplacée dans ler applications linéaires du type elliptique par l'inégalité de Gärding. C'est l'idée principale qu'on a suivie en considérant les opérateurs non-linéaires.

Sous certaines conditions sur la monotonie et la coercivité de T, sous la condition que S est continu de la topologie faible dans la topologie forte et encore sous certaines conditions, dont un cas particulier très important est $\varkappa$-homogénéité de T et S : pour $\mu > 0$, $u \in B$, $T(\mu u) = \mu^{\varkappa} T(u)$, $S(\mu u) = \mu^{\varkappa} S(u)$, nous avons obtenu un analogue de l'alternative de Fredholm : s'il n'existe pas u de B, $u \neq \theta$, telle que $Tu - \lambda Su = \theta$, alors $T - \lambda S$ est surjectif. On démontre aussi qu'il existe un sous-espace F de B^*, de dimension finie, tel que chaque f de B^* s'écrit sous la forme $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in (T - \lambda S)(B)$ et $f_2 \in F$.

EXEMPLES : Dans les exemples qui suivront, on désigne par

$$\overset{\circ}{W}{}_m^{(1)}(\Omega) = \left\{ u \,\Big|\, \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^m + |u|^m \right) dx < \infty \,,\; u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \right\},$$

$\partial\Omega$ étant la frontière d'un domaine Ω de R_N.

EXEMPLE 1. On cherche u de $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, telle que pour $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar v}{\partial x_i}\, dx - \lambda \int_\Omega \frac{|u|^s}{1 + |u|^s}\, u \bar v \, dx = \int_\Omega f \bar v\, dx,$$

formellement : $u = 0$ sur $\partial\Omega$, $-\Delta u - \lambda u \dfrac{|u|^s}{1 + |u|^s} = f$ dans Ω. $f \in L_2(\Omega)$, $s > 0$. Alors pour chaque f de L_2, il existe une solution si $\lambda \neq \lambda_k$, où $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ est le spectre pour le problème de Dirichlet et l'opérateur de Laplace.

EXEMPLE 2. On cherche u de $\overset{\circ}{W}{}_4^{(1)}(\Omega)$, telle que pour chaque v de $\overset{\circ}{W}{}_4^{(1)}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar v}{\partial x_i}\, dx - \lambda \int_\Omega |u|^2 u \bar v\, dx = \int_\Omega f \bar v\, dx,$$

formellement $u = 0$ sur $\partial\Omega$, $-\sum_{i=1}^N \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left[\left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right] - \lambda |u|^2 u = f$ dans Ω. Alors pour chaque f de $L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$, il existe une solution, s'il n'existe pas u de $\overset{\circ}{W}{}_4^{(1)}(\Omega)$, $u \neq \theta$, telle que pour chaque $v \in \overset{\circ}{W}{}_4^{(1)}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx - \lambda \int_\Omega |u|^2 u \bar{v}\, dx = 0.$$

EXEMPLE 3. Soit $1 < m < \infty$. On cherche u de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(1)}(\Omega)$, telle que pour chaque v de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(1)}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(1 + \sum_{j=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{m}{2}-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} \cdot dx - \lambda \int_\Omega (1 + |u|^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot u\bar{v}\, dx = \int_\Omega f \bar{v}\, dx.$$

Formellement $u = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(1 + \sum_{j=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right] - \lambda (1 + |u|^2)^{\frac{m}{2}-1} u = f \text{ dans } \Omega.$$

Alors pour chaque f de $L_{\frac{m}{m-1}}$, il existe une solution, s'il n'existe pas u de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(1)}(\Omega)$, $u \neq \theta$, telle que pour v de $\overset{\circ}{W}{}_m^{(1)}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx - \lambda \int_\Omega |u|^{m-2} \cdot u \cdot \bar{v} \cdot dx = 0.$$

§ 2. Une généralisation du théorème de Leray-Lions.

Nous considérons dans la suite les espaces de Banach B, complex. Par B^*, on désigne l'antidual de B, à savoir l'espace des fonctionelles antilinéaires. On désigne par (f, u) la dualité entre B^* et B.

HYPOTHÈSE 1. *Soit A, un opérateur borné, continu de tout sous-espace de B de dimension finie dans B^* faible. A soit coercitif*:

(2.1) $$\lim_{\|u\| \to \infty} |(Au, u)| \cdot \|u\|^{-1} = \infty.$$

HYPOTHÈSE 2. *Il existe une application bornée de $B \times B$ dans B^*, soit $A(v, u)$, telle que $A(u, u) = A(u)$ et telle que*

$$(2.2)\quad \begin{cases} \forall\ u \text{ de } B, \text{ l'application } v \longrightarrow A(v, u) \text{ est hemicontinue (continue de} \\ \text{toute droite de } B \text{ dans } B^* \text{ faible) et telle que pour } u, v \text{ de } B, \\ \qquad\qquad \operatorname{Re}\,(A(u, u) - A(v, u), u - v) \geq 0, \end{cases}$$

$$(2.3)\quad \begin{cases} \text{si } u_n \rightharpoonup u \text{ (convergence faible) et si } (A(u_n, u_n) - A(u, u_n), \\ u_n - u) \longrightarrow 0, \text{ alors pour } v \text{ de } B : A(v, u_n) \rightharpoonup A(v, u) \text{ dans } B^*, \end{cases}$$

$$(2.4)\quad \text{si } u_n \rightharpoonup u \text{ et } A(v, u_n) \rightharpoonup v^* \text{ dans } B^*, \text{ alors } (A(v, u_n), u_n) \longrightarrow (v^*, u).$$

Nous dirons que $A(B) = B^*$ régulièrement, si de $f \in B^*$, $\|f\| \leq R < \infty$, suit $\|u\| \leq r < \infty$, u étant la solution de $A(u) = f$.

THÉORÈME 1. *Soit B un espace de Banach réflexif, complex, de dimension ≥ 2 et A une application de B dans B^*, satisfaisfaisant aux hypothèses 1 et 2. Alors $A(B) = B^*$ règuliérement.*

DÉMONSTRATION. Soit $F \subset B$ un sous-ensemble de dimension finie, F^* son antidual et désignons par $(f, v)_F$ la dualité entre F^* et F. Définissons A_F de F dans F^* par $u, v \in F \Longrightarrow (A_F v, u)_F = (Av, u)$. Si l'on introduit dan F et F^* une base biorthonormale, soit e_i, e_j^*, $i, j = 1, 2, \ldots \varkappa$, alors u de F s'écrit comme $u = \sum_{j=1}^{\varkappa} x_i e_i$, f de F^* s'écrit comme $f = \sum_{j=1}^{\varkappa} y_j e_j^*$ et on peut identifier F et F^* avec l'espace euclidien $C_\varkappa$, au produit scalaire $(x, y) = \sum_{i=1}^{\varkappa} x_i \bar{y}_i$ et l'opérateur A_F avec un opérateur R, continu de $C_\varkappa$ dans lui même, defini par $(A_F v, u) = (Rx, y)_{C_\varkappa}$, où $v = \sum_{i=1}^{\varkappa} x_i e_i$, $u = \sum_{i=1}^{\varkappa} y_i e_i$.

On a

$$(2.5)\qquad \lim_{\|x\| \to \infty} |(Rx, x)_{C_\varkappa}|\, \|x\|^{-1} = \infty\,.$$

Soit $f \in B^*$, $(f_F, v)_F = (f, v)$ et soit $\eta \in C_\varkappa$ avec $f_F = \sum_{i=1}^{\varkappa} \eta_i e_j^*$. Considérons encore $Ux = Rx - \eta$ qui satisfait aussi à (2.5). Il s'agit de trouver $x \in C_\varkappa$ de sorte que $Ux = 0$. Soit $\varrho > 0$ si grand pour que $|(Ux, x)| \neq 0$ pour $|x| = \varrho$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $\varkappa \geq 2$. Dans ce cas, on peut trouver $\arg(Ux, x)$ de sorte qu'il résulte continue sur la sphère $x| = \varrho$. Posons $V(x) = \exp\left(- i \cdot \frac{\|x\|}{\varrho} \cdot \arg\left(U \frac{x}{\|x\|}\varrho, \frac{x}{\|x\|}\varrho\right)\right) \cdot U(x)$; c'est une application continue de $C_\varkappa$ dans lui même. Sur $|x| = \varrho$, on a $(V(x), x) > 0$, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ si petit pour que la transformation $x - \varepsilon V(x)$ transforme la boule $|x| \leq \varrho$ dans elle même. D'après le théorème de Brouwer, il existe un point fixe x_F, dans cette boule, alors $V(x_F) = 0$, d'où $U(x_F) = 0$. Désignons par u_F le point correspondant dans F. Nous avons alors pour v de F:

$$(2.6) \qquad (A_F u_F, v)_F = (A u_F, v) = (f, v).$$

Il suit de (2.1) qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour chaque F, $\| u_F \| \leq c$. Désignons par Λ l'ensemble de tous les sous-espaces de B de dimension finie et ≥ 2 et par $B_{F_0} = \bigcup_{\Lambda \ni F \supset F_0} u_F$. Soit $\overline{B}_{F_0}$ la fermeture de B_{F_0} dans la topologie faible. La famille de $\overline{B}_{F_0}$ possède la propriété des intersections finies. Il en suit que $\bigcap_{F_0 \in \Lambda} \overline{B}_{F_0} \neq \theta$, donc il existe $u_0 \in \bigcap_{F_0 \in \Lambda} \overline{B}_{F_0}$. Soit v de B et $F_0 \in \Lambda$ contenant v et u_0. Il existe maintenant une suite u_n de B_{F_0}, telle que $u_n \rightharpoonup u$. Comme u_n est une suite bornée, $A(u_0, u_n)$ l'est aussi, alors, on peut supposer que $A(u_0, u_n) \rightharpoonup u^*$. Vérifions que

$$(2.7) \qquad (A(u_n, u_n) - A(u_0, u_n), u_n - u_0) \rightarrow 0.$$

En effet, $(A(u_n, u_n), u_n) = (f, u_n) \rightarrow (f, u_0)$, $(A(u_n, u_n), u_0) = (u_0, f)$. D'après (2.4): $(A(u_0, u_n), u_n) \rightarrow (u^*, u_0)$ et enfin $(A(u_0, u_n), u_0) \rightarrow (u^*, u_0)$; tout cela entraîne (2.7). Alors pour v en question, compte tenu de (2.3), $A(v, u_n) \rightharpoonup$ $\rightharpoonup A(v, u_0)$. Il s'en suit de (2.4) que $(A(v, u_n), u_n) \rightarrow (A(v, u_0), u_0)$. Soit $C_n =$ $= (A(u_n, u_n) - A(v, u_n), u_n - v)$. On a $C_n \rightarrow (f - A(v, u_0), u_0 - v)$. Mais d'après (2.2), $\operatorname{Re} C_n \geq 0$, donc on a

$$(2.8) \qquad \operatorname{Re}(f - A(v, u_0), u_0 - v) \geq 0$$

pour chaque v de B. Si nous posons $v = u_0 - \lambda w$, w de B, $\lambda > 0$, il suit de (2.8) que $\operatorname{Re}(f - A(u_0 - \lambda w, u_0), w) \geq 0$ et en faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, il en suit que $\operatorname{Re}(f - A(u_0), w) \geq 0$, d'où $A(u_0) = f$; pour chaque boule $K_\varrho = \{ \| f \| \leq \varrho \}$, il suit de (2.1) que $A^{-1}(K_\varrho)$ est bornée, d'où l'assertion.

§ 3. Alternative.

Soit $T(u)$ un opérateur du théorème 1, tel que

$$(3.1) \qquad (T(u), u) \geq 0.$$

HYPOTHÈSE 3. *Soit $S(u)$ un opérateur de B dans B^*, continu « de la topologie faible dans la topologie forte » : si $u_n \rightharpoonup u$, alors $S(u_n) \rightarrow S(u)$ dans B^*. Soit encore*

$$(3.2) \qquad (S(u), u) \geq 0.$$

Désignons par $A_\lambda(u) = T(u) - \lambda S(u)$. Évidemment, il suit du théorème 1 :

CONSÉQUENCE 1. *Pour $\lambda \leq 0$, $A_\lambda(B) = B^*$ régulièrement.*

THÉORÈME 2. *Soit $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $A_\lambda = T - \lambda S$ avec T satisfaisant aux hypothèses 1 et 2 et S à l'hypothèse 3. Supposons encore* (3.1). *Alors si $\lambda_2 \neq 0$, l'opérateur A_λ est régulièrement surjectif.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer (2.1). Mais (3.2)$'$: $|(A_\lambda u, u)|^2 = (Tu, u)^2 + \lambda_1^2 (Su, u)^2 - 2\lambda_1 (Tu, u)(Su, u) + \lambda_2^2 (Su, u)^2 \geq (Tu, u)^2 (1 - \varepsilon\lambda_1) + \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \frac{\lambda_1}{\varepsilon}\right)(Su, u)^2$ pour chaque $\varepsilon > 0$.

Si nous prenons $0 < \varepsilon < \frac{1}{\lambda_1}$ mais assez proche de $1/\lambda_1$, nous obtenons le résultat.

Nous avons un lemme important :

LEMME 1. *Soit T un opérateur borné de B dans B^*, satisfaisant à l'hypothèse 2. Alors si $u_n \rightharpoonup u$ et $T(u_n) \rightarrow g$, il en suit que $g = T(u)$.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $T(u, u_n) \rightharpoonup u^*$; d'après (2.4), $(T(u, u_n), u_n) \rightarrow (u^*, u)$, d'où $(T(u_n, u_n) - T(u, u_n), u_n - u) \rightarrow 0$, d'où d'apres (2.3) pour chaque v de B : $T(v, u_n) \rightharpoonup T(v, u)$. D'après (2.2) $\operatorname{Re}(T(u_n, u_n) - T(v, u_n), u_n - v) \geq 0$; si $n \rightarrow \infty$, on obtient de (2.4) que $(T(v, u_n), u_n) \rightarrow (T(v, u), u)$, d'où $\lim\limits_{n \to \infty} \operatorname{Re}(T(u_n, u_n) - T(v, u_n), u_n - v) = \operatorname{Re}(g - T(v, u), u - v) \geq 0$.

Si nous posons $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, w de B, nous obtenons $\operatorname{Re}(g - T(u - \lambda w, u), w) \geq 0$ et en faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, on obtient $\operatorname{Re}(g - T(u), w) \geq 0$, d'où $g = T(u)$.

Nous dirons qu'un opérateur N de B dans B^* est $\varkappa > 0$ homogène, si pour chaque $0 < \mu$, u de $B : N(\mu u) = \mu^\varkappa N(u)$.

Nous dirons qu'un opérateur N de B dans B^* est $\varkappa > 0$ quasi-homogène, s'il existe un opérateur N_0 de B dans B^*, $\varkappa$-homogène, tel que : si $w_n \rightharpoonup w$ et si les nombres $\mu_n > 0$, $\mu_n \rightarrow 0$ et si $\mu_n^\varkappa N\left(\frac{w_n}{\mu_n}\right) \rightarrow g$, alors

$$(3.2)'' \qquad \lim_{n \to \infty} \mu_n^\varkappa N\left(\frac{w_n}{\mu_n}\right) = N_0(w).$$

Nous dirons que N est fortement $\varkappa > 0$ quasi-homogène si (3.2)″ est valable pour chaque $\mu_n \to 0$, $\mu_n > 0$, $w_n \rightharpoonup w$. (Dans ce cas N_0 est $\varkappa$-homogène automatiquement).

PROPOSITION 1. *Soit S un opérateur de B dans B^* continu « de la topologie faible dans la topologie forte ». Si S est $\varkappa$-homogène, il est $\varkappa$ quasi-homogène fortement avec $S_0 = S$.*

En effet $\mu_n^\varkappa S\left(\frac{w_n}{\mu_n}\right) = S(w_n) \to S(w)$.

PROPOSITION 2. *Soit T un opérateur de B dans B^*, satisfaisant à l'hypothèse 2. Alors s'il est $\varkappa$ homogène, il est $\varkappa$ quasi-homogène avec $T_0 = T$.*

En effet $\mu_n^\varkappa T\left(\frac{w_n}{\mu_n}\right) = T(w_n)$. Maintenant, on utilise le lemme 1.

PPROPOSITION 3. *Si T est un opárateur de B dans B^* satisfaisant à* (2.1) *et s'il est $\varkappa$-homogène, on a*

$$|(T(u), u)| \geq c \, \| u \|^{1+\varkappa}, \; c > 0.$$

En effet, pour $\| u \| = \varrho$, avec ϱ assez grand, $|(T(u), u)| \geq c_1 > 0$. On a pour u de B

$$|(T(u), u)| = \left| \left(T\left(\frac{\| u \|}{\varrho} \frac{u}{\| u \|} \varrho\right), \frac{\| u \|}{\varrho} \frac{u}{\| u \|} \varrho \right) \right| \geq \left(\frac{\| u \|}{\varrho}\right)^{1+\varkappa} c_1,$$

d'où l'assertion.

THÉORÈME 3. (*alternative*) *Soient T et S les opérateurs satisfaisant aux hypothèses* 1 *et* 2 *et à l'hypothèse* 3 *respectivement. Soit T $\varkappa$-quasi-homogène et S fortement $\varkappa$-quasi-homogène. Supposons encore*

$$(T(u), u) \geq c \, \| u \|^{1+\varkappa}, \; c > 0. \tag{3.3}$$

Soit $\lambda > 0$. Alors

(i) *ou bien il existe $u \neq \theta$, « un élemént propre » tel que $T_0(u) - \lambda S_0(u) = \theta$*

(ii) *ou bien il n'existe pas ; dans ce cas $A_\lambda = T - \lambda S$ est régulièrement surjectif.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2, si nous posons $\lambda^* = \lambda + i \lambda_2$, $\lambda_2 > 0$, nous obtenons que A_{λ^*} est régulièrement surjectif. Considérons $\lambda > 0$

qui n'est pas une valeur propre et soit $\lambda^* = \lambda + i\lambda_2$, $0 < \lambda_2 \leq 1$. J'affirme que $A_{\lambda^*}^{-1}(K_R)$ est uniformément borné par rapport à $0 < \lambda_2 \leq 1$. Supposons que ceci n'est pas vrai. Dans ce cas, il existe f_n de B^*, $\| f_n \| \leq R$, $\lambda_{2n} \to 0$ et u_n de B, telles que $A_{\lambda_n^*}(u_n) = f_n$, $\| u_n \| \to \infty$. ($\lambda_{2n} \to 0$ en vertu du théorème 2, où on a démontré de plus l'inégalité (3.2)'). Soit $v_n = \frac{u_n}{\| u_n \|}$. On peut supposer que $v_n \rightharpoonup v$. On a

$$\| u_n \|^{-\varkappa} A_{\lambda_n^*}(u_n) = \| u_n \|^{-\varkappa} A_{\lambda_n^*}(\| u_n \| v_n) = \| u_n \|^{-\varkappa} f_n \tag{3.4}$$

et d'autre part, ètant

$$\| u_n \|^{-\varkappa} S(\| u_n \| v_n) \to S_0(v), \tag{3.5}$$

on a $\| u_n \|^{-\varkappa} T(\| u_n \| v_n) \to \lambda S_0(v)$,

donc $\| u_n \|^{-\varkappa} T(\| u_n \| v_n) \to T_0(v)$. On a alors $T_0(v) - \lambda S_0(v) = \theta$.

D'autre part, $\| u_n \|^{-\varkappa}(T(\| u_n \| v_n), v_n) = \| u_n \|^{-1-\varkappa}(T(v_n \| u_n \|), v_n \| u_n \|) \geq$ $\geq c > 0$, et étant $\lim\limits_{n \to \infty} \| u_n \|^{-\varkappa}(T(\| u_n \| v_n), v_n) = (T_0(v), v)$, on a $(T_0(v), v) > 0$, donc $v \neq \theta$. Mais c'est une contradiction.

Soit alors f de B^* et u_{λ^*} de K_ϱ, les solutions de $A_{\lambda^*}(u) = f$, pour $\lambda^* = \lambda + i\lambda_2$, $\lambda_2 > 0$. Soit $\lambda_{2n} \to 0$ et désignons $u_{\lambda_n^*} = u_n$. On peut supposer que $u_n \rightharpoonup u$. Mais $A_{\lambda_n^*}(u_n) = T(u_n) - \lambda_n^* S(u_n) = f$, d'où $T(u_n) \to f + \lambda$. Su, alors d'après le lemme 1, $Tu = f + \lambda Su$, d'où l'assertion.

PROPOSITION 4. *Sous les hypothèses du théorème 3, les valeurs propres sont réels, positives.*

En effet, si λ est une valeur propre, $(T_0(u), u) = \lambda (S_0(u), u)$, $(S_0(u), u) \neq 0$, d'où $\lambda = \frac{(T_0(u), u)}{(S_0(u), u)}$.

§ 4. Image des applications $T - \lambda S$.

Dans ce paragraphe, nous donnerons quelques résultats simples sur l'image de $T - \lambda S$ au cas général, alors aussi au cas, ou λ est une valeur propre de $T_0 - \lambda S_0$. Ces résultats généralisent dans un sens les résultats de F. F. Browder [4].

Nous supposerons pour l'opérateur T l'hypothèse 2 et la coercitivité dans une forme un peu plus forte :

$$|(T(u)\,u)| \geq c_1 \| u \|^{1+\varkappa} - c_2 \,, \; c_1 \,, c_2 > 0, \quad \varkappa > 0. \tag{4.1}$$

Pour l'opérateur S, nous supposerons :

HYPOTHÈSE 4. *Il existe G, un espace de Banach, tel que $B \subset G$ algébriquement et topologiquement et tel que l'application identique de B dans G est compacte ; S est continue de G dans B^*.*

Désignons par $\| u \|_0$ la norme dans G.

HYPOTHÈSE 5. *Il existe une application complètement continu, soit S_1 de G dans B^*, $\varkappa$-homogène, et telle que*

$$\| S(u) - S_1(u) \| \leq c(1 + | u |)^{\varkappa'}, \qquad 0 \leq \varkappa' < \varkappa. \tag{4.2}$$

Nous avons le lemme suivant :

LEMME 2. *Soit S_1 une application complètement continue de G dans B, $\varkappa$-homogène. Alors à chaque $\varepsilon > 0$, il existe une application complètement continue, $\varkappa$-homogène, soit R, de G dans un sous-espace F de B de dimension finie, telle que pour u de G :*

$$\| S_1(u) - R(u) \| \leq \varepsilon \| u \|_0^{\varkappa}. \tag{4.3}$$

DÉMONSTRATION. L'application S_1 étant complètement continue de G, l'image de la sphère $K = \{\| u \|_0 = 1\}$: $S_1(K)$ est compacte. Donc, il existe un $\varepsilon > 0$ réseau dans $S_1(K)$, soit $f_1, f_2, \dots, f_p$ tel que si $f \in S_1(K)$, alors il existe f_i tel que $\| f - f_i \| < \varepsilon$. Soit F le sous-espace engendré par f_j, $j = 1, 2, \dots, p$. Posons pour u de K :

$$\mu_i(u) = \varepsilon - \| S_1(u) - f_i \|, \quad \text{si} \quad \| S_1(u) - f_i \| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu_i(u) = 0$$

si $\| S_1(u) - f_i \| > \varepsilon$. Posons $P(u) = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} \mu_i(u) f_i}{\sum_{=1}^{p} \mu_i(u)}$. Enfin soit $R(u) = \| u_0 \|^{\varkappa} \cdot$ $\cdot P\left(\dfrac{u}{\| u \|_0}\right)$. On obtient aisément (4.3), d'où l'assertion.

THÉORÈME 4. *Soit T une application de B dans B^* satisfaisant à l'hypothèse 2, à l'inégalité (4.1) et S l'opérateur complètement continu de G dans*

B^* satisfaisant aux hypothèses 4 et 5. Alors il existe un opérateur R, complètement continu de G dans B^*, $\varkappa$-homogène, avec image dans $F \subset B^*$, un espace de dimension finie, tel que $T - \lambda S = T_0 - \lambda R$, où T_0 satisfait à l'hypothèse 2, et à l'inégalité (4.1). Il en suit que chaque élément f de B^* peut s'écrire comme $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in (T - \lambda S)(B)$ et $f_2 \in F$.

DÉMONSTRATION. $T - \lambda S = T - \lambda(S - S_1) - \lambda S_1$. L'opérateur $T_1 = T - \lambda(S - S_1)$ satisfait à l'hypothèse 2 et à (4.1): l'hypothèse 2 est évidente en vertu de la continuité complète de S de G dans B^*. Mais

$$|(T_1(u), u)| = |(T - \lambda(S - S_1)(u), u)| \geq c_1 \| u \|^{1+\varkappa} - c_2 -$$
$$- |\lambda| (1 + \| u \|)^{\varkappa'} \| u \| \geq c_3 \| u \|^{1+\varkappa} - c_4 ,$$

d'où l'énoncé. Pour S_1, on applique le lemme 2 et on construit R. On obtient $T - \lambda S = T_1 - \lambda(S_1 - R) - \lambda R$. Si nous posons $T_0 = T_1 - \lambda(S_1 - R)$, on a de nouveau l'hypothèse 2 en vertu de la continuité complète de R de G dans B^*. Pour obtenir (4.1), on a $|(T_0(u), u)| \geq c_3 \| u \|^{1+\varkappa} - c_4 - |\lambda| \varepsilon c_5 \| u \|^{1+\varkappa}$, où c_5 est la norme de l'application identique de G dans B. Il suffit maintenant de prendre $\varepsilon < \frac{c_3}{c_5 |\lambda|}$. Si $f \in B^*$, il existe u de B tel que $T_0(u) = f$. Posons $f_2 = \lambda R(u)$ et $f_1 = (T - \lambda S)(u)$, d'où la démonstration.

§ 5. Applications aux problèmes aux limites.

D'abord, nous démontrerons encore un lemme facile, utile dans la suite.

LEMME 3. *Soient T_n, $n = 1, 2, \ldots$, une suite des opérateurs de B dans B^*, monotone :*

$$\text{(5.1)} \qquad \operatorname{Re}(T_n(u) - T_n(v), u - v) \geq 0$$

et tels que

$$\text{(5.2)} \qquad \lim_{n \to \infty} T_n(u) = T(u) \text{ dans } B^* \text{ pour chaque } u \text{ de } B.$$

Soit l'opérateur T hemicontinu. Alors si $u_n \rightharpoonup u$ et si $T_n(u_n) = g$, alors $T(u) = g$.

En effet, pour chaque v de B : $0 \leq \operatorname{Re}(T_n(u_n) - T_n(v), u_n - v) \rightarrow \operatorname{Re}(g - T(v), u - v)$. Si nous posons $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, nous obtenons $\operatorname{Re}(g - T(u - \lambda w), w) \geq 0$ et par le passage à la limite $\lambda \rightarrow 0$: $\operatorname{Re}(g - T(u), w) \geq 0$, d'où le résultat.

Dans la suite, on va se bormer aux applications simples de la théorie ci-dessus. Le lecteur pourrait faire les généralisations lui même. Pour la littérature, cf. J. Leray, J. L. Lions [1], J. Nečas [3].

Soit Ω un domaine borné de l'espace euclidien R_N, à frontière lipschitzienne. On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes, à support compact dans Ω. La notation usuelle $D^i = \dfrac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}}$ est utilisée. On introduit comme d'habitude l'espace $W_m^{(k)}(\Omega)$ avec la norme $\| u \|_{W_m^{(k)}} = \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} | D^i u |^m \, dx \right)^{\frac{1}{m}}$. On désigne encore par $\mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ le fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$.

On définit les fonctions $a_i(x, \zeta_j)$ pour x de Ω, $|\zeta_j| < \infty$, $|i| \leq k$, $|j| \leq k$. On suppose que $a_i(x, \zeta_j)$ sont mesurables en x pour tous ζ_j, ζ_j fixés et continues en ζ_j pour presque tout x (condition de Carathéodory). On suppose encore

$$|a_i(x, \zeta_j)| \leq c\,(1 + \sum_{|j| \leq k} |\zeta_j|)^{m-1}, \quad 1 < m < \infty. \tag{5.3}$$

Il est connu, cf. par exemple M. M. Vajnberg [5]: l'opérateur $a_i(x, D^j u)$ résulte continu de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans $L_{m'}(\Omega)$, $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'} = 1$.

Soit f de $L_{m'}(\Omega)$, u_0 de $W_m^{(k)}(\Omega)$. On s'occupera du problème de Dirichlet (pour les autres problèmes cf. J. Nečas [3]). Une fonction u de $W_m^{(k)}(\Omega)$ est dite une solution faible du problème de Dirichlet:

$$\sum_{|i| \leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_i(x, D^j u)) = f \qquad \text{dans} \quad \Omega, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial^l u}{\partial n^l} = \frac{\partial^l u_0}{\partial n^l} \qquad l = 0, 1, \dots, k-1 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \tag{5.5}$$

$\left(\dfrac{\partial}{\partial n} \text{ étant la dérivée selon la nomale extérieure} \right)$ si pour chaque v de $\mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u) \cdot D^i \bar{v} \cdot dx = \int_\Omega f \bar{v} \, dx, \tag{5.6}$$

$$u - u_0 \in \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega). \tag{5.7}$$

Désignons encore par $a_i(x, \zeta_\alpha, \zeta_\beta) = a_i(x, \zeta_j)$, où $|\alpha| = k$, $|\beta| < k$. Supposons

$$\sum_{|i| \leq k} a_i(x, \zeta_j)\, \bar{\zeta}_i \geq c_1 \sum_{|i| = k} |\zeta_i|^m, \tag{5.8}$$

$$\operatorname{Re} \sum_{|i| = k} (a_i(x, \xi_\alpha, \zeta_\beta) - a_i(x, \eta_\alpha, \zeta_\beta))\,(\bar{\xi}_i - \bar{\eta}_i) > 0 \tag{5.9}$$

pour $\xi \neq \eta$,

$$\sum_{|i| = k} a_i(x, \xi_\alpha, \eta_\beta)\, \bar{\xi}_i \geq c_3 \sum_{|i| = k} |\xi_i|^m - c_4. \tag{5.10}$$

Posons

$$(T(u, v), w) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega \sum_{|i| = k} a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha u, D^\beta u_0 + D^\beta v)\, D^i \bar{w}\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{|i| < k} a_i(x, D^j u_0 + D^j v) \cdot D^i \bar{w}\, dx.$$

Il est démontré dans J. Leray, J. L. Lions [1] ou dans J. Nečas [3] que l'opérateur $T(u, v)$ ainsi défini satisfait aux hypothèses du théorème 3. Soient $b_i(x, \zeta_j)$ définies comme $a_i(x, \zeta_j)$ mais pour $|i| < k$, $|j| < k$. On suppose

$$|b_i(x, \zeta_j)| \leq c\,(1 + \sum_{|j| < k} |\zeta_j|)^{m-1}, \tag{5.11}$$

$$\sum_{|i| \leq k} b_i(x, \zeta_j)\, \bar{\zeta}_i \geq 0 \tag{5.12}$$

et posons

$$(S(u), v) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega \sum_{|i| < k} b_i(x, D^j u)\, D^i \bar{v}\, dx. \tag{5.12$'$}$$

Compte tenu de ce que l'application identique de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans $W_m^{(k-1)}(\Omega)$ est complètement continue, on a l'hypothèse 3. Si nous supposons que pour chaque $\mu > 0$, $\varkappa > 0$ fixé, $\varkappa = m - 1$:

$$\left\{ \begin{aligned} & a_i(x, \mu\zeta_j) = \mu^\varkappa \cdot a_i(x, \zeta_j), \\ & b_i(x, \mu\zeta_j) = \mu^\varkappa\, b_i(x, \zeta_j), \end{aligned} \right. \tag{5.13}$$

nous pouvons utiliser les propositions 2 et 3. Dans ces conditions, nous avons :

THÉORÈME 5. *On suppose les conditions* (5.3), (5.8), (5.13), $u_0 \equiv \theta$ *de* (5.7). *Alors si* $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, $\lambda \leq 0$ *ou si* $\lambda > 0$ *et dans le dernier cas s'il n'existe pas* $u \neq \theta$ *dans* $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ *telle que pour* v *de* $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$: $\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u)\, D^i \bar{v}\, dx - \lambda \int_\Omega \sum_{|i| < k} b_i(x, D^j u)\, D^i \bar{v}\, dx = 0$, *alors pour chaque* f *de* $L_{m'}(\Omega)$ (*à plus forte raison pour* f *de* $(\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega))^*$) *il existe une solution faible* u *de* $W_m^{(k)}(\Omega)$ *de l'équation*

$$(5.13)' \qquad \sum_{|i| \leq k} (-1)^{|i|} D^i(a_i(x, D^j u)) - \lambda \sum_{|i| < k} (-1)^{|i|} D^i(b_i(x, D^j u)) = f$$

dans Ω. (*Cf. exemple* 2).

Supposons maintenant pour $\varkappa = m - 1$ et $0 < \mu \leq 1$ que

$$(5.14) \qquad \begin{cases} \mu^{m-1}\, a_i\left(x, \dfrac{\zeta_i}{\mu}\right) = a_i(x, \zeta_j, \mu), \\[2ex] \mu^{m-1}\, b_i\left(x, \dfrac{\zeta_i}{\mu}\right) = b_i(x, \zeta_j, \mu), \end{cases}$$

où $a_i(x, \zeta_j, \mu)$, $b_i(x, \zeta_j, \mu)$ à côté de la condition de Carathéodory sont pour presque tout x de Ω et pour tous ζ_j continues en μ dans l'intervalle $0 \leq \mu \leq 1$. Supposons

$$(5.15) \qquad \begin{aligned} |a_i(x, \zeta_j, \mu)| &\leq c\,(1 + \sum_{|j| \leq k} |\zeta_j|)^{m-1}, \\ |b_i(x, \zeta_j, \mu)| &\leq c\,(1 + \sum_{|j| < k} |\zeta_j|)^{m-1}. \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, sopposons encore que pour $\mu > 0$:

$$(5.16) \qquad \operatorname{Re} \sum_{|i| \leq k} (a_i(x, \xi_\alpha, \mu) - a_i(x, \eta_\alpha, \mu))\, (\bar{\xi}_i - \bar{\eta}_i) \geq 0.$$

Définissons :

$$(5.17) \qquad (T(u), v) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u)\, D^i \bar{v}\, dx$$

et $S(u)$ comme audessus. Nous avons :

LEMME 4. *L'opérateur T, défini par* (5.17), *sous les conditions* (5.3), (5.14), (5.15) *et* (5.16) *est $m-1$ quasi-homogène avec $T_0(u)$ défini par* $(T_0(u), v) \overset{\mathrm{df}}{=}$ $\overset{\mathrm{df}}{=} \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u, 0)\, D^i \bar{v}\, dx$ *et* $B = \overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Définissons $T_\mu(u)$ par

$$(T_\mu(u), v) = \int_\Omega \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u, \mu)\, D^i \bar{v}\, dx$$

et soit $\mu_n \longrightarrow 0$, $u_n \longrightarrow u$ et $T_{\mu_n}(u_n) \longrightarrow g$. Pour appliquer le lemme précédent, on voit de (5.16) que (5.1) est satisfaite. L'opérateur T_0 est continu. Il faut encore voir (5.2). Mais $a_i(x, D^j u, \mu_n) \longrightarrow a_i(x, D^j u, 0)$ presque partout et en vertu de (5.15):

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega | a_i(x, D^j u, \mu_n) - a_i(x, D^j u, 0) |^{m'} dx = 0,$$

d'où (5.2), donc le lemme 3 s'applique, d'où l'assertion. On a aussi :

LEMME 5. *L'operateur S, défini par* (5.12)′, *sous les conditions* (5.14), (5.15) *est fortement $m-1$ quasi-homogène.*

En effet, il suffit de voir que pour $\mu_n \longrightarrow 0$, $u_n \rightharpoonup u$:

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega | b_i(x, D^j u_n, \mu_n) - b_i(x, D^j u, 0) |^{m'} = 0 . \tag{5.17}$$

Mais $b_i(x, D^j u_n(x), \mu_n) \longrightarrow b_i(x, D^j u(x), 0)$ presque partout et les intégrales (5.17) sont en vertu du théorème de l'immersion: $W_m^{(k)}(\Omega) \subset W_q^{(k-1)}(\Omega)$, $q > m$, algébriquement et topologiquement, absolument équicontinues. Il suffit d'appliquer le théorème de Jegorov.

Nous avons alors, en vertu des Lemmes 4 et 5 :

THÉORÈME 6. *On suppose les hypothèses* (5.3), (5.8), (5.11), (5.12), (5.14), (5.15), (5.16), $u_0 = \theta$ *de* (5.7). *Alors si* $\mathrm{Im}\, \lambda \neq 0$ *ou si* $\lambda \leq 0$ *ou si* $\lambda > 0$ *et si dans le dernier cas il n'existe pas* $u \neq \theta$ *dans* $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$ *telle que pour* $\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega)$

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u, 0)\, D \bar{v}\, dx - \lambda \int_\Omega \sum_{|i| < k} b_j(x, D^j u, 0) \cdot D_i \bar{v}\, dx = 0,$$

alors pour chaque f de $L_{m'}(\Omega)((\overset{\circ}{W}{}_m^{(k)}(\Omega))^*)$, *il existe une solution de l'équation* (5.13)'.

En effet, il suffit de définir $T(u, v) = T(u)$, où $T(u)$ est défini par (5.17). $T(u, v)$ satisfait aux hypothèses du théorème 3. Cf. les exemples 1 et 3.

REMARQUE. On voit aisément que le cas du problème de Dirichlet non-homogène se résout par le théorème 6, où l'on peut remplacer la condition 3.3 par la condition $(T(u), u) \geq c_1 \| u \|^{1+\varkappa} - c_3 \| u \|^{1+\varkappa'}$, $-1 \leq \varkappa'' < \varkappa$.

Institut Mathématique
Zitná 25, Praha 1
Tchécoslovaquie

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. LERAY, J. L. LIONS : *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 97-107.

[2] F. E. BROWDER : *Problèmes non-linéaires, Séminaire de mathématiques supérieures*, Montréal 1966.

[3] J. NEČAS : *Les équations elliptiques non linéaires*, Cours d'été 1967, Tchécoslovaquie, à paraître dans Czechoslovac mathematical journ. 1969.

[4] F. E. BROWDER : *Variational boundary value problems for quasi-linear elliptic equations*, II, Proc. Nat. Acad. Sciences, Vol. 50, n. 4, 592-598, (1963).

[5] M. M. VAJNBERG : *Variacionyje metody isledovanija nělinejnych operatorov*, Moskva 1956.

[6] J. NEČAS : *Sur la régularité des solutions faibles des équations elliptiques non linéaires*, Sémin. équat. part., Collège de France, 1968.